量子物理学

Berkeley 物理学教程 **Vol4**

E.H Wichmann

By Tsungp Lee

Welcome to connect with me by Feynman_landau@sohu.com for discussing any physics problem

内 容 简 介

《伯克利物理学教程》是美国近年来出版的供大学理工科头两年使用的基础物理教程．本书是其中的第四卷，阐述量子力学的基本原理和概念．共包括九章：导论，量子物理学中物理量的量值，能级，光子，实物粒子，测不准原理和测量理论，薛定谔波动方程，定态理论，基本粒子及其相互作用．作者在书中用了许多实验事实来说明量子力学理论的根据，并特别着重于澄清对量子力学的一些误解；书中还概要地叙述了量子力学在原子物理、分子物理、核物理和基本粒子等领域中的应用．

本书可供大专院校理工科师生阅读，也可供有关科技人员参考．

E. H. Wichmann

QUANTUM PHYSICS

Berkeley Physics Course, Vol. 4

McGraw Hill, 1971

量 子 物 理 学

《伯克利物理学教程》第四卷

〔美〕E. H. 威切曼 著

复旦大学物理系 译

*

科 学 出 版 社 出 版

北京朝阳门内大街 137 号

上海商务印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1978 年 9 月第一版 开本：787×1092 1/32

1978 年 9 月第一次印刷 印张：16 1/2

印数：0001—218,300 字数：374,000

统一书号：13031 · 821

本社书号：1172 · 13—3

定 价：1.70 元

中译本前言

自六十年代初期以来，美国一些重点大学，为了解决基础物理教材内容陈旧，与现代科学技术蓬勃发展的要求不相适应的矛盾，开始对大学基础物理课程试行改革.《伯克利物理学教程》就是这种尝试之一. 它是美国近年来较为流行的供大学理工科学生头二年使用的基础物理学教程，一共包括五卷: 1. 力学; 2. 电磁学; 3. 波动; 4. 量子物理学; 5. 统计物理学. 原教程编写的意图，是尽可能地反映近百年来物理学的巨大进展，按照当前物理学工作者在各个前沿领域所使用的方式来介绍物理学. 全教程引入狭义相对论、量子物理学和统计物理学的概念，从较新的统一的观点来阐明物理学的基本原理，以适应现代科学技术发展对物理教学提出的要求. 在编写过程中，曾吸收了在各个前沿领域工作的许多物理学工作者的意见，经过较长时间的教学试验和多次修改，于1963年开始出版. 迄今已重版多次. 这部教程对美国大学物理教学有较大影响. 原书比较偏重于理论方面，在实验方面，另编有《伯克利物理学实验》一书. 鉴于这部教程在取材、编排和写法上有一些特点，对如何利用新的科学技术成就来改革和充实基础物理教学内容尚有可供借鉴之处，按照"洋为中用"的方针，我们翻译出版中译本，以供我国高等院校师生和科技人员参考. 由于各卷内容相对独立，我们将分别出版.

必须指出，这部教程完全是按照美国教学原则编写的，不一定适合我国的具体情况，观点上也会存在一些问题. 希望

读者阅读时注意.

在中译本中，我们对原书作了少量删节，删去的主要有和原书内容关系不大的一些物理学家的照片和简单传记材料以及其他一些材料．原书各章附有一些参考读物，考虑到这些读物有的出版较早,国内难以找到,我们也已一律删去．读者可以根据需要与可能,参考有关的书籍.

译文错误或不当之处,请读者批评指正.

1977年11月24日

原书序言

本书是《伯克利物理学教程》的第四卷，论述量子物理学，是为已学过前面几卷大部分内容的读者而写的入门书．因而本书的理想读者是理工科二年级学生．鉴于最近五十年来物理学的发展，目前把对量子现象的全面学习推迟到二年级以后，似乎是不合理的和不公正的．一本份量适当的入门书无疑地应该反映这些发展的某些部分．

我不相信学习量子物理学比学习物理学其他部门在实质上会更困难．在物理学的每一个领域中，我们既遇到我们认为是简单而明了的现象，也遇到很难用定量方式说明的现象．当然，确曾有一个时期，所有量子现象被认为是非常神秘和错综复杂的．在最初探索这个领域的时期，物理学工作者确曾遇到一些真正的心理上的困难，这些困难一部分来自可以理解的偏爱于经典观点的成见，另一部分则来自于实验图象的不完整性．但是，对于今天的初学者，没有理由一定要重新制造这些同样的困难．现已确实知道，经典描述只是近似正确的，而且现在已可得到大批实验结果，来支持和阐明目前理论概念的各个方面．我坚信在已知的事实中，能够找到用初等方法处理起来既明确又足够简单，但又能阐明重要思想和原理的讨论题材．我不大相信，有指导地使学生去思考一系列选择得当的简单而又重要的物理事实时，他们竟会感到量子现象比(例如)万有引力现象更神秘了．

我在本书中的目的是在提供有特征性的量子现象的例子，以使读者了解微观物理学中一些物理参量的典型数量级，

并向他们介绍量子力学思想. 我力图在我讨论的课题中包括对理解物理学来说特别重要的现象和问题. 同时, 我力图使讨论尽可能是初等的. 我从微观物理学的各个领域选择了一些论题, 但我并不想对这些领域中的任何一个提出详细而系统的说明. 按照我的意见, 这样的说明应留给三、四年级水平的课程.

关于数学预备知识的要求并不过高. 我只假定读者已学过微积分, 包括常微分方程的初步介绍和一些矢量分析. 为防止把注意力从物理问题转向技术性的数学问题, 我已努力避免在这一阶段采用数学上有困难的论题. 凡是要求了解一些特殊函数性质或偏微分方程理论中分离变量法的课题, 我都完全未予讨论. 关于代数,我已颇为遗憾地断定,不应假定读者熟悉矩阵理论,所以,我已避免了以矩阵理论作为数学工具的一些论题.

我并不认为,要实现教程这一部分的总目的,需要在课堂上讲授本书的所有材料. 相反,在选择讨论题材方面,我想给教师留下相当多的自由. 为了帮助教师安排课程, 我在序言后面的《教学说明》中讨论了各章的具体目的, 而且试图大致列出可以认为是必不可少的内容.

E. H. 威切曼

教 学 说 明

本书内容分成九章. 每一章分成许多连续编号的小节，每一小节大致对应于一个概念或一连串思想中的一步. 课文中的公式、图和表，均以所在的或有关的节号编号. 课文中个别论题的专门参考文献列在脚注中. 物理数据表列在附录中. 每章之末列有一些问题供思考，认真的学生应做这些问题中的很大一部分.

单位问题在本书中并非争议之点. 教师可随其所好使用厘米·克·秒制或米·千克·秒制(唯一有不同的地方是精细结构常数的表示式). 常数都用这两种单位制列出. 实验结果用实用单位制表示. 在理论的讨论中我常把式子写成无量纲的形式,其中根本不出现宏观单位.

下面我想评介一下每一章的内容，说明我的意图，并指出可以如何取舍. 在正文中有些材料明确地用"提高课题"标出. 这些课题并不一定比所讨论的其他课题更高级，也不一定更困难. 但它们是离开了本书的叙述主线的论题，因而可以完全略去而不会使其余课文难于理解.

第一章是一般性引论. 其中讨论了量子物理的范围，评论了量子物理历史的某些方面. 最重要的启示也许是这样一点，即量子物理适用于物理学中的所有部门，而不仅仅只与"微观"现象有关. 在最低大纲中很可以把第一章的大部分内容留作阅读作业,教师可把课堂讲授限于讨论第 27—52 节中的材料,这些材料是与把普朗克常数引进物理学领域有关的. 章末的问题不需要特别的预备知识，在最低大纲中所有问题

都可以布置.

第二章是讲述微观物理中物理量的量值，其目的是让学生熟悉这些量值，发现物理常数的“自然”组合，并向学生说明如何在简单模型的基础上作简单的估计. 我认为这些目的非常重要，因而本章，包括末尾的问题，值得仔细注意. 在最低大纲中可以略去第 47—57 节.

第三章是讲述能级，但不是关于能级发生的理论解释，这个解释放在第八章中. 采用这种有些独特的陈述次序，其理由是我想把所有需要一些微分方程知识的论题尽可能放到本书的后面. 如果学生的预备知识足够，这一次序也可以改变. 在第三章中我想给出能级系统和谱项图的现实例子，并说明如何根据自然界中存在能级系统这一经验事实推断出简单的结论. 本章的一部分也可以留作阅读作业. 一个应充分讨论的重点是寿命和能级宽度之间的联系(第 14—26 节).

第四章是论述光子的波性和粒子性. 提出了重要的实验事实，并引导读者按量子力学的思想去思考这些事实. 我认为这一章不应删节.

第五章讨论所有实物粒子的波性. 这样，读过第四和第五章的学生就会认识到所有自然界中发现的实在粒子都有波性，而且他对于这一简单实验事实的直接含义将有一些概念. 他还会认识到粒子的波性并不与我们关于宏观物理学的经验相矛盾及为什么是这样. 这样第五章在很大程度上关系到一些非常基本的问题. 克莱因-戈登方程的导出(第 36—46 节)不应略去. 波动方程的解与矢量空间中的矢量相对应的解释的讨论(第 47—54 节) 可留作阅读作业或完全略去. 波被周期性结构衍射的讨论(第 16—22 节)在最低大纲中也可略去，尽管略去具有这么多美妙和明确的实验应用的理论是一件遗憾的事.

在第六章的第一部分中讨论了测不准关系(第1—19节). 这个内容具有决定性的重要性,不应略去. 在第六章的其余部分中试图系统地阐述并讨论量子力学思想的某些一般规则. 提出了测量理论,讨论了统计系综概念和相干、不相干叠加的概念. 我力图使这种讨论保持尽可能是物理的和具体的. 然而不能否认,本章中的讨论远远超出一些引论性书本中已经习惯的讨论,许多读者会感到这些内容可以等以后再讲. 另一方面,我认为本章的一些主要概念,如果用有条理的方式表示,并不特别困难,我并且认为试着尽早提出这些概念是值得的.

第七章和第八章是薛定谔理论的引论. 我的目的是稍为详细地说明波动力学理论在实践上如何解决问题. 第七章的第49—51节和第八章的第49—58节在最低大纲中可以略去. α 衰变中势垒穿透的讨论(第七章第37—48节)或许不应略去,因为理论和实验之间的比较必定会产生有力的效果.

第九章论述如何描述基本粒子间的相互作用的问题. 第1—18节是碰撞过程的初步讨论. 关于粒子的某些已知的事实和某些理论概念在第19—31节中讨论. 接着是量子场论一些基础概念的定性讨论. 这一讨论的明确结果是第47—55节中汤川势的简化推导. 在最低大纲中第九章可整个略去,但我认为应在课程中某处讨论一下相互作用问题. 不管第九章的内容是否教,我认为这些材料应当提供给感兴趣的学生. 这些问题毕竟是现代物理学注意的中心.

每章末尾的问题是打算用来进一步说明所讨论的课题的. 它们在难易程度上相差颇大. 只有比较少的问题属于只涉及把数值代入书中某处出现的公式的类型. 一定数量的这种问题在给读者有关数量级的感觉上的确是有用的. 但在我

的选择中，我要强调那些真正测验读者对课文的理解的问题，我不想把它们淹没在一大堆意义不大的问题中．我还进一步设想每个教师都将给出一定数量的、和他的特定课程相适应的他自己的题目，如果必要，其中有一些完全可以是简单的替代数值的题目．如果教师略去了课文的某些部分，他自然将略去相应的问题，或用其他问题来代替．

除了这些关于可略去的明确的建议以外，必要时教师有权随处进一步略去一节，缩短或简化讨论，而不违背本书的目的．在最低大纲中可以只讲授本书材料的二分之一到三分之二．我估计这可能相当于约二十个学时，而这是整个课程中应该用于量子物理部分的最少时间．

目　　录

第一章　导　　论

一、量子物理学的范围

1　在本教程的这一部分里，我们将研究原子、原子核和基本粒子领域中的物理学．这样，我们就会遇到自然界的一些新方面：所谓新的，意思是指在前几卷里我们尚未系统地讨论过这些问题．自然界的这些方面通常被称为*量子现象*，所以，我们就称这一卷的主题为*量子物理学*．现在公认的量子物理学的基本数学理论称为*量子力学*．

然而，不应该认为“量子物理学”是某种与宏观世界毫无关系的东西．实际上，整个物理学都是量子物理学；我们今天所了解的量子物理学一些定律，都是自然界中最普遍的定律．

2　在《伯克利物理学教程》(Berkeley Physics Course)的前几卷里，我们研究了宏观世界中的物理现象．我们已发现的自然定律都是经典物理学的定律．一般说来，可以认为经典物理学涉及的只是自然界中和物质的根本结构没有直接关系的那些方面．在这一卷里正好相反，我们要特别研究基本粒子，并且要尝试揭示出支配这些粒子行为的定律．我们的注意力自然会集中在这些定律尽可能显著突出的那些物理情况，这就是说，我们要研究的是每次只有少数几个粒子相互作用的情况．因此，这一卷所研究的物理学大部分可以称之为*微观物理学*：即研究由少数基本粒子构成的“小”体系．

然而，如果知道了支配基本粒子的基本定律，原则上也就可以预言由大量基本粒子构成的宏观物理体系的行为．这意味着经典物理学的定律来自微观物理学的定律，从这个意义上说，量子力学在宏观世界中也与在微观世界中一样适用．

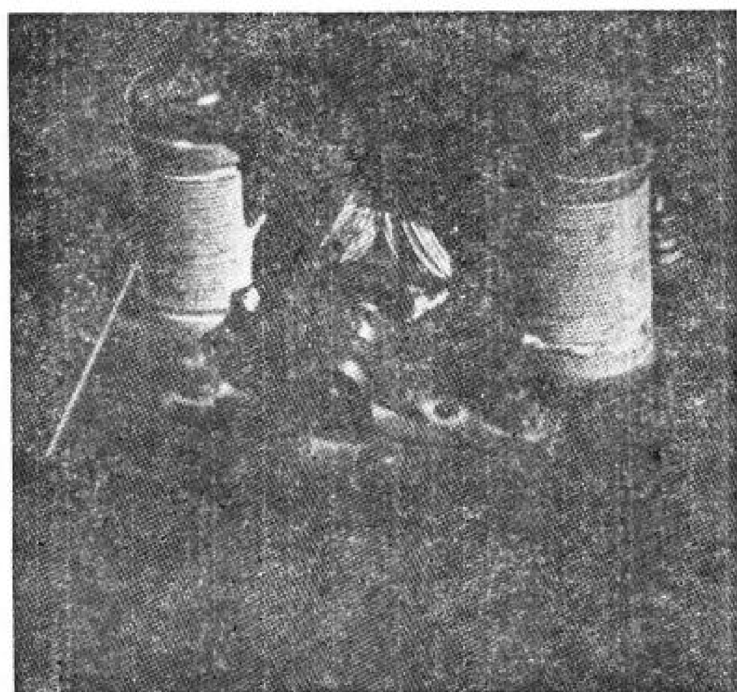


图 2A　一个量子力学体系的例子．这个电动机（以及作为电源使用的手电筒电池）的行为受量子力学定律的支配．虽然作者在大约三十年前得到这个电动机时从未想到这一点．

设计电动机可以而且应该根据经典电磁理论和经典力学，它们是量子力学的极限形式．没有一个神志正常的工程师会企图用组成这个体系的所有基本粒子间的相互作用来描述诸如此类的宏观体系．

3　当我们把经典物理学的规律应用于宏观体系时，我们试图描述的仅仅是体系行为的某些总的特征．例如，我们把"刚体"作为一个整体来考察它的运动，而不去讨论它的所有基本组成部分的运动．这就是物理学的经典理论应用于宏观体系时的特点，即忽略体系行为的细节，并且也不去考虑情况的所有方面．从这个意义上说，经典物理学的定律是自然界的近

似定律．我们应该将它们看成是更基本和更全面的量子物理学定律的极限形式．

换句话说，经典理论是唯象理论．唯象理论试图描述和概括的是物理学中某些有限领域内的实验事实．它不打算描述物理学中的每件事情，但如果它是一个好的唯象理论，它的确可以非常准确地描述有限领域内的一切．善于思考的读者可能会说，每一种物理学理论毕竟都是唯象的，基本理论和唯象理论之间的差别只是程度上的问题．不过作为物理学家，我们认为在这两种理论之间有着明显的差别．自然界的基本定律的显著特点是它们的极大的普遍性；对它们所叙述的内容，我们不知道有什么例外．我们把它们看作是正确的，严格的和普遍有效的，除非有明确的实验证据与之抵触．与此相反，唯象理论中的定律我们认为不是普遍有效的；我们知道它们只在物理学的某些有限的领域中是有效的（即足够准确的），超出了这个领域，这个唯象理论可能是毫无意义的．

4 当然，我们不应该轻视唯象理论．它们在概括我们在物理学各个领域中的实际知识上，是非常有用的．在物理学中有许多例子，对于这些例子我们确信有一个可用的基本理论，不过现象的复杂性使我们不能根据"第一原理"作出准确的预言．在这种情况下，我们就试用一个简化的唯象理论，它部分地直接依据实验事实，部分地是根据基本理论的某些一般性的特征．换句话说，让"物理体系做我们的某些理论工作"．再者，在物理学里还有许多没有找到基本理论的例子．这时，我们根据某些简单模型所能建立的任何唯象理论，都可以用来作为寻找更全面理论的一种过渡手段．

当我们试图去了解一种不熟悉的物理现象时，显然合理的是首先试用最简单的东西，这就是说，首先试用一个在表观

上类似的情况下已经用得很成功的理论或模型．如果我们的模型证明是成功的，我们就学到了一些东西，但如果证明是不成功的，我们也学到了一些东西．

重要的是要记住，模型仅仅是模型，而且整个物理学并不必要用单一的模型来描述．

5 人们常常谈论由于量子力学的发现在物理学中引起了"革命"．"革命"是一个引人注目的字眼（它似乎具有奇特的魅力），它意味着完全推翻掉某些东西．然而应该指出，对于预定要用经典理论来描述的那些情况，经典物理学的定律并没有被推翻．举例来说，我们今天描述摆的运动的方法与十九世纪所用的方法没有两样．

而且常常可以成功地用经典概念来获得对微观物理现象的某些了解：它们是近似有效的．重要的是要了解经典概念适用性的界限．在本章中我们将试图给读者有关这种界限的一个大致概念．当在以后各章了解了更多的量子现象后，读者将对这个重要问题得到更确切的认识．

通过本世纪内所完成的许多实验，已令人信服地证实了物理学的经典理论并不普遍有效．在这一卷中，我们将介绍某些有关的实验证据，使读者相信这个现实生活中的事实．

6 当我们回顾本世纪中物理学所发生的变化时，我们应该记住从来未曾有过一个全面的有关物质的经典理论．经典物理学定律是好的唯象定律，但它们并没有告诉我们有关宏观物体的一切情况．用这些定律可以描述由弹簧、杠杆、飞轮等组成的机械的行为（运动），只要给出制造这些机械的材料的某些"材料常数"，诸如密度、弹性模量等就可以了．然而，如果我们问为什么它们有这样的密度、为什么它们的弹性常数有这样的数值，为什么当棒中的张力超过某一极限时棒就会断

裂等等，经典物理学就无法回答了．经典物理学没有告诉我们铜为什么在1083°C熔化；钠蒸汽为什么会发射黄光；氢为什么具有它所有的化学性质；太阳为什么会发光；铀核为什么会自然蜕变；银为什么会导电；硫为什么是一种绝缘体；它也没有告诉我们为什么可以用钢制成永磁体．我们可以继续问下去，并举出许多每天观察到的事实，对于这些问题经典物理学告诉我们的是很少甚至是零．

7 读者希望知道我们现在是否有一个关于物质的全面理论？回答是没有；对于我们世界中发生的一切事物还没有一个详尽的理论．然而，在最近六十年内，我们关于自然界的知识已经大大地扩展了．我们发现了以前连做梦也没有想到过的自然界的某些方面，并且我们还成功地解决了许多老的问题．例如，可以这样说，现在已经非常好地了解了各种化学事实和大块物质的性质：在物理学的这些领域内，我们可以回答在经典理论范围内无法讨论的问题．

二、原子和基本粒子

8 让我们谈谈基本粒子的概念．据说某些古代的希腊哲学家最先在有关物质的理论中引进了原子的概念．（这并不排除在这以前可能有其他人作过类似的推测．）应该立即指出的是，古人的“原子”与现代的原子肯定不是同样的东西．实际上，要精确地了解希腊哲学家关于这个术语的真正涵义，并不是一件容易的事情．不过，他们所涉及的中心问题是物质是否无限可分．如果物质不是无限可分的，则在足够小的尺度上我们必定会发现物质的基本组元，或者说“原子”．我们取一块物质，将它一再地分成小而又小的碎片．最后这种分割达到终极，我们发现某种不能再进一步分割的东西，而这就是

"原子"(实际上这个词的意思是"不可分")[1].

希腊原子学派认为所有物质都确实是由"原子"组成的，大概他们还感到物质的各种极其多样的状态可以设法用"原子"的不同组态(和运动?)来解释. 我们认为有某些想法大致类似于现代的情况. 不过在我们的定量理论和古人的模糊推测之间肯定有很大的差异.

9 在本书中我们不打算讨论物质原子理论的早期历史，但要请读者仔细考虑在十九世纪中根据物质是由原子组成的假设得到的有关自然现象的一些卓越的理解. 根据这个假设，我们可以理解化学的基本事实，即某一给定的化学化合物总是固定由某些基本的化学元素根据化合物的特征以一定的比例组成的. 特别要考虑这样一个突出的事实，即我们可以用诸如 H_2O, H_2SO_4, Na_2SO_4 和 $NaOH$ 等简单公式来代表化学化合物. 这些公式之所以引人注目在于其中出现了一些小的整数，它们告诉我们两个单元的氢和一个单元的氧化合成一个单元的水，等等. 如果我们假定物质是由原子组成的，就可以立即理解这些经验事实：化学化合物由分子组成，同时分子又是少数原子的复合体系. 两个氢原子和一个氧原子化合成一个水分子. 简单而明了.

作为支持原子假设的进一步论据，我们举出特别由 J. C. 麦克斯韦和 L. 玻耳兹曼发展的气体分子运动论的成就. 根

1) 某些早期的自然哲学家很可能想到过晶体的明显地有规则和漂亮的外形反映出由小粒子(或者原子)构成晶体的方式. 今天这似乎是一个非常自然的想法. 然而这个思想似乎出现得并不早. 就著者所知，在历史记载中没有表明希腊的原子学家以这种方式推测过晶体.

结晶学作为一门科学是在十八世纪末开始发展起来的. 在早期的研究者中可以举出 Romé de Lisle 和 Haüy，他们精确地测量了解理面之间的角度. 在他们之前罗伯特•胡克和惠更斯曾臆测过晶体何以可由微小的(不可见的)部分组成.

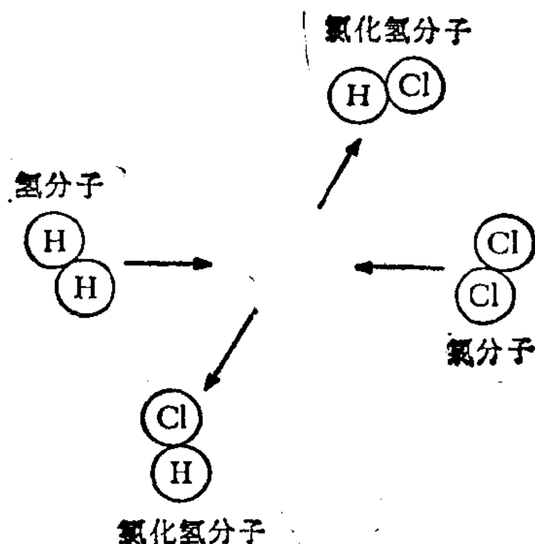


图 9*A*　化学反应 $H_2+Cl_2 \longrightarrow 2HCl$ 的一个很概念化的图，图中一个氢分子和一个氯分子化合成两个氯化氢分子．这个图用符号表示了化学反应就是"基本"组元的重新分配的思想．

当氢气在氯气氛中燃烧时实际发生的过程的细节是非常复杂的．在这过程中，释放出能量，其形式为光和反应产物的动能．气体变热导致氢和氯分子中的一部分分解成原子．而这些原子可以化合成氯化氢分子．通过碰撞或由光引起的分子与原子内部激发的其他一些过程也起重要的作用．

据容器中的气体是一群在容器内无序运动着的分子，它们相互间以及与器壁间不停地碰撞着的假设，这个理论可以解释气体的许多性质．可以进一步用运动论来估计阿佛伽德罗常数；$N_0=6.02\times10^{23}$，这是在一摩尔[1]的任何气体中的分子数．（一摩尔的任何化学化合物可以理解为一定数量的物质，它的质量以克为单位计时，其数值就等于该化合物的分子量．）洛喜密脱在 1865 年第一次粗略地估计了 N_0 的数值．

鉴于这些存在原子的论据，很难理解直到本世纪初还有某些学派，他们坚持以不存在物质是由原子组成的直接(!)证据为理由而拒绝原子假设．

10　希腊哲学家的"原子"并不相当于我们现代的原子，因为

1）摩尔，也有译为"克分子"．原文为 Mole．——译注

我们的原子不是不可分的：它们是由质子、中子和电子组成的．说得更确切一些，正是质子、中子、电子以及一大群其他的“基本粒子”起了希腊人的“原子”的作用．我们关于“基本粒子”的涵义是什么呢？这个名称的确切定义至今还有些争论，不过，照我们的想法，可以给这个问题一个简单而实用的回答：如果不能把一个粒子描述为其他更基本实体的一个复合体系，就可以认为这个粒子是基本的．一个基本粒子没有各个“部分”，它不是由任何更简单的东西构成的．我们想象中的继续分割的企图终结了．根据这个定义，质子、中子和电子全是基本的，但氢原子或铀核不是基本的．

可以说物质不是无限可分思想的精髓即我们不可能无止境地以构成物体的各个部分来分析物体．这个过程最终要失去它的意义；我们会遇到不能再简约的实体，这就是我们的基本粒子．

11 我们怎能断言电子是真正基本的呢？是否可能今天认为是基本的粒子明天却发现是复合的呢？毕竟，今天的原子是十九世纪的基本粒子，难道历史本身不会重演吗？

许多实验事实有力地暗示历史将不会重演，将永远不会在发现氢原子是复合的那种意义上发现诸如电子、质子或中子等粒子是复合的．让我们尝试描述一下这种论据的性质．

如果两个弹子以足够大的相对速度碰撞，它们将破裂成小的碎片．同样两个氢分子以很大的相对速度碰撞时，也将破裂成碎片．除非速度非常大，否则我们将在碎片中发现诸如氢原子或质子、或电子等东西；换句话说即组成氢分子的组元．在这两种情况里可以这样来描述所发生的事件：碰撞的猛烈性克服了使小球或氢分子的各部分保持在一起的内聚力，所以物体就分裂开来．对许多核反应可以给出类似的解释、核是由质子和中子组成的，如果一个具有一定高能量的

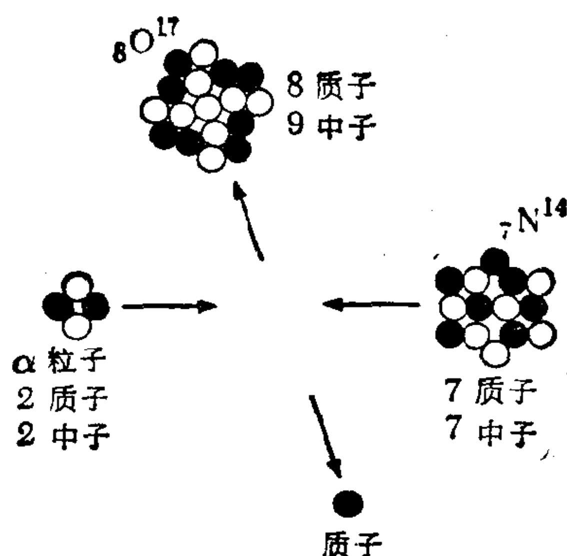


图 11A　核反应示意图，图中一个 α 粒子（氦核）同一个氮核碰撞产生一个氧核和一个质子. 这个由卢瑟福在 1919 年发现的特殊反应是对稳态核嬗变的首次观察. (E. Rutherford, *Phylosophical Magazine* **37**, 581(1919).) 在卢瑟福的实验中用来自放射源的 α 粒子轰击氮，并通过观察发射出的质子证实有反应出现.

这个图与图 9A 十分类似，它用符号表示出核由质子和中子组成以及核中的这些粒子的重新组合构成(低能)核反应的思想. 当然，不应该从字面上来理解：就核这个字的意义来说决不会"看上去"是这个样子.

质子与核碰撞，就可能从核内打出几个质子和中子.

12　然而，如果研究两个基本粒子诸如两个质子的猛烈碰撞，我们发现在本质上不同于上面所考虑的一些现象. 例如，如果一个高能质子和另一个质子碰撞，可能在碰撞后两个质子仍然存在，而在反应的产物中却另外发现了一个或几个新的基本粒子，诸如 π 介子. 我们说在反应中产生了 π 介子. 这不是在质子-质子碰撞时唯一可能发生的事情：质子可能消失，而出现许多完全新的粒子，叫做 K 介子和超子.

同样，当两个电子猛烈碰撞时，可能发生最终的反应产物包含三个电子和一个正电子. (正电子是一个类似电子的基本粒子，但带相反的电荷.) 反之，如果一个电子和一个正电

子相互碰撞，可能两个粒子都消失掉.（我们说它们湮没了.）而留下的仅仅是形式为γ射线的电磁辐射.

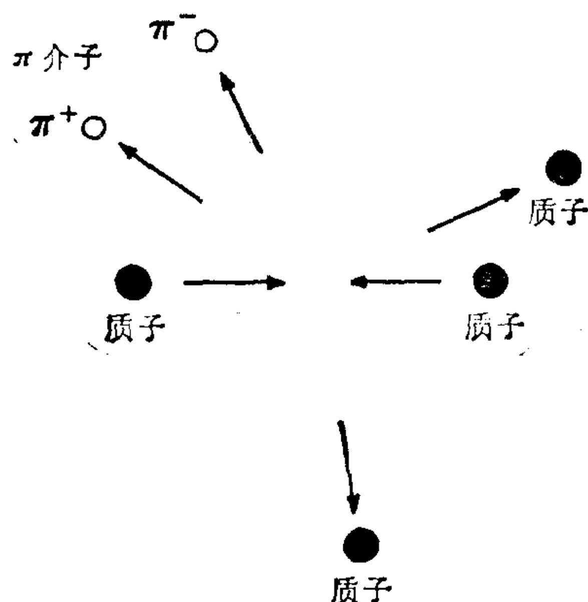


图 12*A* 在两个质子的高能碰撞中产生两个π介子的示意图. 一个π子带 $+e$ 电荷，另一个带 $-e$ 电荷，这里 e 是电子电荷的数值. 因此在这个事件中总电荷是守恒的.

由于两个质子在碰撞后继续存在，而且出现了两个新的粒子，很明显图 9*A* 和图 11*A* 中所示的这种简单的模型在这里不能适用了：不可能认为这事件是"两个质子的基本组元(?)的重新组合".

13 产生过程的一个有趣的例子是当γ射线通过原子中的电场时产生一个电子-正电子对. 因此，物质粒子可以由电磁辐射产生. 图 13*A* 是一张所谓"级联簇射"的云室照片，它"显示"了这种现象的许多实例. 对于这张照片可以作如下解释(亦可看图 13*B* 和 *C*.) 如果一个高能带电粒子，譬如说一个电子或者一个正电子，通过照片中所看到的某一块水平铅板，它在铅板中某一个原子的场内可能作非常微弱的偏转. 这样一个偏转构成了加速运动，因此将以高能γ射线的形式发射电磁辐射.（当然，粒子可能被一块铅板中的几个原子所偏转，在这种情况下将发射几个γ光子.）而以这种方式产生的

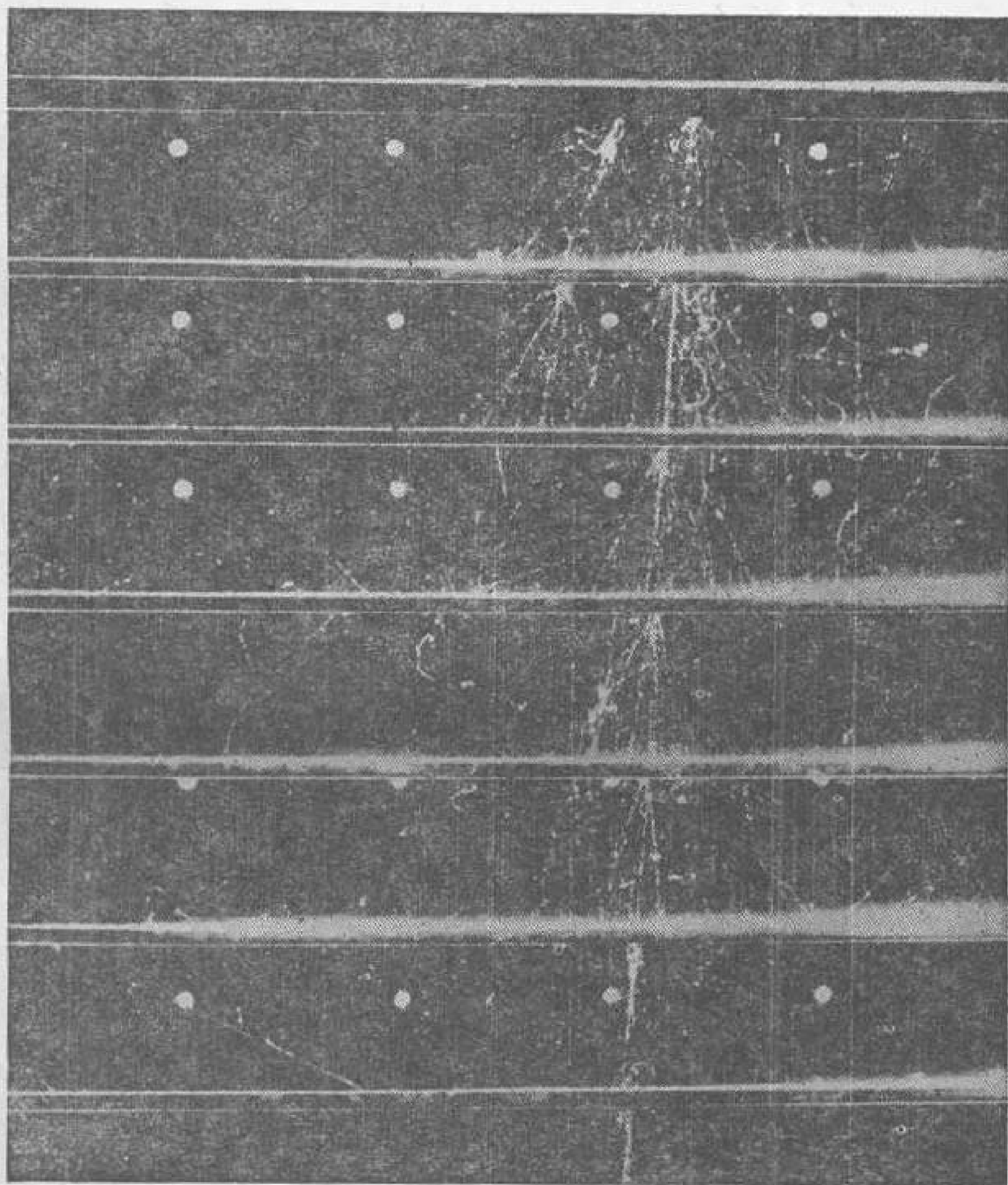


图 13A 显示级联簇射的云室照片．大多数看得见的轨迹是由电子和正电子引起的，它们通常朝着图的底部运动．在右上方进入并穿过了三块铅板而停止于第四块铅板中的粒子可能是一个π介子．进一步的译注可看正文．

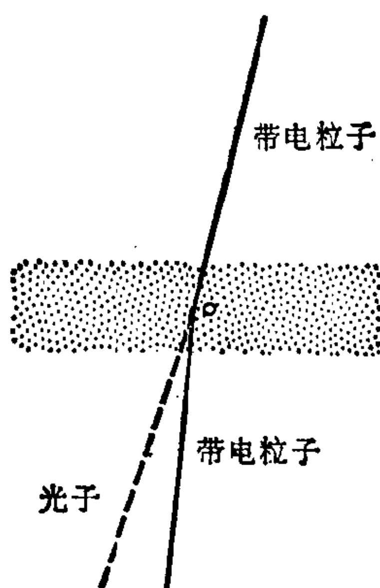


图 13B　一个高能带电粒子(譬如说一个正电子或电子)被原子内的电场所偏转，这种加速运动的结果是发射出γ射线(即一个高能光子)．这种物理现象叫韧致辐射．图中的阴影部分代表大块物质，譬如说云室中铅板的一部分．(为了清楚起见图中原子的大小稍微有些夸大．)

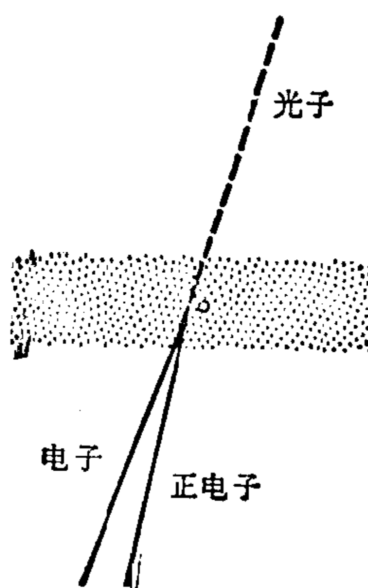


图 13C　一个高能γ射线与原子内的电场碰撞产生一个电子-正电子对：这种物理现象是电子对的产生．上面两个图所示的两种基本过程是发生图 13A 中所示的级联簇射的原因．

γ射线，当通过铅板时，在它们所迂到的原子的场内产生电子-正电子对．这些带电粒子当它们在铅板中偏转时又依次产生更多的γ射线，而新的γ射线又产生新的电子-正电子对，等等．因此，单个高能带电粒子或者单个γ射线可以产生一簇γ射线、电子与正电子．带电粒子在云室中留下了可以看得见的轨迹；这些就是我们在图 13A 中看到的轨迹．γ射线在图中是看不见的．

照片右边部分的级联簇射似看来由上面入射的γ射线引起的．这个γ射线的能量大概是 20 千兆电子伏．左边的簇射看来是由一个能量稍为低一些的带电粒子引起的．两组簇射或许都起源于在照片视区之外的云室壁中发生的某些事

件．在簇射中看到的大多数粒子都沿着朝下的方向运动．这些过程的特征是大多数高能粒子都倾向于沿着入射粒子的方向发射，能量较小的粒子可以沿其他方向发射．如果细致地看照片，我们看到由不是沿着主要簇射方向发射的粒子所引起的次级簇射很快就“消失”了．当初始能量分布到如此多的带电粒子和光子上以致它们中没有一个有足够的能量去产生另外的粒子对时，级联簇射自然地停止．然后，低能粒子被铅板所吸收．

引起簇射的粒子能量可以由它所产生的带电的次级粒子的数目来估计．

14 我们提到过的产生和湮没过程是自然界的重要方面．显然，这些现象一点也不象弹子的破碎或化学反应．我们可以把化学反应描述为由其他分子的基本组元形成新的分子，为了作这样的描述，原子是分子的基本组元．与此相反，考虑一个碰撞事件，在这个事件中原来就有的两个粒子在碰撞后与碰撞中产生的许多新粒子一起存在．显然我们不能用初始粒子的基本组元重新排列成新的复合体系的方法来描述这个事件．这种描述也不能应用于有某些初始粒子消失掉的事件．后一种现象的一个突出的例子是电子-正电子对的湮没，在这个事件中最初出现的物质粒子完全消失了，留下的只是γ射线．

15 为了用实验决定一个粒子是基本的还是复合的，我们尝试让它与另一个粒子碰撞以粉碎它，并观察反应的产物．用这种方法可以将分子破碎成原子，并将原子破碎成电子和核，因而有理由说分子是由原子组成的，原子又是由电子和核组成的．当十九世纪的物理学家认为原子是不可破坏和不可分割时，他们实在是错了：实际上可以容易地使原子破碎．同样可以使核破碎，从而有理由说核是由质子和中子组成的．

然而，破碎一个核比破碎一个原子需要高得多的能量，从这个意义上说，核比原子具有较少的“可破碎性”。

用现代的粒子加速器，可以产生能量极高的粒子束，因此如果象质子这样的粒子真是可以破碎的话，我们已经有了使它们破碎的手段．但质子不象原子和核那样破裂，有一些非常不同的事情发生．我们必须作出这样的结论，当研究电子、质子、中子等粒子时，我们达到了一个极限：把这些粒子看成是由其他更基本的粒子所组成就显得不合情理和无用了．

16 今天没有人企图根据物质是无限可分的前提来创立一个全面的物质理论：这样一种企图将是无益的．然而，让我们稍为考虑一下这种理论可能具有什么特色．如果取一块铜，将它分成小而又小的碎块，除了小铜块以外我们永远也得不到其他东西．不论碎块怎样小，仍旧可以认出它们是铜块．这意味着什么呢？这意味着是同样的物理定律在支配小铜块和大铜块的行为．物理体系可以无限地“按比例缩减”．当然必须承认我们的理论不一定需要有这种特点，但它将是描述无限可分物质的理论所具有的一个非常自然的特色．我们注意到经典的物理理论在很多方面确实具有这种特色．我们用于描述某些一吨重的机械的物理定律和描述手表的定律之间没有本质上的区别．宏观物理体系可以在相当大的范围内按比例变化．

如果物质是由基本粒子组成的，这种在物质是无限可分时可能显得很自然的“物理定律形式的不变性”肯定是完全不可相信的．一个铜原子一点都不象宏观的铜块；它是某种完全不同的东西．我们绝对没有先验的理由认为足够准确地描述宏观体系的物理定律也适用于描述原子和基本粒子的结构．

17 作为抽象的原则承认经典的概念可能不适用于原子并且承认电子真正地是一个基本粒子是一回事，而在人们的思想上要完全坚持这个原则又是完全不同的另一回事．经验表明我们的思想偏向于具有成见，不容易放弃一旦已经接受的概念．由于最初对物理现象的有意识的观察所涉及的是宏观体系，我们获得了一套"经典的成见"，当我们想学习量子物理学时必须克服这些成见[1]．让我们考虑两个密切相关的问题来说明这些话的涵义，它们曾是本世纪中进行过大量推测的对象．

18 让我们问下述问题：是什么力使一个电子保持在一起？电子的质量中哪一部分具有本征的特性；哪一部分来自电子的静电场的能量？为了尝试处理这些问题，我们假定一个并非不合理的模型，把电子看成为一个半径为 r 的均匀带电小球．这个小球的各个部分之间相互有静电排斥作用．因此必须有某种其他的力使小球保持在一起．这个力的性质是什么呢？

在这套丛书的第二卷里[2]我们已经知道怎样计算"存在于"静电场中的总能量：将 $\left(\frac{1}{8\pi}\right)\mathbf{E}^2$ 对整个空间积分，这里的 $\mathbf{E}$ 是局部的电场强度．对于我们的模型，得到的静电能的表达式是 $W=\frac{3}{5}\left(\frac{e^2}{r}\right)$[3]，这里的 e 是电子电荷．(表达式 $\frac{e^2}{r}$

---

1) 不仅初学物理的学生，年长的物理学家也有这种成见．由于思想僵化显然随着年龄而增加，可以说年长的物理学家实际上比初学的学生更受他的"经典成见"之害．

2) Berkeley Physics Course, Vol. 11, *Electricity and Magnetism*, Chap. 2, p. 51.

3) 这式子对厘米·克·秒单位制成立，在米·千克·秒制里是 $W=\frac{3}{5}\left(\frac{e^2}{4\pi e_0 r}\right)$.

前面的系数与模型的细节有关：对一个均匀带电的球，它是 3/5. 这里重要的不是这个系数的值而是 W 与 $\frac{e^2}{r}$ 成正比. 根据量纲，可以直接看出 W 是以这种方式依赖于 e 和 r 的.）现在我们可以将电子的质量写成 $m=m_e+m_i$ 的形式，这里 $m_e=W/c^2$ 是电磁的贡献而 m_i 是"本征的"部分. 问题是 m_e 有多大？或者说是否有可能 $m=m_e$，以致在这种情况下全部质量都是来源于电磁的呢？如果作这个假定，我们可以计算半径 r，并得到 $r=1.7\times10^{-13}$ 厘米. 许多实验事实暗示电子必须是非常的"小"，因此当的确得到一个很小的 r 时，是令人欣慰的. 要注意我们不能使 r 更小，除非我们愿意考虑 m_i 有为负值的可能性.

由于假设电子是基本的，一个 $r=0$ 的模型显得特别吸引人. 在这个模型中电子将是一个没有大小和没有结构的"点粒子". 不过，这将导致一个几乎是没有意义的无限大的电磁自能 W 和负的无限大的本征质量 m_i.（这种情况给数学上简单而吸引人的点电子模型造成了不可逾越的障碍，在文献上称它为"电子无限自能的困难".）

19 现在让我们批判地考察上述推测：它们真有意义吗？在提出我们的问题时，显然作了很多反映我们的成见的假定. 我们假定了电子是一个带电小球，并假定对于这个球的各"部分"可以应用库仑定律. 我们怎么知道库仑定律适用于这种情况呢？关于必须有一个力反抗静电排斥力以使电子的各"部分"保持在一起的想法又怎样呢？我们早先说过电子没有各"部分"，它是一个基本粒子. 我们问是什么力使电子保持在一起就意味着我们在考虑电子有可能破裂成各个"部分". 但这是一个很成问题的想法. 要注意粒子的静电自能等于让粒子的各"部分"完全分散开时所得到的功；这是我们最初导

出任何电荷体系的静电能等于电场强度的平方在全部空间上的积分时使用的方法．如果粒子不能分散，则静电自能就是一个值得怀疑的概念．这对于“点电子”的没有意义的无限自能更是如此．

目前，大多数物理学家已经了解到试图建立电子的某种经典模型是毫无意义的．电子的行为不象一个带电球．关于如果电子象一个带电球是什么将它保持在一起或者它的经典自能可能是多少的一切讨论在物理上都是不恰当的．我们的经典成见使我们提出一些不能预期其答案是有任何意义的问题．

然而，我们要提一下目前物理学中尚未完全驱除掉无限自能的幽灵这一有趣的情况．在量子力学中还仍然存在着这个混乱的残余．

三、经典理论的适用范围

20 在狭义相对论里光速有一个基本的作用．这个速度，$c=3\times10^{10}$ 厘米/秒，是任何物质粒子的速度上限，同时是实在空间中能量或信息传输速度的上限．这样一个速度的存在就为我们提供了一个简单和自然的判据，能够由它决定什么时候可以“非相对论地”讨论物理现象以及什么时候必须“相对论地”讨论．粗略地说，每当所有有关的速度都比光速小得多时，非相对论的讨论就足够了，也即是足够精确了．

我们可以问是否存在一个类似的判据，它告诉我们什么时候必须应用量子力学，什么时候应用经典物理学的理论就行了．是否存在一个“类似”常数 c 那样的自然常数，可以用它简洁地建立所要求的判据？

这样一个常数的确是存在的，称为普朗克常数．用 h 标

记这个常数，其值为

$$h=6.626\times10^{-27}\text{ 尔格·秒}$$
$$=6.626\times10^{-34}\text{ 焦耳·秒}$$

所以这个常数的物理量纲是[时间]×[能量]=[长度]×[动量]=[角动量]．这样一个物理量通常称为作用，因此普朗克常数亦称为(基本的)作用量子．

这个判据大致如下．对一个物理体系如果任何具有作用量纲的“自然”动力学变量[1]具有可以与普朗克常数 h 相比的数值时，则该体系的行为必须在量子力学的框架内描述．如果反之，当每一个具有作用量纲的变量用 h 来量度时都非常大，则经典物理学的定律就在足够精确的程度上有效．

我们强调这是一个粗略的判据，它仅仅告诉我们什么时候必须小心行事．一个作用变量在任何特殊情况下小，并不一定意味着经典理论完全不适用．在很多情况下特别是如果掺进了某些量子力学概念的话，对于体系的行为，经典理论将使我们至少有一些了解．

21 我们立即注意到普朗克常数的“小”，这意味着当用适于描述宏观现象的单位即米·千克·秒或厘米·克·秒单位来量度 h 时，它的数值是小的，或者说，宏观世界中的作用量当用 h 为单位量度时，将有巨大的数值．

举例来说，我们可以考虑摆钟中的一个摆锤．为了找出具有作用量纲的量，我们取摆的周期和它在摆动时的总能量的乘积．周期是一秒的数量级而能量肯定比1尔格大得多，这意味着这两个量的乘积比 h 的 10^{26} 倍还要大．按照我们的判据，对摆动着的摆锤作经典的描述应该是，而且确实是完全适当的．

---

1) 动力学变量是任何表征系统状态的变量．例如某个位置坐标，动量的某个分量，角动量的某个分量，速度的某个分量，总能量等等．

类似地考虑一个旋转的物体. 设转动惯量是1克·厘米^2，并设角速度为1弧度/秒. 则角动量等于1克·米^2/秒=1尔格·秒>$10^{26}h$，因此这个角动量与h相比是一个巨大的量. 即使物体仅仅是一个旋转周期为1小时的小沙粒，它的角动量用h来量度时，仍然是极其巨大的.

最后考虑一个小的但却是宏观的谐振子. 设质量为1克，最大速度为1厘米/秒，而最大振幅为$x=1$厘米. 因此最大的动量是$p=1$克·厘米/秒. 量$x\cdot p=1$尔格·秒仍然是一个大于$10^{26}h$的作用变量.

这个讨论说明当把我们的检验应用于这些宏观体系时，将始终告诉我们那些已经了解了的东西，即对于这些体系可以作经典的描述.

22 现在让我们尝试更深入地理解我们的判据究竟意味着什么.

在经典物理学里我们假定可以指定和测量体系的每一个动力学变量到任意的精确度. 这并不是说在真正实践时可以做到这一点，而是说我们不允许在*原则上*对精确度有任何限制. 经典物理学中的动力学变量组包括诸如多粒子或单粒子体系的位置坐标、动量的分量、角动量的分量等变量以及在某个时间在空间某点上的电场和磁场矢量的分量等变量.

然而，仔细分析微观物理体系的实际行为表明对指定和测量这类变量所能达到的精确度有一个*基本的极限*. 建立这个极限的非常透彻和漂亮的分析是由海森伯在1927年实现的. 我们称这种极限的存在为*测不准原理*，而将任何特定情况下这个原理的特殊定量表达式称为*测不准关系*.

一个特殊的测不准关系与(q,p)这对变量有关，这里q是粒子的位置坐标而p是粒子的动量. 这个关系可表示为

$$\Delta q \cdot \Delta p \geqslant \frac{h}{4\pi} \tag{22a}$$

这里 Δq 是 q 的方均根误差而 Δp 是 p 的方均根误差，因此不等式表明我们了解 p, q 两个变量的准确程度是受到限制的，这两个变量的“不准确度”的乘积不可能小于普朗克常数的数量级.

我们立即注意到由于普朗克常数 h 很小，测不准关系在宏观物理学里不具有重要性；q 和 p 的其他误差来源常常掩盖了以不等式(22a)表达的基本的测不准性．所以关系式(22a)虽然与我们关于宏观体系的经典理论相矛盾，但在任何意义上都不和我们的宏观物理学的经验知识相矛盾.

23 对测不准关系常常作如下的“解释”．动力学变量诸如位置、动量、角动量等必须从操作上(operationlly)来定义，即根据测量它们的实验步骤来定义．现在如果我们分析微观物理学中的实际测量步骤，其结果是测量总是要扰动体系；在体系和测量仪器之间存在一个特有的不可避免的相互作用．如果我们试图非常精确地测定一个粒子的位置，我们将以这样一种方式去扰动它以致于在测量后它的动量将非常不确定．如果我们试图非常精确地测量它的动量，我们就会以这样的方式扰动它以致它的位置将非常不确定．如果我们试图同时测定粒子的位置和动量，则这两个测量将必然以这样的方式相互干扰，以致于最后结果的精确度将服从不等式(22a)．然后，讨论将进而表明在特殊情况中这些扰动是怎样产生的.

对测不准原理涵义的这种解释在量子力学的教科书中是非常普遍的．作者不想坚持说这种解释是完全错误的，但他确实感到它是误人的，而且可能产生严重的误解．它丢掉了基本点，这就是：*测不准关系说明了一些限度，超过这些限度经典概念就不能应用*．经典动力学变量是时间的确定函数并

在原则上能以任意的精确度知道的，用这样的经典动力学变量描述的“经典物理体系”是想象中的虚构体；它在实际世界里并不存在．已经做出了的一些实验告诉我们情况就是这样．如果我们将实际体系描述为“经典体系”那么我们就是作了近似，而测不准关系告诉我们的是这种近似适用范围的限度．

24 为了进一步阐明这些概念，让我们考虑粒子的一维运动．按照经典动力学我们通过位置变量 $q=q(t)$ 描述粒子的瞬时位置．如果粒子的质量是 m，并且运动得足够慢，则它的动量 p 由 $p=p(t)=mdq(t)/dt$ 给出．现在我们可能认为测不准关系仅仅表达了我们测量仪器的倒霉特性，它阻止我们以任意的精确度来决定 $q(0)$ 和 $p(0)$，虽然我们完全可以考虑这些变量的正确值以及粒子在此以后的运动．换句话说，我们可以认为我们能够继续使用一个经典描述，按照这种描述，每一个粒子沿着一条确定的轨道运动；但作如下改进，即通过将测不准关系强加在决定轨道的初始条件上，从而在粒子沿哪一条轨道运动上引进了不确定性．

事实并非如此．实验告诉我们必须以深奥得多的方式修改我们的概念．*必须抛弃经典的轨道运动*；寻找或考虑 $q(t)$ 和 $p(t)$ 在同一时刻的值是毫无意义的．

25 然而，我们的讨论似乎在逻辑上有矛盾．首先我们阐述了测不准关系，然后又宣称在这个关系中出现的变量 q 和 p 没有意义．如果它们没有意义，那末测不准关系怎么能够有意义呢？这个问题的回答如下．在粒子行为的量子力学描述中我们可以引进某些数学上的客体 q 和 p，它们在很多方面对应于经典的位置和动量变量．然而，这些客体不等于经典变量．关系式 (22a) 告诉我们如果试图把量子力学的客体 q 和 p 解释为“位置”和“动量”，并由此用经典的术语来解释运

动，则在知道“位置”和“动量”所能达到的精确度方面存在一个基本的限度．换句话说，这个关系告诉我们如果我们试图引进经典变量，并试图经典地说明运动，则指定这些变量时所能达到的正确程度是受到限制的．

26 应该清楚地懂得无论何时以纯粹经典的术语分析测量过程都得不到测不准关系．测不准关系反映了有关自然界的实验所发现的事实．出现在自然界里的粒子表现得不象经典粒子，也不象小弹子球[1]：它们表现得相当不一样，而这就是为什么不可能进行甚至想象某些类型测量的缘故．

后面几章我们将学习真实世界中粒子的特性，那时我们将看到似乎是奇怪的测不准关系将多么自然地符合事物的格局．

四、普朗克常数的发现

27 现在让我们考虑普朗克常数的早期历史，看一下是怎样发现它的，是怎样把它引进物理学的．我们将追溯到本世纪初，并考虑那个时期物理学中的某些突出的问题，也就是下面的问题：

(i) 黑体辐射定律问题

(ii) 光电效应问题

(iii) 原子的稳定性和大小问题．

这三个问题当然不是当时物理学家研究的全部问题，我们挑出这三个问题是由于它们以特别鲜明的方式说明了经典物理学的困境．

读者应该理解我们的讨论作为有关历史的叙述是非常不

---

1) 由于某些原因，在一些量子力学教科书中弹子球成了经典粒子的样板．作者当然遵守这个习惯．

够的；我们不可能期望在几页的篇幅里恰当地处理量子力学的极其有趣的发展史．当我们回顾本世纪开始时的情况，容易看到这三个问题是关键问题．然而，如果我们考察 1900 年在“物理年鉴”(Annalen der Physik)（它是那时物理学中的主要期刊之一）上发表的文章，我们发现大多数物理学家关心着极不相同的问题．去粗取精的本领确实是一种难得的本领（无论何时），我们完全有理由赞赏量子物理学的先驱者们的杰出洞察力和想象力．

28 为了使情况戏剧化，我们将认为这三个问题是基本的“下落不明的常数的秘密”的三个不同的方面．这当然不是物理学家在 1900 年表述他们面临的困难的方式，但从这个观点来回顾对于考虑问题是有益的．

这个下落不明的常数当然是普朗克常数 h．在纯粹经典的物理理论中这个常数不会出现．所以让我们考虑在经典的描述中应起作用的其他一些基本的物理学常数．

(i) 光速，$c=3.00\times10^{10}$ 厘米/秒．这个常数在 1900 年已经相当精确地知道了．

(ii) 阿佛加德罗常数，$N_0=6.02\times10^{23}$，它是一摩尔（或克分子）的任何气体中的分子数．在 1900 年已根据气体动力学得出了这个常数的粗略数值．

(iii) 氢原子的质量，$M_H=1.67\times10^{-24}$ 克．在 1/2000 的准确度上这也就是质子的质量 M_p．由于一摩尔氢的质量非常接近 2 克，我们有

$$N_0\cdot M_H\cong N_0M_p\cong1\text{ 克} \tag{28a}$$

所以如果我们知道了阿佛加德罗常数，就可以求出 M_H．

(iv) 基本电荷，$e=1.6\times10^{-19}$ 库仑 $=4.8\times10^{-10}$ 静电单位．电子的电荷是 $-e$，质子的电荷是 $+e$．一摩尔带一个电荷的离子（即每个离子带电荷 e）所携带的电荷称为法拉第

常数 F. 因此，我们有

$$F=N_0\cdot e=96500\text{ 库仑.} \tag{28b}$$

在电解实验中容易测定法拉第常数 F. 例如，F 就是为沉积一克当量的银(即 107.88 克的银，因为银的原子量是 107.88)所必需通过电解槽的电荷量.

(v) 电子的荷质比，$e/m=1.76\times10^8$ 库仑/克，质子的荷质比 $e/M_p=9.6\times10^4$ 库仑/克. 这些常数可由电子束或质子束在电场与磁场中偏转的实验决定. J. J. 汤姆逊在 1897 年用这个方法决定了 e/m[1]. 应该看到，

$$\frac{e}{M_p}=\frac{F}{N_0M_p} \tag{28c}$$

因此，这个常数是和前述的一些常数有关的.

还应该注意到，给定了 e/m 和 e/M_p 的准确值，即使没有以相应的精密度知道电荷 e，我们也能够求出：

$$\frac{M_p}{m}=\frac{e/m}{e/M_p} \tag{28d}$$

的准确值. 当然这里假定了质子电荷和电子电荷的大小相等.

(vi) 电子质量 $m=9.11\times10^{-28}$ 克. 这个常数能够由 e 和 e/m 推出.

29 阿佛加德罗常数 N_0 是联接微观物理学和宏观物理学的纽带. 这个常数的巨大数值告诉我们原子和分子实际上是多么小，以及在宏观世界中为什么物质的粒状结构不是十分明显的. 如前所述，在上世纪末还没有十分了解 N_0. 然而，已经很好地了解了常数 F, e/m, m/M_p. 因此，对于 N_0 或 e 的一个独立的好的测量将会导致更好地了解基本常数 e, m 和 M_p. 正如我们将看到的那样，普朗克黑体辐射理论的一个重

1) J. J. Thomson, "Cathode Rays", *Philosophical Magazine* **44**, 293 (1897).

要方面是使我们能够对 N_0 的数值作一个独立的而且是更好的测定.

大约十年以后, R. A. 密立根[1] 在他著名的油滴实验中, 通过观察在重力和电场的联合影响下漂浮在空气中的带电油滴的运动直接测量了 e. 虽然很难期望这类实验能够得到精确度很高的 e 值, 但作为对这个常数的一个独立的和概念简单的测定还是非常重要的.

30 我们要继续讲我们的故事并且说一下用计算晶体中的原子数目的方法可以很直接地测得阿佛加德罗常数 N_0. 晶体中的原子排列成有规则的点阵, 比如说立方点阵, 如果我们能够决定晶体中相邻原子间的间距, 即晶格常数, 显然我们能求出

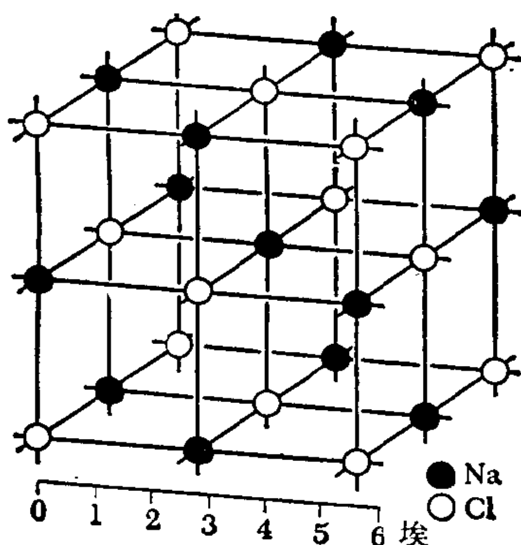


图 30*A* 氯化钠的晶体结构. 点阵是立方形的, 氯原子和钠原子交替地位于顶点上. 图中小球的中心表示钠和氯原子核的平均位置. 没有打算用这些球的大小来表示原子或核的大小.

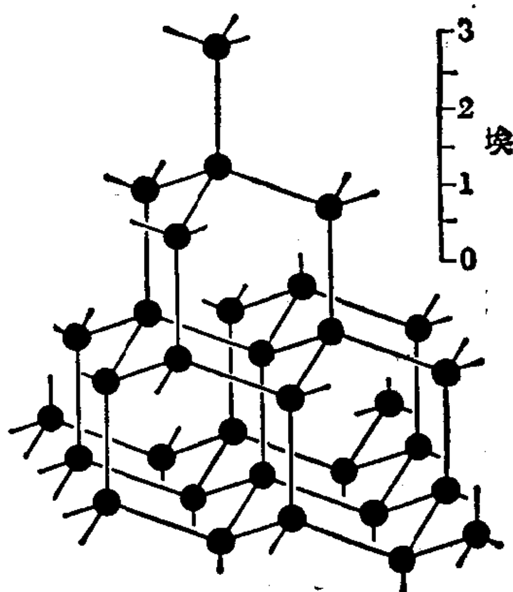


图 30*B* 金刚石的晶体结构. 每个碳原子有四个位于四面体顶点的最近邻原子. (最近邻原子间由实线联结着.)

---

1) R. A. Millikan, "The Isolation of an Ion, a Precision Measurement of Its Charge, and the Correction of Stokes's Law". *The Physical Review* **32**, 349 (1911).

N_0. 只要我们决定了所用X射线的波长(例如可用一个机械刻划的"宏观光栅"来测定)就可以通过X射线衍射实验决定这个间距. N_0最终就是用这种方法决定的.

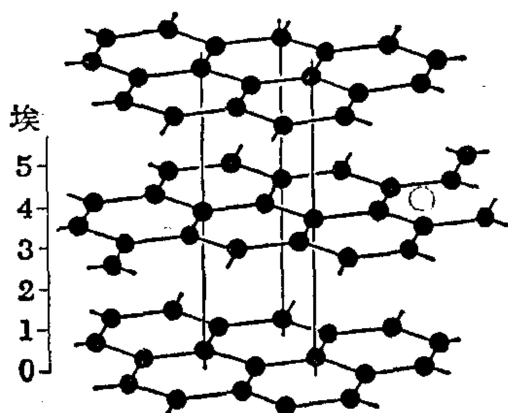


图30*C* 石墨的晶体结构. 金刚石和石墨都只含碳. 这两种材料物理性质上的显著差异是由于它们晶格形式不同. 石墨晶格由相等间隔的平行平面组成, 在这些平面中的碳原子排列成正六边形图案. 比较一下上面所示的晶格与图30*B*中的金刚石晶格.

自然界以晶体的形式为我们提供现成的衍射光栅, 这个聪明的想法是由M. V. 劳厄首先提出的. 根据他的建议弗里立许和聂宾在1912年进行了晶体中的X射线衍射实验[1]. 事实上这是第一次在实验上确定地证明了X射线的确是波长很短的波.

31 为了能了解与黑体辐射有联系的论点, 必须离开本题去讨论热和温度[2]. 这些概念与热平衡条件下对大块物质行为的描述有关. 这些论题与孤立的原子、分子或核的结构或行为毫无关系, 但是对于量子现象的许多表现形式, 它却是重要的. 原因当然是我们一般不能对孤立的原子、分子或核进行测量; 我们观察的是这些"嵌入"大块物质之中的粒子.

热能是与宏观物体组元的无序运动相联系的能量. 热(热量)是传输中的热能(从一个物体到另一个物体). 温度是

---

1) W. Friedrich, P. Knipping and M. Laue "Interferenzerscheinungen bei Röntgenstrahlen". *Annalen der Physik* **41**, 971 (1913).

2) 在"Berkeley Physics Vol. V. *Statistical Physics*"中更全面地讨论了这些论题. 也可参看 Physical Science Study Committee, *Physics*, Chaps. 9 and 26, 2nd ed. (D. C. Heath and Company, Boston, 1965).

什么呢？

32 不太容易用一句话给出温度概念的确切定义. 在某种意义上我们都“知道”温度是什么, 我们都知道怎样用温度计测量温度. 温度计可以是任何一个物体或体系, 只要温度的变化会使它产生一种便于观察的变化, 例如长度变化、体积变化、电阻变化等等. 作为一个例子让我们考虑一个水银温度计. 温度是通过观察在均匀横截面的毛细管中水银柱的水平面来读数的. 为了建立温度的标度(温标)我们可以指定冰的融点为零度 0°, 而水的沸点为 100°, 然后将毛细管上两个参考点之间的间隔分成一百个等分以规定中间的“度”. 用这种方法我们确实能定义一个温度的量度, 但我们的步骤有严重的缺点(从基本的物理理论的观点来看), 我们的温标取决于任意选取的物质(在这个情况中是水银)的特性. 如果我们根据同样的步骤采用另外的物质, 譬如说酒精, 我们可能发现酒精温度计上的 30° 与水银温度计上的 30° 不是同一个温度.

从科学性上考虑, 显然希望能有与任何特殊物质的特性无关的温度测量. 在这套丛书的下一卷里, 专门讨论热物理, 我们将详细地讨论怎样才能规定这样一种测量. 这样定出的温标是绝对温标, 在这个温标上温度是以开尔文度量度的, 记为 °K[1]. 在绝对温标上 0°K 是最低的可能温度: 这个温度近似地对应 −273°C. 为了方便起见, 选取开尔文度的大小使得温度差在绝对温标和摄氏温标上具有相同的数值, 因此由定义可得

$$°\mathrm{K}\ 温度 = °\mathrm{C}\ 温度 + 273.15$$

1) 1967 年第十三届国际计量大会上已通过热力学温度单位的名称为开尔文, 其代号为 K, 并废除开氏度这一名称和 °K 这个代号, 但这里仍照原文译出. ——译者注

33 让我们尝试从微观物理学的观点获得温度"涵义"的定性概念．基本的思想如下：当温度增加时，与宏观物体的基本组元的随机运动有关的平均能量也随之增加．在温度0°K时，所有的随机运动停止，这就是最低可能温度的物理意义．(要强调"随机"这个词.)

在统计力学中我们常常用一个模型使真实气体的性质理想化：我们假定气体由大量微小的随机运动着的并可忽略相互作用的全同粒子(分子)组成．这个模型很好地描述了稀薄的真实气体．如果(模型)气体中的粒子是单原子分子，我们就说是理想的单原子气体．可以证明对于一摩尔的理想气体

$$PV=\frac{2}{3}N_0E_{\text{kin}} \tag{33a}$$

这里P是压力，V是容器的体积，而E_{kin}是每个(单原子)分

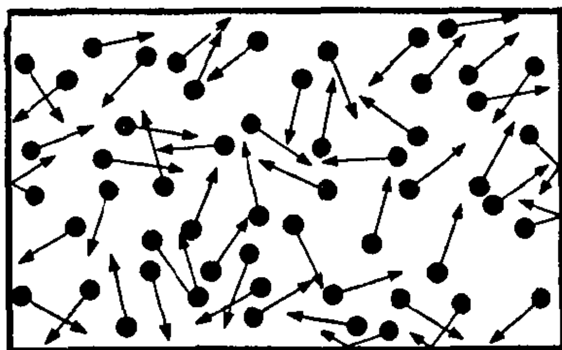


图 33*A* 可以很容易地理解关系式 $PV=\frac{2}{3}N_0E_{\text{kin}}$. 考察一个体积为$V$，有$N_0$个分子的容器．首先让我们假定所有的分子都以速度$v$向右运动．单位时间内与单位面积的器壁碰撞的分子数为$v_0(N_0/V)$．每个分子传给器壁的动量为$2mv$．压强P'等于单位时间内传给单位面积的总动量．因此我们有$P'=2mv^2(N_0/V)=4E_{\text{kin}}(N_0/V)$．

实际上，运动的方向是随机的，真正的压强P与上面计算的压强P'的关系是$P=\frac{1}{6}P'$，这就得到了等式(33a)的结果．(我们可以这样来理解1/6这个因子：沿着三个相互垂直的轴中的每一个有两个方向，如果我们想象分子沿着六个标准的方向运动，这样将只有六分之一的分子对右边的器壁施加压力.)

子的平均动能.

绝对温度这样定义，使得在这个模型里的平均“动能”可简单地表述为 $E_{kin}=\frac{3}{2}kT$，这里比例常数 k 称为玻耳兹曼常数. 所以我们可以将(33a)写成

$$PV=N_0kT=RT \tag{33b}$$

的形式，这里常数 $R=N_0k$ 是普适气体常数. 实验事实是对于所有足够稀薄的气体这个定律都精确地成立；亦即对任何真实气体，气体越稀薄这个定律成立得越好. 我们能够利用这个事实制造一个为显示绝对温度而定标的气体温度计.

34 普适气体常数的数值为

$$R=N_0k=8.3\times10^7\ 尔格(°K)^{-1}\ (摩尔)^{-1}$$
$$=1.99\ 卡(°K)^{-1}\ (摩尔)^{-1} \tag{34a}$$

它是一个宏观常数，可以方便地根据关系式(33b)测得. 玻耳兹曼常数 $k=R/N_0$ 是每个分子的气体常数. 倘若 N_0 已知，就可以求出它，它的数值为

$$k=1.38\times10^{-16}\ 尔格(°K)^{-1} \tag{34b}$$

k 实际上是从温度到能量的转换因子. 不过，温度和能量以这种方式联系着不应使人认为能量和温度是“同样的东西”.

35 对经典物理学的基本常数作了这样的考察后，我们现在来考虑黑体辐射定律问题. 经验事实如下. 处于高温下的物体表面发射各种频率(各种波长)的光. 如果以单位时间在单位面积上每单位波长间隔内发射的辐射能量对波长作图我们得到在非常长和非常短的波长上都趋于零的曲线；一般说来曲线在某个与温度有关的波长 λ_{max} 上有一个极大值. 非常粗略地看，对于所有材料的表面这个最大值的位置和发射的总辐射量都是一样的. 人们可以不去研究来自材料表面的辐射

而观察来自保持在一定温度的封闭材料表面的壁上小孔的辐射．在这种测量中我们有一个由某种合适的难熔材料制成的包壳或者说"炉子"，它的边上有一个小孔(即与腔的线度相比是很小的一个孔)．我们把仪器对准小孔从而测量了来自包壳内部的辐射能．在这种测量中发现：

(i) 来自小孔的辐射强度对波长的图形(看图 35A)是在长波和短波方向都降落到零的平滑曲线，而在波长 λ_{max} 处有一个极大值；λ_{max} 以非常简单的方式依赖于腔壁的温度 T，即

$$\lambda_{max}\cdot T=C_0=0.2898\ 厘米\ {}^\circ K \qquad (35a)$$

(ii) 发射出来辐射的光谱分布，即(i)中所述曲线的形状与腔的形状和制造腔壁的材料无关．因此表示维恩位移定律的等式(35a)中的常数 C_0 是一个普适常数，它概括地描述了

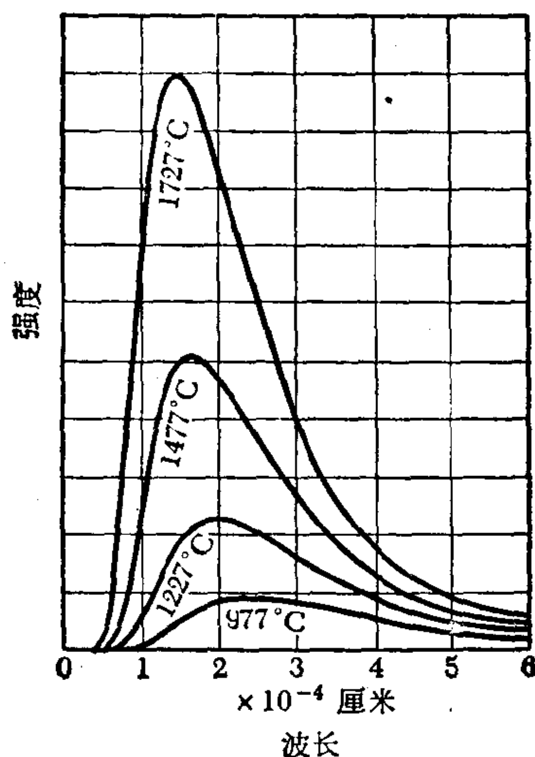


图 35A 表示在四个不同的温度下，黑体辐射体每单位面积每单位波长间隔上发射的功率的曲线．发射的总功率正比于曲线下的面积；它与绝对温度的四次方成正比．注意极大值的位置是如何依赖于温度的；确切的关系由维恩定律表示．

腔的一个引人注目的性质.

(iii) 来自小孔的辐射强度在各个波长上总要大于相应的与腔壁保持同样温度的材料表面发射的强度；然而强度的数量级是一样的.

36 一个吸收全部入射在其上的辐射的表面称为*黑体表面*. 对于腔外的观察者,腔壁的一个小孔有点象黑体表面,尤其在腔内壁是粗糙的或被涂黑的情况下更是如此. 理由很简单,任何从腔外入射到小孔上的辐射(光)由于在腔内的多次反射,将几乎完全被吸收;即使内壁不是完全吸收体.

由于这个情况，我们将来自腔壁小孔的辐射称为*黑体辐射*. 基尔霍夫从非常普遍的热力学考虑证明了对任一波长任意材料表面的发射率与黑体表面的发射率之比等于该材料在这个波长的吸收系数. 因此，黑体表面是一个合适的标准发射体,我们将限于考虑黑体辐射,即来自腔壁小孔的辐射.

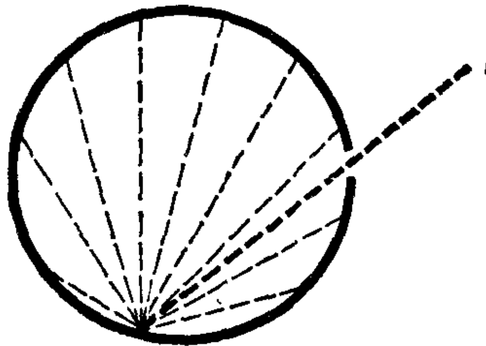


图36A 对一个外部的观察者来说，具有内表面为(部分)吸收体的腔壁上的小孔是一个黑体表面，它几乎完全地吸收入射辐射. 通过小孔进去的光线在它碰到内表面时部分被吸收，部分被漫反射. 反射光线再次被部分吸收和部分漫反射,只有很小一部分入射光有机会再次从小孔中出来.

换一种说法：进入腔内的光子只有很小的几率能通过小孔逃掉.

读者自己可以很容易地试一下用这种方法能够实现一个黑体表面. 将一个硬纸盒的内部涂黑,并在一边开一小孔. 从外边看小孔，它显得比任何“黑色”的材料表面“更黑”.

37 十九世纪末已经对黑体辐射定律进行了仔细的测量，特别是已经建立了关系式(35a)，突出的理论问题是要从基本原理推导出辐射定律．小孔会发射辐射本身是没有什么可惊奇的；我们知道物质的组元都是带电的，腔壁中组元的热振动自然会导致向腔内发射辐射能．这个辐射也可以被腔壁吸收，如果腔壁保持在一定的温度上则腔内和腔壁的辐射能之间将达到某种平衡，即发射率将等于吸收率．因此问题就是推导出腔内辐射能密度作为波长和温度函数的表达式．

这里，我们只把注意力集中在这个问题的一个细节，即等式(35a)上．为了了解它涉及到什么内容，我们把这个等式改写成下列形式

$$\frac{\lambda_{\max}}{c}\times kT=X_1=\frac{C_0 k}{c} \tag{37a}$$

这里 c 是光速，k 是玻耳兹曼常数，而 X_1 是一个新的常数．由于(37a)的左边具有[时间]×[能量]＝[作用]的物理量纲，常数 X_1 是一个作用量．我们怎样才能导出 X_1 的理论表达式呢？我们怎样由可供使用的自然常数产生具有作用那样的量纲的物理量呢？这确实是一个难题，因为很难看出常数 m，M_H 和 e 怎么可能会进入 X_1 的表达式．物理上的情况似乎十分清楚明了，腔内的辐射能与腔壁处于热平衡．然而，腔所发射的辐射与腔的大小形状无关，而且与腔壁的材料也无关；这样，怎么可能与代表腔壁性质的这些常数如 m 和 e 有关系呢？看来很有理由怀疑不可能从已有的常数导出 X_1．事实上，在经典物理学的基础上不可能理解关系式(37a)．在1900年普朗克的发现之前，情况实际上是个绝境．应用经典统计力学曾导致下述荒唐的黑体辐射定律，它说辐射强度以这样的方式随频率单调增加以致于总的辐射能将是无限大，这就是说辐射在任何温度都不可能与材料处于热平衡．

38 1900年12月14日M. 普朗克在柏林德国物理学会的一次会议上提出了黑体辐射定律的推导，这一天可以认为是量子物理学理论的诞辰[1]. 在推导辐射强度作为波长和温度函数的理论表达式时，普朗克作了一个特别基本的假定从而背离了经典物理学，这个假定的精髓可以说明如下. 一个自然频率为 ν 的振子只能够取得或释放成包的能量，每包的大小为 $E=h\nu$，这里的 h 是一个自然界的新的基本的常数. 根据这一假定，普朗克能够为我们的常数 X_1 推导出一个表达式，即

$$\frac{\lambda_{max}}{c}\times kT=\frac{C_0k}{c}=X_1=0.2014h \tag{38a}$$

而这就是普朗克常数的第一次露面.

普朗克本人在接受这个背离经典物理学的假定时是非常勉强的，在他伟大的发现之后，多年来他非常卖力地试图在纯粹经典的基础上理解黑体辐射现象. 关于这些无效的努力，他后来说他并不认为它们是无用劳动；仅仅由于他的重复失败才使他最后相信不可能在经典物理学内求得说明.

39 普朗克辐射定律的完整的光辉形式表达如下：

$$E(\lambda, T)=\left(\frac{8\pi hc}{\lambda^5}\right)\times\frac{1}{\exp(hc/\lambda kT)-1} \tag{39a}$$

这里的 $E(\lambda, T)$ 是腔内在温度 T 和波长 λ 处单位波长间隔中的辐射能密度. 常数 k 是玻耳兹曼常数，c 是光速.

从腔壁上的小孔发射的辐射强度与腔内的能量密度成正比，因此表达式(39a)是图35A所示关系的数学表达式.

为了求出在 T 不变时作为波长 λ 的函数的 $E(\lambda, T)$ 的极大值位置，我们使 $E(\lambda, T)$ 对 λ 的导数等于零，并解出 λ_{max}.

---

1) M. Planck, "Über das Gesetz der Energieverteilung in Normalspektrum", *Annalen der Physik* **4**, 553 (1901).

就是这样得到了关系式(38a)或者等价的关系式

$$\lambda_{max} \cdot T = C_0 = 0.2014 \times \frac{hc}{k} \tag{39b}$$

由于可以方便地测出 λ_{max} 和 T，而 c 是已知的，因此我们可以在关系式(39b)的基础上由实验决定 h/k. 而且，通过详细地比较实验上测得的 $E(\lambda, T)$ 和理论表达式(39a)，我们还能够决定常数 h. 这就可以计算玻耳兹曼常数 k 并最后利用关系式 $N_0 = R/k$ 计算 N_0. 普朗克用这种方法得到的 k 值比现代的最好数值大约小 2.5%.

40 普朗克辐射定律的详细历史是引人入胜的. 普朗克在成功地从"微观"观点导出表达式(39a)之前，实际上已经猜出了 $E(\lambda, T)$ 对 λ 和 T 的正确的依赖关系. 这个猜测部分基于 H. 鲁宾和 F. 克尔包姆的一些仔细的测量，部分基于某些一般的理论上的考虑. [由(39a)表示的关系显然是太复杂了以致于不能在纯经验的基础上得到.] 普朗克在1900年10月19日向德国物理学会提出了他的初步结果. 在这个版本中，他的公式具有两个没有任何物理说明的常数，譬如说，我们现在应将它们写成 $(8\pi hc)$ 和 (hc/k) 的二个常数. 鲁宾以及 O. 鲁麦和 E. 普林赛姆再次将这个公式与实验结果核对，发现它以惊人的准确性与实验事实符合[1]. 因此普朗克面对的是寻找一个显然是正确的公式的某种基本的理论证明. 在紧张地工作了大约八周以后，他成功地完成了这项工作.

五、光 电 效 应

41 大约在上世纪末本世纪初，实验上已经知道当光(可见光

1) 关于后来对普朗克定律的检验参看 H. Rubens and G. Michel "Prüfung der Planckschen Strahlungsformel" *Physikalische Zeitschrift* **22**, 569 (1921).

或紫外波段的光)入射到金属表面上时，将有电子从表面逸出[1). 这个现象本身是没有什么可惊奇的，因为我们知道光是电磁辐射，因此可以预期光波中的电场将对金属表面内的电子施加一个力，造成某些电子从表面逸出. 然而，使人惊奇的是发现逸出电子的动能与光的*强度*无关，但却以非常简单的方式依赖于*频率*：即随频率线性增加. 如果我们增大光的强度，我们只是增加单位时间内发射的电子数而不是增加它们的能量. 这在经典的基础上是非常难以理解的；因为我们会预期当光波的强度增加因而光波中电场的振幅增加时应该会使电子加速到较高的速度.

在1905年以前P.李纳和其他人已确立了这些实验事实. 直到1916年密立根非常仔细地研究这个课题之前，对于光的频率和逸出电子能量间的关系一直没有精确的测量.

42 1905年A.爱因斯坦提出了关于这些现象的一个解释[2). 按照这个解释一束单色光中的能量是成包到来的，每包大小为 $h\nu$，这里的 ν 是频率；这个能量量子能够全部传递给一个电子. 换句话说，当电子仍在金属里边时，它就获得了能量 $E=h\nu$. 现在如果我们假定为了将电子从金属中移出必须作一定数量的功 W，则电子将以动能 $E_{\text{kin}}=E-W$ 即

$$E_{\text{kin}}=h\nu-W \tag{42a}$$

从金属中逸出.

W 通称为材料*功函数*，假定它是代表金属特性而与频率 ν 无关的一个常数.

等式(42a)就是爱因斯坦的光电方程. 发射出来电子的

1) 参阅 PSSC. *Physics*, Chap. 33.

2) A. Einstein, "Über einen die Erzeugung und Verwandlung des Lichtes betreffenden heuristischen Gesichtspunkt" *Annalen der Physik* **17**, 132 (1905).

能量随频率线性增加，但与光的强度无关．发射的电子数目自然与入射的量子数成正比，因而也与入射光的强度成正比．用这个方法爱因斯坦能够说明他当时知道的光电效应的某些定性特征．

43 爱因斯坦得到这个概念，是由于注意到：如果假定腔中的电磁辐射有粒子性，即假定辐射能由大小为 $h\nu$ 的量子组成，就能理解普朗克的奇怪的黑体辐射定律的某些方面．这里我们应该看到在当时普朗克的假设的真正涵义还是模糊不清的，因此爱因斯坦观察黑体辐射现象的新方式是前进了重要的一步．然而，这件事的最重要的方面是爱因斯坦能够将他对黑体辐射现象的深入理解应用于一个新的物理情况，即光电效应．

44 方程(42a)是一个正确的理论预测，是容许作定量实验检验的方程．而且，假定爱因斯坦的概念是正确，方程(42a)还使我们可能对普朗克常数作新的测量． 如前所述，R. A. 密立根用许多非常仔细和漂亮的测量研究了这些极其重要的方程[1]，在这些测量中他发现与爱因斯坦的方程(42a)完全符合．

图 44*A* 中示意地说明了密立根的方法．单色光入射到金属(通常是碱金属)表面引起光电子逸出．在接近光敏表面处安置一个收集极，我们能使收集极相对光阴极有任意的电势差 $-V$，然后测量光电子电流． 现在如果我们假定电子如方程(42a)给出的那样全部以同样的动能 E_{kin} 发射出来，则当 $eV > E_{\text{kin}}$ 时，显然没有一个电子能够到达收集极．所以，我们能够观察电流随减速电势 V 变化的情况． 如果 V_0 是电流恰为零时的电势，我们有

---

1) R. A. Millikan, "A Direct Photoelectric Determination of Planck's 'h'", *The Physical Review* **7**, 355 (1916).

$$V_0 = \left(\frac{h}{e}\right)\nu - \frac{W}{e} \qquad (44a)$$

因此截止减速电势 V_0 对频率 ν 的图线将是一条直线，如从密立根的论文中取来的图 (44B) 所示．由这条直线的斜率可以求出常数 h/e，由直线与 V_0 轴的截距可以求出材料的常数 W/e。

这是一个在概念上简单明了的实验，但需要相当小心才能得到精确的和可以重复的结果．

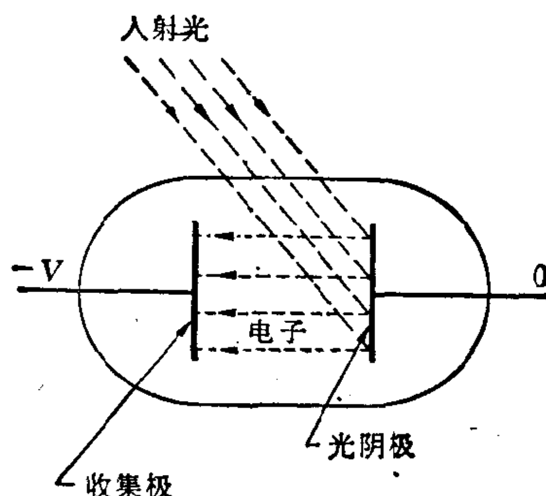


图 44A 说明密立根实验原理的很概略的图．当频率为 ν 的光入射到光阴极上时，电子以能量 $E_{kin} = h\nu - W$ 射出，这里 W 是表示阴极材料特性的功函数．当减速电势 $V > (h\nu - W)/e$ 时，到收集极的电子电流就停止．观察临界减速电势 $V_0 = (h\nu - W)/e$ 随 ν 的变化得出常数 h/e(见图 44B)．

45 让我们从数量上考察一下关系式 (44a)．用 $h = 6.63\times10^{-27}$ 尔格·秒 $= 6.63\times10^{-34}$ 焦耳·秒，和 $e = 1.60\times10^{-19}$ 库伦，我们得到 $h/e = 4.14\times10^{-15}$ 伏·秒．对于可见光，波长在 4000 埃到 7000 埃的范围内，这里 1 埃(Angström) $= 10^{-8}$ 厘米．与此对应的频率范围为 $(4.3$ 到 $7.5)\times10^{-14}$ 秒$^{-1}$．蓝色光对应的频率约 7×10^{14} 秒$^{-1}$，在这种情况下，我们得到 $(h/e)\nu \sim 2.8$ 伏特．因此对在可见光或近紫外波段的光，减速电势

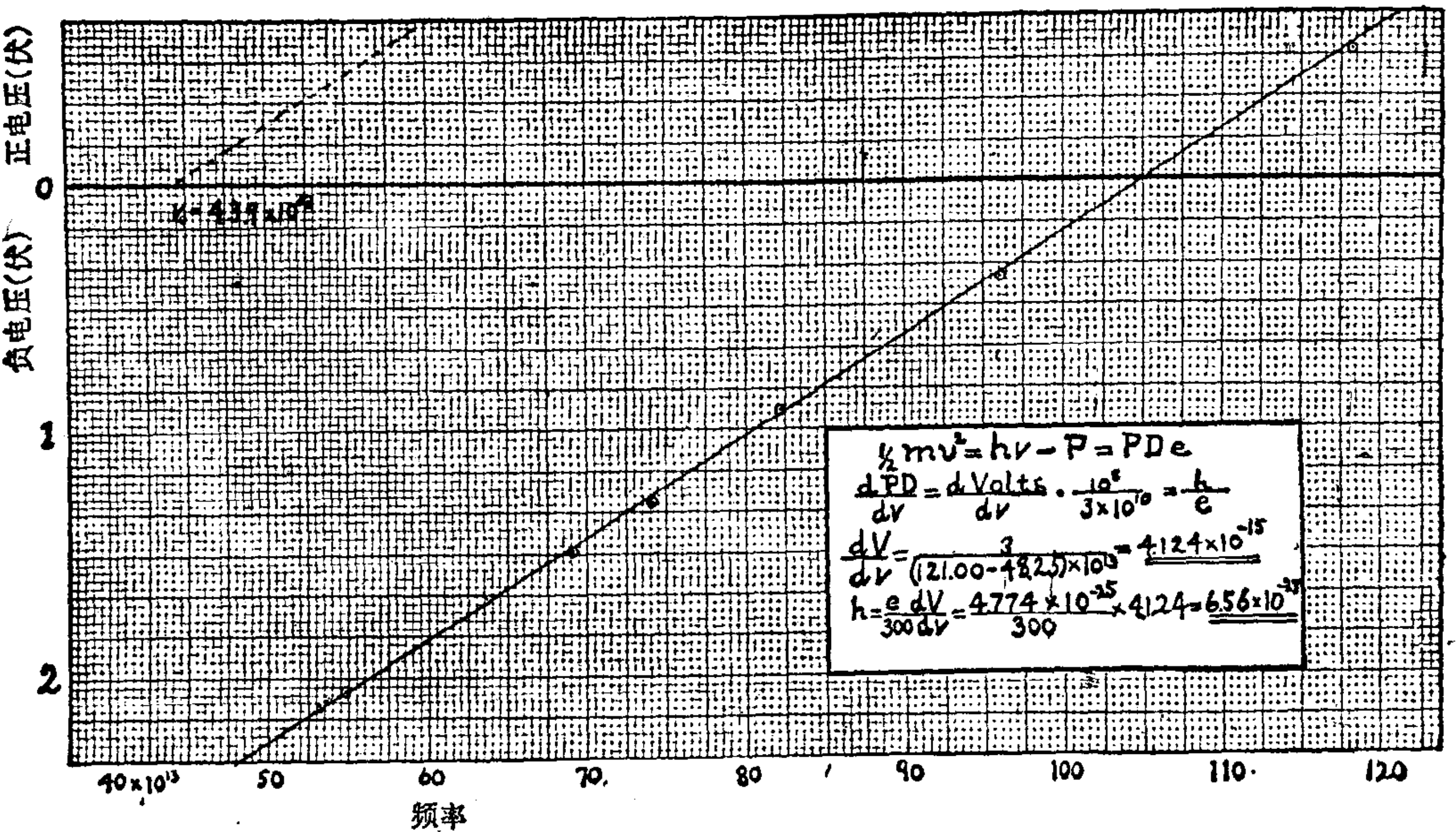


图 44*B* 从密立根论文[R. A. Millikan, *Phys. Rev.* **7**, 355 (1916)]中取来的一张说明对于钠的光敏表面，临界减速电势 V_0 和光的频率成线性关系的图．如我们所看到的，根据他的图上的曲线，密立根提出了他对普朗克常数的计算．

将是 1 伏特的数量级. 实验表明典型的材料常数 W/e 也是这个数量级. 对碱金属这个常数特别小, 这就是为什么用于可见光的光电池的光阴极是由这种材料制成的. 光电池显然不能响应 $W>h\nu$ 的辐射.

46 在 1905 年以前已经发现的光电发射的定性特性的确是惊人的, 然而, 要完全认识这些现象的重要意义, 就要求有爱因斯坦的洞察能力. 如果当时能够有密立根的这些定量结果, 一定会更普遍地被承认为是对经典概念的一个主要挑战.

事情的核心显然是这个奇怪的关系式

$$E/\nu = X_2 \tag{46a}$$

这里 E 是一束频率为 ν 的单色光可以传输给一个电子的能量, 而 X_2 是一个与光强、光的频率以及电子所在的材料都无关的常数. (发射出的电子的动能小于 E, 在 1905 年也不认为是神秘的事, 今天我们的看法也一样: 功函数 W 仅是代表了材料中电子的束缚能.) 要在经典的基础上理解诸如 (46a) 那样的关系式, 以及把这种理解表示成用经典物理学的一些基本常数来给出神秘常数 X_2 的公式是一件完全没有希望的事. 常数 X_2 的物理量纲是作用量, 的确这样一个量是能由基本常数所组成, 那就是 $e^2/c \cong h/860$. 现在我们知道 $X_2 = h$, 因此量 e^2/c 在数量级上是错误的, 大约要小 1000 倍, 没有什么希望. 然而, 按这种方式要弄量纲来论证实在不会使我们有任何出路, 除非我们能提出一个可以导出等式 (46a) 的经典机构. 没有人曾经做到这一点, 而与光电效应有关的事实却非常有力地支持爱因斯坦的思想, 即辐射能量是量子化[1]的.

1) 这里可以说一下, 爱因斯坦在他的论文中对电磁量子没有使用光子这个名词. 这个名词是很久以后才引入的.

我们以后将知道关系式 (46a) 表达了量子物理学的一个非常基本的原理，即能量和频率由 $E=h\nu$ 普遍地联系在一起. 这样一个关系对于经典物理学是完全不相容的，而(46a)中的神秘常数 $X_2(=h)$ 正是那时尚未察觉到的自然奥密的一种表现.

六、原子的大小和稳定性问题

47 现在让我们转向我们的第三个问题，即原子的稳定性和大小问题，并且特别考虑后一个问题. 我们可以将一个原子的"大小"定义为在晶体或液体中相邻原子间的典型距离. 实验上已知其大小是1 埃 $=10^{-8}$ 厘米的数量级. 这个距离的数量级与阿佛加德罗常数 N_0 的数量级有如下的关系. 一立方厘米的任何液体或固体大致有一克质量. 任何一克物质大致含有 N_0 个原子，因此固体或液体中相邻原子间的间隔必定是 $(1/N_0)^{1/3}$ 厘米 ~ 1 埃的数量级. 如前所述，对晶体中原子间距的正确测量可以导出阿佛加德罗常数的数值.

现在的问题是我们能否在经典物理学的框架内说明原子的大小: 我们能否由已知的经典物理学的基本常数算出原子的半径.

48 在卢塞福约于 1910 年对 H. 盖革和 E. 马尔斯登的 α 粒子散射实验作了有名的分析之后[1]，出现了关于原子的某种图象，按照这种图象原子有一个非常小的中心核，周围环绕着一个或许多个电子. 有充分理由相信同原子的大小相比，核

1) E. Rutherford, "The Scattering of α and β Particles by Matter and the Structure of the Atom", *Philosophical Magazine* **21**, 669 (1911). 也可看 Berkeley Physics Course, Vol. 1, *Mechanics*, Chap. 15 和 PSSC *Physics*, Chap. 32.

与电子都是非常小的，譬如说，至少小于10^{-11}厘米．而且，原子的大部分质量看来都集中在核内．

在这些情况下，非常自然的是尝试建立原子的某种太阳系模型，把核看作太阳，把电子看作行星．这些粒子将在它们相互间的静电作用下运动，而原子的大部分则由“空的空间”组成．原子的大小指的就是最外层电子轨道的半径．

为了论证起见让我们暂时接受这个模型，同时开始时还假定粒子的速度足够小，容许在非相对论力学的范围内讨论．现在我们必须回答这个问题：是什么决定了最外层电子轨道的大小？我们注意到在这个模型里没有光速的地位．但这样就不能由我们剩下的基本的经典常数 e, m 和 M_H 组成物理量纲为长度的量，我们可以怀疑我们的问题在经典力学的范围内是不可解的．为了非常清楚地看到这一点可以论证如下：

49 考虑一个由 Z 个电子组成的原子，每个电子带电荷 $-e$，而核带电荷 $+Ze$．在不失去一般性的情况下，我们可以假定这些粒子以这样一种方式运动使这一体系的质心保持静止．这样，每个粒子将沿着由给出第 k 个粒子的位置矢量随时间变化的函数 $\mathbf{r}_k(t)$ 所规定的某些轨道运动．(我们取体系的质心为原点.)

因此函数 $\mathbf{r}_k(t)$, $(k=1, 2, \cdots, Z+1)$ 合在一起构成了这一体系的运动方程的一个解．由这一个解，我们能够通过下面简单的按比例缩减构成整个一族新的解．如果 q 是任意的非零常数，则由

$$\mathbf{r}_{k'}(t)=q^2\mathbf{r}_k(t/q^3) \tag{49a}$$

定义的函数 $\mathbf{r}_{k'}(t)$ 也满足运动方程．换句话说，函数 $\mathbf{r}_{k'}(t)$ 描述了这体系在新的运动状态中第 k 个粒子的轨迹．由下面的分析中，我们可以非常容易地看出这一点．第 j 个粒子作用

在第 i 个粒子上的力 $\mathbf{F}_{ij}$ 由

$$\mathbf{F}_{ij}=Q_iQ_j\frac{(\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_j)}{|\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_j|^3} \tag{49b}$$

给出，这里 Q_i 是第 i 个粒子的电荷，而 Q_j 是第 j 个粒子的电荷. 以 q^2 因子乘所有的距离可由老的解得到新的解，这就是说，老的运动状态中的力乘以 q^{-4} 因子可得新的运动状态中的力. 这也就是所有的加速度必须以同样的 q^{-4} 因子按比例缩减. 由于直线距离以 q^2 因子缩减，我们断言所有的速度一定要以 q^{-1} 因子缩减，而所有时间必须以 q^3 因子缩减. 这正好是等式(49a)所表达的，因此正如所说的那样，这个等式定义了一个新的解.

让我们进一步注意所有的角动量都是以因子 q 缩减的，而所有的势能和动能以及由此而来的总能量都是以因子 q^{-2} 而缩减.

我们能由一个给定的解通过上面描述的那种缩减得出一个新的解事实上是开普勒第三定律的推广. 应用到单电子绕固定核运动的特殊情况，我们的论证告诉我们对两个具有同样偏心率的椭圆轨道，两个周期的比的平方正比于两个半长轴的比的立方.

由于我们可以给 q 以任何我们想给的数值，我们实际上有整个一族解. 我们毫无理由为什么要特别选定它们中的任何一个特殊的解；换句话说，没有一个原理告诉我们为什么要特别选定原子的某一个特殊的“大小”. 当然，人们可以辨解说一个原子的实际大小是由“偶然性”决定的，但这样一个论证很难站得住脚. 对于给定的一种原子，这个“偶然性”怎么可能总是导致同样大小的轨道呢？对于(譬如说)氢原子为什么没有连续分布的大小呢？

50 鉴于这种困境，我们也许怀疑试图非相对论地讨论问题

是否合理．我们看到如果将光速包括进去确实有可能用一些经典常数组成具有长度量纲的表达式，即

$$\frac{e^2}{mc^2}=2.8\times10^{-13}\text{ 厘米} \tag{50a}$$

这基本上是我们在第18节讨论的“电子的经典半径”．因此，我们应该预期如果相对论真的起了重要作用，即如果电子运动速度与光速可以相比拟，则原子的大小将是 $\frac{e^2}{mc^2}$ 长度的若干倍．然而这个长度比原子小 10^4 倍，这种途径似乎不可能有什么出路．的确在这样的相对论模型中不能应用前一节里简单的缩减论证，而且仍然没有一个原理可以告诉我们为什么只能出现某一个轨道，对应于观察到的原子大小．

51 我们可以认为这个困境是“下落不明的常数的秘密”．现在，假设我们敢于假定现在的秘密与我们以前的“下落不明的常数的秘密”有关，而普朗克常数应该在描述原子的结构中起作用．这个常数具有角动量的量纲，我们可以试用某个特别的假定，即假定只有那些原子总的角动量是 h 的确定倍数的运动方程的解才是在自然界可以实现的．如果接受这个原则，我们必须放弃按比例缩减的论证，因为在等式(49a)描述的变换下角动量将以因子 q 缩减，而现在这是不容许的．这意味着将存在一些特定的解，因此我们现在有了一个可以用来决定原子大小的原则了．

1913年N．玻尔循着这条线索提出了一个氢原子理论[1]．在这个理论的最简单的描述中，单电子沿半径为 a_0 的圆形轨道绕质子运动．轨道由运动方程

$$m\left(\frac{v^2}{a_0}\right)=\frac{e^2}{a_0^2} \tag{51a}$$

---

1) N. Bohr, "On the Constitution of Atoms and Moleculev," *Philosophical Magazine* **26**, 1, (1913).

以及玻尔的量子化条件

$$J=mva_0=\frac{h}{2\pi} \tag{51b}$$

一起决定；这里 v 是电子速度而 J 是角动量．因此量子化条件表明角动量等于 $\frac{h}{2\pi}$．如果我们在上述方程中消去 v，我们得到

$$a_0=\frac{h^2}{(2\pi)^2me^2}=0.53\times10^{-8}\text{厘米} \tag{51c}$$

这正是所希望的数量级．而且我们应该看到原子大小的问题与原子的结合能问题直接有关；一旦我们知道了原子的大小，也就能估计使原子破裂成它的基本组元时所需的功．

52 正如读者所无疑知道的那样，玻尔能够走得更远；他实际上能够定量地解释氢原子的光谱，是这个新概念的特别成功之处．他的量子化条件确实是与经典物理学不相容的，此外玻尔必须假定氢原子基态电子的运动不会导致发射电磁辐射；不然的话，按照经典的电磁理论，电子将螺旋形地向着核运动，而在非常短的时间内(10^{-9} 秒数量级)到达核的位置．

不要认真地对待这个原子的行星理论；它其实是相当错误的．它在氢原子的特殊情况下如此成功是个幸运的(或是不幸的)偶然事件．所以是幸运，是因为它鼓舞了玻尔和其他一些人去尝试建立原子的量子理论，但如果它导致人们相信原子无论在哪一方面都象一个行星系，那就不幸了．玻尔本人并没有受骗；他认为他自己的理论只是在探求更加前后一致的理论中的一个中间步骤，这样的理论现在已经有了．

53 我们已经考虑过的三个问题可以被当作是发现普朗克常数的三个方面．如果特别考虑最后一个问题，我们看到将这个常数加入到我们的自然界基本常数表中将有一些深远的后果．现在我们可以希望能理解不仅原子的大小和结合能，而

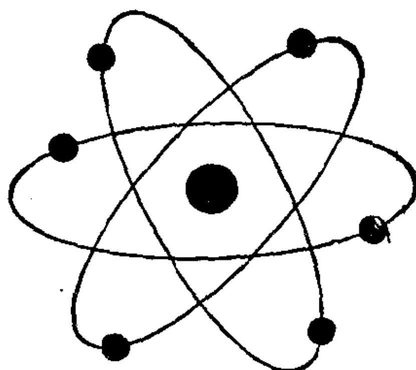


图 5.4　原子时代的标记，它与原子的结构丝毫无关．这个概貌图广泛地作为与"原子"有关的公司、政府机构，以及其他组织的标记出现．有时候在广告上可以看到非常异想天开的形式，在那里电子的巨大速度表示成看起来象是一股蒸汽(大概是漂在以太中的蒸汽?)．

只要将这个图案理解为仅仅是一个标记是没有什么害处的，但常常有这样的危险，即某些人可能误认为原子真的就是这种样子．

且还能理解分子的大小和结合能，对于大块物质的定量原子理论，这条道路似乎也是敞开的．

应该强调的是三个问题的基本方面当然是，要解决这些困难就要求背离物理学的经典宏观定律．*所以考虑这些问题得到了比发现一个新的常数更多的东西；即导致发现新的物理学定律．*

在这些最初的发现之后，物理学的发展是非常迅速的，而且日益明显的是已经找到了解释许多微观物理现象的关键．随着量子物理学的两个相互一致的数学理论的发表，即 1925 年 W. 海森伯创立的矩阵力学和 1926 年 E. 薛定谔创立的波动力学，理论工作大大前进了．后来证明这两个理论是完全等价的，又仅是我们今天称为量子力学的两个不同的形式，它是目前公认的基本理论，是研究微观物理学的基础．

54　读者可能想问一些问题．我们确信量子力学是终极真理吗？物理学里还有什么要留待我们去发现的呢？

作者乐于能在这些问题上再次对读者保证，我们永远不

可能知道任何理论是否是"终极真理". 我们任何时候也不可能知道"还有什么东西留待我们去发现"; 非常可能就是这样, 因为如前所述, 现在可以非常肯定地说还没有一个关于自然界发生的所有现象的全面理论. 我们已经了解到一些东西, 但还有更多的东西要去了解, 这就是为什么物理学是有意义的原因之一. 读者无需担心生得太晚以致于不能在物理学中有所发现.

让我们尝试更准确一些地回答这些问题. 量子力学的一般原理是正确的, 其意义是不存在反对它的实验证据, 并且有非常大量的证据说明我们能够用它来作出许多成功的预测.

在量子电动力学的领域中支持它的论据特别使人信服. 量子电动力学是关于原子、分子、电磁辐射和诸如我们在地球上所了解的大块物质的基本理论. 如前所述, 在这个领域内从未有过基本的经典物理学理论, 现在我们有了一个理论, 一个非常成功的理论. 这就是说我们相信现在知道了基本原理, 我们应当能够用它来解释诸如超导和超流等现象. 然而, 迄今还没有人真正能从基本原理出发以定量的方式解释这两个现象. 知道基本原理是一回事, 而解释一个包含有许多粒子的复杂现象完全是另一回事. 由于我们能够解释由比较少量的粒子组成的简单体系的行为, (诸如单个原子和简单分子)我们相信我们的基本原理. 然而, 我们在数学上是相当幼稚的, 随着情况的复杂性不断增加, 我们发现越来越难于作出定量的预测, 尽管我们对现象可以有一个一般的定性了解. 可以有把握地预言在物理学里将总是有这种意义上的困难问题存在, 同时也总是为克服这些困难的聪明想法留有余地. 有可能, 从基本的观点来看, 量子电动力学是一个几乎"完整"课题; 但如果把完整理解为理论已经引出所有可能的结果, 那

么，它又确实还是不完整的．

55 从上世纪末本世纪初物理学的观点来看，“稳定和不可分”的原子是全部基本粒子．今天原子已失去了这个卓越地位；通过量子电动力学已由更基本的东西说明了它们．在某种意义上，对于核也同样如此．在后一种情况里我们还不能完全从基本原理解释核的性质，但我们仍然坚信将核看成基本上由质子和中子组成的复合体系是合适的．

在搞清楚原子和核的复合性质后，公认的基本粒子的数目就急剧下降了．这个数目后来又稳步地上升，现在公认的基本粒子的数目与上世纪末本世纪初公认的基本粒子(即原子)的数目差不多．电子、μ介子、中微子、质子、中子、超子、π介子、K介子以及许多其他的粒子已取代了原子的地位．我们已解释过它们在什么意义上是基本的．

目前不存在有关基本粒子的一个基本理论．未来可能的理论采取何种形式仍是任何人都可猜测的问题．这个领域中，光辉的思想有广阔的天地．

问　　题

1．(a) 首先考虑，然后非常简短地描述，曾用来确定原子量和分子量的推理方法和各种测量．

(b) 1815年威廉普劳特(William Prout)提出所有元素可能是氢的组合物，因此氢可能是组成其余各种东西的原始材料．什么原因可能使他得出这样一个假设，而在十九世纪，人们又为什么拒绝了他的建议？

2．许多原子(或者更确切地说是原子核)通常通过发射一个电子或一个α粒子(它不是别的，就是一个氦的核)而自发地蜕变．这就是亨利·贝克勒耳在1896年首次发现的放射性现象．[H. Becquerel “Sur les radiations invisibles émises par les corps phosphorescents” *Comptes Rendus* **122**, 501 (1896)] 蜕变速度受统计规律支配，它预言在时刻t

时，在最初存在的 N_t 个原子中将残留下 $N(t)=N_t\exp(-\lambda t)$ 个. 描述蜕变速度的常数 λ 是原子（核）的特性. 原先存在的原子衰减掉一半所需要的时间称为半衰期. 显然，$T=(1/\lambda)\ln 2$.

(a) 试证明如果我们假定每个原子的蜕变与其他原子无关，同时还假定直到时刻 t 时还残留着的一个原子在时间间隔 $(t, t+\Delta t)$ 中蜕变的几率与 t 无关，则可得出上面的蜕变定律.

(b) 镭原子蜕变时发射一个 α 粒子，如果这个 α 粒子打到一块硫化锌屏板上，闪光（称为闪烁）将标出碰撞点. 因此，有可能直接数出一克镭每秒钟发射的 α 粒子数. 黑斯和拿森测定出这个数为 3.72×10^{10}. 镭的原子量是 226. 用这些数据求出镭的半衰期.（人们已用对放射性物质的测量独立地估计出阿佛加德罗常数. 在上述问题中我们把这个步骤反过来了，改为决定镭的半衰期.）

3. 手表的运动部分相当"小". 合理地估计表征一个"典型"手表的物理参数的数值，然而在第 20 节给出的普遍判据的基础上说明量子力学和制表工艺毫不相干.

4. 根据前题的精神，考虑一个简单的电容量 100 微微法的电容和 0.1 毫亨的电感组成的电学上的集总参数电路. 电路振荡时电容器两端的最大电压是 1 毫伏. 试找出一个物理量纲为作用的"自然"物理量，并以普朗克常数 h 为单位计算这个量.

5. 广播天线以频率 1 兆周/秒，1 瓩/功率发射辐射（无线电波）. 每秒发射的相应的光子数是多少？这个数目的大小说明为什么在研究来自天线的辐射时，电磁辐射的量子特性并不直接显示出来.

这个例子和题 3、题 4 中的那些例子是荒唐的，其意义就是它们涉及到的一些有关数字是荒唐的. 在本书的其余部分对明显的宏观问题我们将不再用量子力学. 然而，如果仅仅是为了懂得它们是荒唐的而做一次这种性质的问题可能还是有教益的.

6. 为了了解电磁辐射是以成包的能量 $E=h\nu$ 的形式到来（这里 ν 是频率）的说法并不违反常识（即不违反你对宏观现象的经验），计算强度为 1 烛光的光源每秒发射的光子数. 为简单起见，我们假定发射的光是黄色的，波长是 5600 埃. 强度为 1 烛光的光源发射光能的速率是 0.01 瓦.

假定一个观察者注视100米远处的一个强度为1烛光的各向同性光源．计算每秒进入他一只眼睛的光子数；假定眼睛的入射光瞳的直径为4毫米．由于光子的数目如此之大，即使眼睛接收到的光通量根据宏观的标准来看是很小的，我们也观察不到任何"闪烁"．

7．我们都知道星星要"眨眼"．为了搞清楚这是否可能体现了光的量子性，估计当某观察者注视一个表观可见强度为一级的星时，进入他眼睛的光子数．这样一个星在地球表面产生大约10^{-6}流明/米^{2}的光通量．在最大可见度的波长处(大约5560埃)一流明相当0.016瓦．一级表观可见强度为一级的星是相当明亮的星，虽然不属于最亮的星之列，但容易为肉眼所见．Aldebaran星就是一个例子．

假设每秒有N个光子进入观察者的眼睛．这个数目中的平均起伏有多大？在你决定了N后，判断什么是星星眨眼的可能解释．为什么行星好象很少闪烁，或者完全不闪烁？

8．(a) 考虑维恩位移定律，并假设我们有一个保持在2500°K温度的黑体辐射体．以埃为单位，计算维恩定律给出的发射为极大值时的波长．这个波长是否位于可见光区？

(b) 由普朗克公式(39a)推导维恩位移定律．

(c) 在普朗克辐射定律(39a)的基础上证明黑体辐射体发射辐射的总速率(即包括所有的频率)正比于温度T的四次方．

9．在我们按历史讨论黑体辐射定律时，我们说过普朗克在他的推导中曾假设频率为ν的谐振子的能量是成包的，每包大小为$h\nu$．(读者应该注意到在我们的历史概述中，并不曾企图说明普朗克是如何得到他的最后结果的．)有趣的是了解普朗克的假定和玻尔在推导氢原子的特征时所作的假定之间可能有什么联系．为此让我们考虑下列情况：一个质量为m、弹性常数为K的谐振子，按照普朗克的假设运动．这意味着振子的能量只能改变$h\nu$的整数倍，这里的ν是振子的频率．让我们引进作用变量$J=\pi q_0 p_0$，这里q_0是振动质点的最大位移，而p_0是最大动量．

第二章　量子物理学中物理量的量值

一、单位制和物理常数

1　本章的目的之一是使读者对量子物理学中各种物理量有一个数量级的了解．象电子电荷、电子质量、普朗克常数等许多重要物理量，当以常用的宏观单位制表示时，其数值都是不方便的，而且意义不明确，其原因是这些数值太小了．如普朗克常数 $h=6.6\times10^{-27}$ 尔格·秒，要想直接掌握其含义是困难的．因此，详细地研究这些常数在物理学中是怎么出现以及它所取数值的实际意义是很重要的[1]．

物理学的每个领域，对所涉及的物理量都有所谓的自然单位，自然单位是指当我们用它们来表示任何物理量时，它们的数值是合理的，其意义就是我们容易掌握这些数值的含义．这些数值的变化范围可以从 10^{-6} 到 10^{6} 而不会出现 10^{-27} 之类的数．我们熟悉的宏观单位(米·千克·秒制)特别适用于日常遇到的物理现象，它们是以容易得到的宏观标准为基础的．我们看到，它们是真正的"人类单位制"，象米·千克·秒这些单位能正确地指出人类的特征．所谓"科学的"单位制，即厘米·克·秒单位制更适用于象硬壳虫之类的小动物．我们的讨论将不限于人类单位制或硬壳虫单位制所取的标准，而是试图

1) 在本章中，有时我们先作出一些断言，以后将重新作详细讨论．本章中有些段落读者初次见面时会觉得难懂，但无需过多担心．随着本教程的深入，读者应当多次回到本章．很有可能，大多数读者对我们讨论的论题多少是熟悉的．

明确在量子物理学的各个领域中的自然单位.

2 我们先把一些物理常数列成一个表. 通常把这些常数叫做"微观物理学的基本常数". 但是, 实际上表2A中的各个量根本不基本, 因为它们的宏观标准是任意的, 而且是"偶然的". 当然, 这并不是说这张表不重要. 一旦我们选定了宏观标准, 很自然地就要把量子物理学的基本参数和这些标准联系起来, 这正是此表的目的.

表 2A 几个物理常数

普朗克常数

$h=2\pi\hbar=(6.62559\pm0.00015)\times10^{-27}$ 尔格·秒

$\hbar=h/2\pi=(1.05449\pm0.00003)\times10^{-27}$ 尔格·秒

光速

$c=(2.997925\pm0.000001)\times10^{10}$ 厘米/秒

电子电量

$e=(4.80298\pm0.00006)\times10^{-10}$ 静电单位

$=(1.60210\pm0.00002)\times10^{-19}$ 库仑

电子质量

$m=(9.10908\pm0.00018)\times10^{-28}$ 克

质子质量

$M_p=(1.67252\pm0.00003)\times10^{-24}$ 克

阿佛伽德罗常数

$N_0=(6.02252\pm0.00009)\times10^{23}$ (摩尔)$^{-1}$

玻耳兹曼常数

$K=(1.38054\pm0.00006)\times10^{-16}$ 尔格/K°

我们还给出了这些常数的估计误差, 以使读者知道这些量目前精确到什么程度. 按照本书的水平, 读者遇到的计算所要求的精确程度几乎不会比计算尺所能得到的精度更高; 用计算尺做一次乘除计算的精度约为0.2%. 读者还应学会作简单的估计计算, 估算的精确度要求不一, 高者需达10%, 低者只要作数量级的估计. 在本书附录中, 表A列出了一些

物理常数的精确值. 同时从其中挑选了一些重要的列为表 F,只列粗略数值,希望读者熟记.

3 关于阿佛伽德罗常数的定义,必须加以讨论. 过去化学家在确定原子量时采用的定标法是把天然存在的氧的原子量规定为正好等于16. 这样, 以氢为例, 它的原子量就可按下面的方法来确定

$$(\text{氢原子量}) = 16 \times \frac{(\text{氢“原子”质量})}{(\text{氧“原子”质量})} \tag{3a}$$

在“原子”这个词上加上引号, 是因为“原子”量总是指天然存在的元素. 由方程(3a)定义的原子量是要经化学家仔细称量来确定的; 例如化学家要量出与天然存在的16克氧组合成水而无剩余的氢的克数, 将其结果除2就得出氢的原子量.

由化学家这样定出的原子量称为*化学定标原子量*. 有许多元素的原子量接近整数,但也有明显例外,例如氯的原子量就是35.5.

4 正如读者所知,原子的质量主要是集中在原子核上. 原子核由质子和中子组成. 质子数与中子数之和称为原子核的*质量数*. 这个整数一般用 A 表示. 质子数称为原子核的*原子序数*. 用 Z 表示,因而原子核所带电量即为 eZ, 这里 e 是基本电荷. 原子的化学性质几乎完全由原子核的电荷决定,因此, Z 是*化学元素*的一个特征量. 已经发现了很多电荷数相同但质量数不同的原子核族, 这些同族的不同原子核叫做元素的不同*同位素*. 同位素之间的差别是中子数不同. 质子的质量差不多与中子的质量相等, 所有原子核质量非常接近地正比于质量数 A (它是整数). 存在着有明显的非整数原子量的解释是自然界中许多化学元素是两种或两种以上不同同位素的混合物, 在这种情况下, 化学家测出的元素的“原

表 3A 最轻元素的原子量(原子质量)[1]

元素	Z	原子量	元素	Z	原子量
H	1	1.00797	Ne	10	20.183
He	2	4.0026	Na	11	22.9898
Li	3	6.939	Mg	12	24.312
Be	4	9.0122	Al	13	26.9815
B	5	10.811	Si	14	28.086
C	6	12.01115	P	15	30.9738
N	7	14.0067	S	16	32.064
O	8	15.9994	Cl	17	35.453
F	9	18.9984	A	18	39.948

1) 在附录中表 C 列出了所有元素.

子量”是不同同位素的更基本的原子量的平均值[1]. 实验证明，在一种元素的各种同位素混合物中各种同位素的相对丰度在整个地球表面上差不多都相同. 而且，不同同位素就其所有实际效果而言都有完全相同的化学性质，因此几乎不能用“化学”方法把它们分开. 否则，化学家的原子量表就毫无价值了.

5 化学家在写化学反应方程式时，采用了 H (氢)、Li (锂)、Fe (铁) 等符号来表示天然存在的化学元素，这些元素可能是几种同位素的混合物，也可能不是. 但是在核物理学家看来，质量数 16 和质量数 18 的氧的同位素是两种完全不相同的客体，在写核反应方程式时必须把它们区别开来. 为此就在元素符号上加上角标和下角标，因此，通常用下式表示同位素

$$_Z(\text{化学元素符号})^A \quad \text{或} \quad (\text{化学元素符号})^A$$

天然存在的氧是三种稳定同位素 O^{16}, O^{17} 和 O^{18} 的混合

1) 一个化学元素可以由不同的同位素组成，这个理论是 J. J. 汤姆逊肯定地提出的. [见 J. J. Thomson, “Rays of Positive Electricity”, *Proceedings of the Royal Society* (London, Series A) **89**, 1(1913)].

表 4A　自然界中几种轻元素的同位素

元　素	Z	同位素 A	原子质量	自然丰度(%)
H	1	1	1.007825	99.985
		2	2.01410	0.015
He	2	3	3.01603	0.00013
		4	4.00260	100
Li	3	6	6.01513	7.42
		7	7.01601	92.58
Be	4	9	9.01219	100
B	5	10	10.01294	19.6
		11	11.00931	80.4
C	6	12	12.000000	98.89
		13	13.00335	1.11
N	7	14	14.00307	99.63
		15	15.00011	0.37
O	8	16	15.99491	99.759
		17	16.99914	0.037
		18	17.99916	0.204
F	9	19	18.99840	100
S	16	32	31.97207	95.0
		33	32.97146	0.76
		34	33.96786	4.22
		36	35.96709	0.014
Cl	17	35	34.96885	75.53
		37	36.96590	24.47

物，其中 O^{16} 的相对丰度是 99.759%，是决定性的组成部分．

6　物理学家和化学家最近已商定了一个以碳的同位素 C^{12} 的质量为基础的新的原子量标准．把这种碳同位素原子（不是原子核）的质量规定为正好是 12 个原子质量单位（简写成 12amu）我们将采用这个规定，它引进了原子质量的新标度．即

$$1\text{ 原子质量单位}=\frac{1}{12}(\text{一个 }C^{12}\text{ 原子的质量})$$

$$=(1.66043\pm0.00002)\times10^{-24}\text{ 克} \qquad (6a)$$

在 12 克纯同位素 C^{12} 中包含的原子数目就是阿佛伽德罗常数 N_0 的定义. 这个数已引在表 2A 中.

按照新的标度，天然存在的氧的原子量为 15.9994. 按旧的化学标度氧的原子量是 16, 这两个数字非常接近. 因此，在绝大多数实际应用中两者的差别可忽略不计.

7 阿佛伽德罗常数 N_0 是联系微观物理学和宏观物理学的纽带. 让我们列举几个包含有 N_0 的重要物理量，这些量说明了这种联系.

(i) 质子的质量是 1.0073 原子质量单位，中性氢原子(同位素 H^1)的质量是 1.0078 原子质量单位. 因此，阿佛伽德罗常数 N_0 和质子质量 M_p 的乘积

$$N_0M_p=1.0073\text{ 克} \qquad (7a)$$

非常接近于 1 克. 所以在粗略计算中我们取

$$(\text{质子的质量})\cong(\text{氢原子的质量})\cong\frac{1}{N_0}\text{ 克} \qquad (7b)$$

(ii) 由于玻耳兹曼常数是每个分子的气体常数，所以 N_0 和玻耳兹曼常数 k 的乘积就是普适气体常数 R,

$$N_0k=R=8.314\times10^7\text{ 尔格}(°K)^{-1}(\text{摩尔})^{-1}$$
$$=1.986\text{ 卡}(°K)^{-1}(\text{摩尔})^{-1} \qquad (7c)$$

(iii) N_0 与电子电量 e 的乘积就是法拉第常数 F,

$$N_0e=F=96,487\text{ 库仑/摩尔} \qquad (7d)$$

这个常数表示一摩尔带单个电量的离子所带的总电量.

8 下面讨论普朗克常数，如表 2A 所示，它有两种表示形式 h 和 $\hbar$. (符号 $\hbar$ 读着"h 一划".) 这两个常数都叫"普朗克常数"，而且都是常用的. 虽然可能有人不严谨地说 $\hbar$ 更好，说

它是个“比较好”的常数．这两个常数都被采用的原因是写出带一划的 $\hbar$ 要比写出因子 2π 容易，否则在很多公式中都要出现 2π；也就是说，这与频率具有两种表示形式的道理一样．

频率是表示一种周期性变化的现象在单位时间间隔内重复出现的次数，即周数/单位时间，本书中用字母 ν 来表示．我们用 ω 表示角速度，单位用弧度/单位时间，或简单地写成1/单位时间．角速度 ω 与频率 ν 之间的对应关系为

$$\omega=2\pi\nu \tag{8a}$$

由此得出

$$\hbar\omega=h\nu \tag{8b}$$

这两个表示式都给出了频率为 ν 的光子的能量．请注意，量 ω 通常也称为“频率”，或叫角频率，由关系式(8a)可以理解这一点．

对于波长也有一个相对应的记号．真正的波长是周期性变化的现象于一个周期内在空间走过的距离，用字母 λ 表示．与波长 λ 相关联的量是 $\lambda\!\!\!^{-}$.

$$\lambda\!\!\!^{-}=\frac{\lambda}{2\pi} \tag{8c}$$

对于以相速度 c 传播的单色波来说有如下关系

$$\lambda\nu=\lambda\!\!\!^{-}\omega=c \tag{8d}$$

读者应仔细学会这些普遍采用的规定．

9 一个波的波长常用它的倒数 $\tilde{\nu}=\frac{1}{\lambda}$ 来表示，这叫波数．这种表示法在光谱学中有广泛应用．波数的单位是厘米$^{-1}$．真空中光波的波数为

$$\tilde{\nu}=\frac{1}{\lambda}=\frac{\nu}{c} \tag{9a}$$

这里 ν 是频率．波数与频率成正比，但不应和频率相混淆．应注意，在光学区域中波长和波数可以测得非常精确，比对光

速的测量精确得多．因此，在光学区域中对波数的了解要比对相应的频率了解得更清楚．但另一方面，在微波区域中频率能测量得很精确，因而在此区域中对频率的了解要比对相应的波数或波长的了解好得多．

10 在第一章中我们提到过一些测量基本常数的方法，这些是历史上最先用的测量方法．但是目前的基本常数的最佳数值并非是通过这些概念清楚而又简单的测量方法获得的，我们提到这些直接的测量方法仅是为了清楚地说明这些常数并非不可认识．最佳数值是从对一些导出量的多次测量中得出来的．这里说的导出量是指包含有这些常数(也有其他常数)以不同方式组合起来的表达式,而且可以相信,对这些导出量在理论上我们已有了很好的理解．从这些导出量我们能算出这些基本常数．由于测得的导出量的数目实际上多于这些基本常数的数目,所以方程式是超定的;这种情况对于我们测定这些常数时已经考虑到的全部测出量的内在一致性，提供了一些有价值的检验．

二、能　　量

11 现在我们来讨论在微观物理学中用以表示能量的单位．一个最常用的能量单位是电子伏特，简称电子伏．其定义是电量为 e 的基本电荷在通过一伏特电压降时所得到的能量．代入表 2A 中给出的 e 的数值，我们就能把电子伏特化成尔格：

$$1\ \text{电子伏}=(1.60210\pm0.00002)\times10^{-12}\ \text{尔格} \tag{11a}$$

除了电子伏特外,还有如下的导出单位

$$1\ \text{千电子伏}=1000\ \text{电子伏},\ 1\ \text{兆电子伏}=10^{6}\ \text{电子伏}$$

$$1\ \text{千兆电子伏}=10^{3}\ \text{兆电子伏}=10^{9}\ \text{电子伏} \tag{11b}$$

由于原子的结合能为1电子伏的数量级，所以电子伏特这个单位特别适用于原子物理；因为原子核的结合能是兆电子伏的数量级，所以在核物理中常用单位兆电子伏．在讨论基本粒子的能量很高的相互作用时要用到千兆电子伏这个大单位。

12 在第一章中，我们讨论过常数 c 和 $\hbar$ 的基本作用．在相对论量子物理学中常采用一种单位制取 $\hbar=1$, $c=1$, 就是说，常数 $\hbar$ 和 c 都是无量纲的，大小等于1的量．这是因为这两个常数在这个领域中是最基本的．读者可能会感到这一定义违背了物理量纲的概念．但是应该懂得，我们对于各种物理量指定其量纲都是任意的，纯属习惯问题．严格地说只有可以直接进行比较，即可以直接彼此相互量度的那些物理量才有相同的量纲，所有其他物理量的量纲都是按照最基本的物理量之间的某些关系规定出来的．由于光速的基本性，我们如果愿意，当然可以通过关系式 $x=ct$ 把距离 x 和时间 t 联系起来．因此，可以用相同的单位来测量距离和时间．实际上天文学家正是这样做的，他们用光年作为测量距离的单位．

由 $\hbar=c=1$ 可以导出一组清楚简单而又漂亮的公式，有时我们将要利用这种可能性．作者本来很想在本书中一致采用这一公式 $\hbar=c=1$, 这的确会是正确的做法．但另一方面，采取这一步骤可能会使读者在阅读其他量子物理入门的书籍时产生不必要的困难，因为几乎所有这类书都是以惯用的米·千克·秒制或厘米·克·秒制为基础的．因此，我们主要还是采用常用的厘米·克·秒单位制．

13 下面我们来探讨由于存在两个突出的常数 c 和 $\hbar$ 而引起的各种物理量之间的某些关系．先来研究物体的质量 m, 以及与此质量有关的由 m, $\hbar$, c 构成的其他一些物理量．这些物理量的常用量纲如下：

$$
\begin{aligned}
m &= [\text{质量}] & mc^2/\hbar &= [\text{时间}]^{-1} \\
mc &= [\text{动量}] & \hbar/mc^2 &= [\text{时间}] \\
mc^2 &= [\text{能量}] & \hbar/mc &= [\text{长度}]
\end{aligned}
\tag{13a}
$$

读者可验证一下,(在厘米·克·秒/单位制中)这些物理量纲是正确的. 所有这些量都通过常数 h 和 c “联系起来”了. 以上述关系式为基础,可以把能量和质量、频率或长度的倒数联系起来. 因此,能量的大小可以由有关量的大小求得.

14 因此,我们可以把频率 E/h,波数 E/hc,质量 E/c^2 与能量 E 联系起来. 它们的转换系数如下:

$$
\text{能量/质量} = (9.31478 \pm 0.00005) \times 10^8 \text{ 电子伏/原子质量单位} \tag{14a}
$$

$$
\text{频率/能量} = (2.41804 \pm 0.00002) \times 10^{14} (\text{周/秒})/\text{电子伏} \tag{14b}
$$

$$
\text{波数/能量} = (8.06573 \pm 0.00008) \times 10^3 \text{ 厘米}^{-1}/\text{电子伏} \tag{14c}
$$

附录表E有一部分就是按上述转换关系得来的. 与第一行有关的相应量都列在横排里. 第二、第三行给出了以电子伏和尔格为单位的能量数值; 第七行相应于质量 E/c^2,单位是原子质量单位;第八行相应于频率 E/h,单位是周/秒. 第九行是波数 $E/(hc)$,单位是厘米$^{-1}$. 波长 $(hc)/E$ 列在第十行,单位是埃,这是该表中唯一与 E 不成正比的量.

15 在化学中常用卡(简写成 cal),千卡(简写成 Cal 或 kcal)来表示能量(常把卡称为“小卡”,千卡称为“大卡”),这些单位的定义如下:

$$
\begin{aligned}
&1\text{ 千卡} = 1000\text{ 卡}, \\
&1\text{ 卡} = 4.186\text{ 焦耳} = 4.186 \times 10^7\text{ 尔格}
\end{aligned}
\tag{15a}
$$

把单个原子或分子的能量 E 和相应于 N_0 个这种粒子的整体能量 E_{bulk} 联系起来是有意义的．所谓整体能就是一克原子或一摩尔所具有的能量．因此有

$$E_{\text{bulk}}/E = N_0 = 23,050 \text{ 卡/电子伏特}$$
$$= 9.6487 \times 10^{11} \text{ 尔格/电子伏特} \tag{15b}$$

封底内部表中第四行和第五行分别是以尔格/摩尔和卡/摩尔为单位的整体能值．

16 第一章第 31—34 节简单地讨论了热量和温度的概念．我们注意到波耳兹曼常数 k 实际上是将温度化为能量的转换因子．用相当的能量来表示温度是常有的事，反过来也是一样，其相应关系规定如下

$$(\text{等效能量}) = k \times (\text{温度}) \tag{16a}$$

为了进行这种变换，玻耳兹曼常数取如下形式较为方便

$$k = 8.617 \times 10^{-5} \text{ 电子伏/°K},$$
$$1/k = 11,605\text{°K/电子伏} \tag{16b}$$

按照这种相应关系，“室温”(20°C＝293°K) 的等效能量为

$$k \times 293\text{°K} = (1/40) \text{电子伏} \tag{16c}$$

附录表E的第六行表示等效温度，单位是开尔文度．

17 能量和温度能够用相同的单位来表示，但这一点不应该使任何人认为能量和温度就是“同一回事”．例如，如果认为在温度为 T 时的任意一个宏观物体的热能就等于该物体的原子数乘 kT，这就不对了．宏观物体的内能不仅与温度有关，同时还与其它(宏观)参量有关；而且能量和温度的精确关系还与体系的性质有关．这一点很重要，一定不要对公式(16a)做错误的解释．

但是，我们可以作一个极其有用的说明，即常常有这样的

情况(但不总是这样),如果一个宏观物体的温度保持为T,那么该物体中每个原子(或分子)的平均“无规”能量的数量级为kT.

当温度已知时,这个论断能使我们估计出一个原子或分子作无规热运动所具有的平均能量.就许多特殊的体系我们可以做出严格的论证.温度为T的气体分子就是这样的一个重要例子.一个分子作平移运动时具有的平均动能E_{tr}为

$$E_{tr}=\frac{3}{2}kT \tag{17a}$$

不管分子是否是单原子,这个关系式都成立.这个公式的推导是属统计力学的问题,我们将推迟到下一册中讨论.尽管我们还没有推导过这个式子,但有时要用到这个结论.

18 如前面所说,当我们考虑孤立的原子核、原子或分子时,热量和温度的概念是不适用的,它们只应用于大块物质.然而,一般说来我们不能对孤立的粒子进行测量,我们所要研究的粒子都是浸没在宏观物体中的.因此,当我们想要了解量子力学体系的行为,特别是要研究量子现象的宏观表现时,无规热运动常常是需要考虑的一个重要因素.

按照我们的观点,体系中热运动的重要特性就是它是无规则运动.它在体系行为中引入了一个明显的机遇元素,这是我们已观察到的.可以说无规则热运动是“纯量子力学交响乐中的噪声”.而且这种噪声常常可以增强得很大以致不能听到这种音乐.在原则上,如果将所研究的体系及其周围的温度保持在接近于0°K,热运动是可以被抑制的,因为在绝对零度时热运动就停止了.但在实际上这是做不到的,热运动是我们所在世界的一个基本特征.

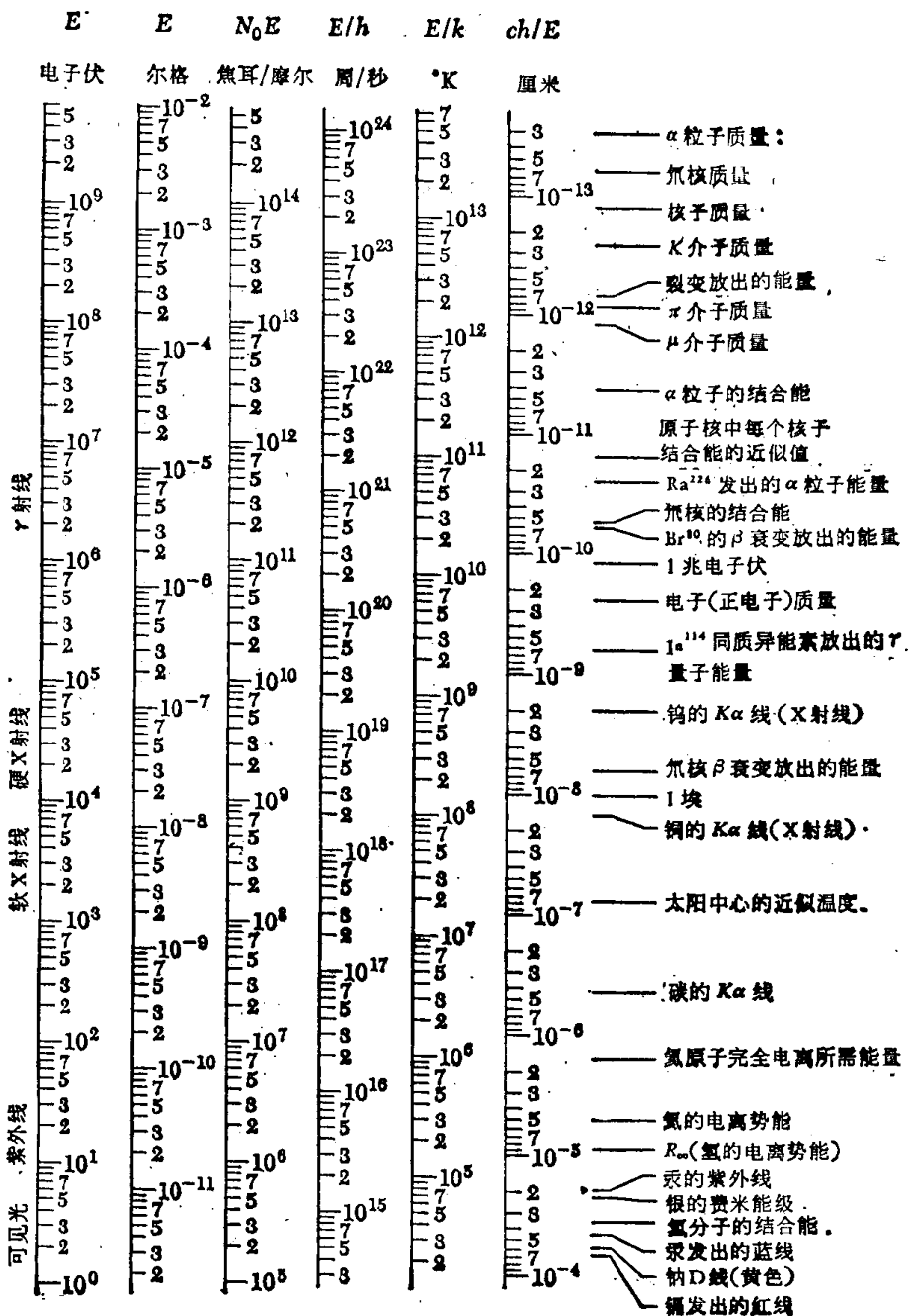
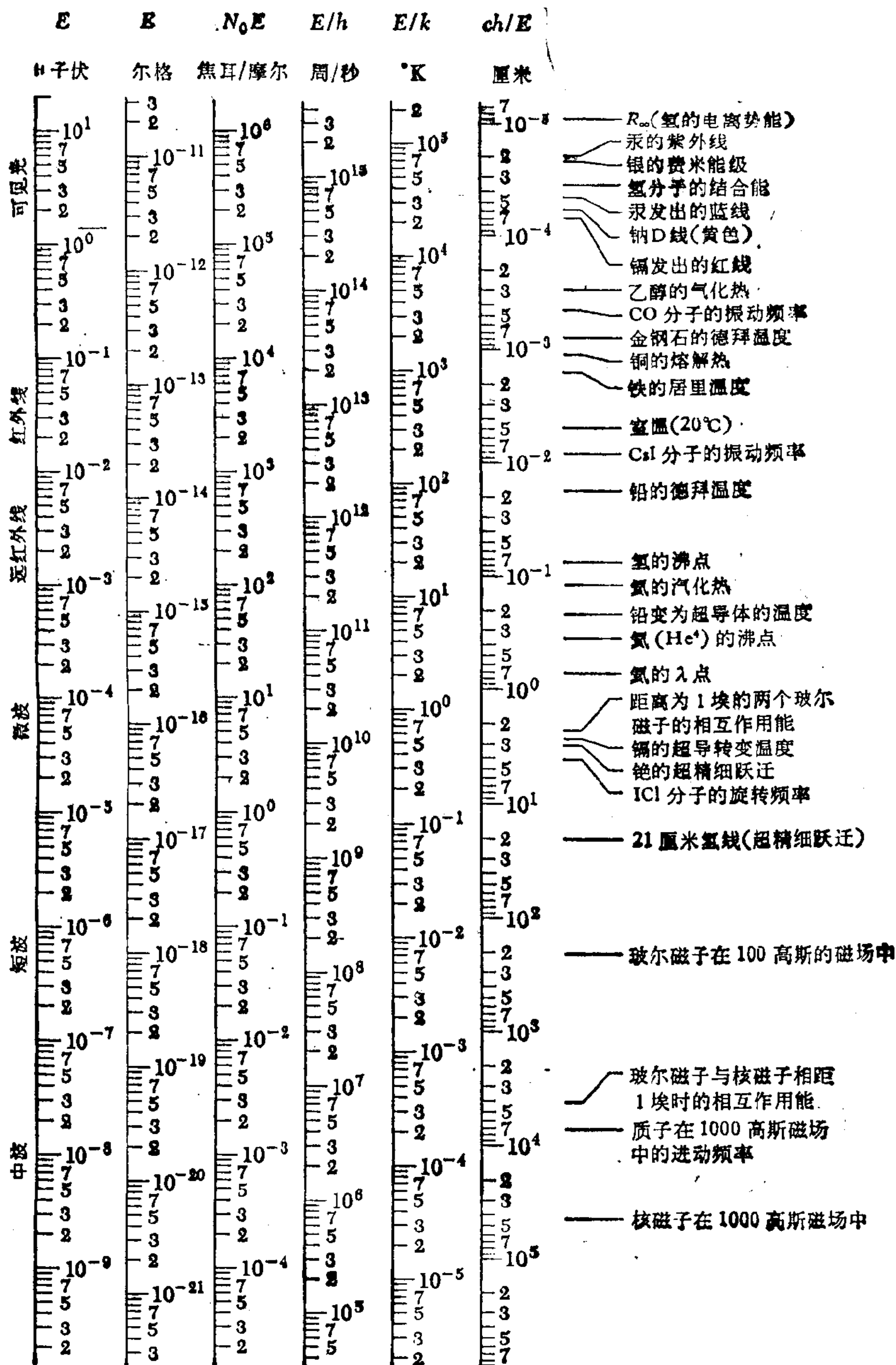


图 18A 物理现象的能谱

这是一些物理现象的特征能量。图中选出的数据将使读者对各种现象的典型能量值有一总的概念。各种能量均用几种常见的能量单位来表示；说明见第14—16节



E
E
N_0E
E/h
E/k
ch/E
电子伏
尔格
焦耳/摩尔
周/秒
°K
厘米
可见光
红外线
远红外线
微波
短波
中波
R_∞(氢的电离势能)
汞的紫外线
银的费米能级
氢分子的结合能
汞发出的蓝线
钠D线(黄色)
镉发出的红线
乙醇的气化热
CO 分子的振动频率
金刚石的德拜温度
铜的熔解热
铁的居里温度
室温(20℃)
CsI 分子的振动频率
铅的德拜温度
氢的沸点
氦的汽化热
铅变为超导体的温度
氦(He^4)的沸点
氦的λ点
距离为1埃的两个玻尔磁子的相互作用能
镉的超导转变温度
铯的超精细跃迁
ICl 分子的旋转频率
21厘米氢线(超精细跃迁)
玻尔磁子在100高斯的磁场中
玻尔磁子与核磁子相距1埃时的相互作用能
质子在1000高斯磁场中的进动频率
核磁子在1000高斯磁场中

三、原子物理学和分子物理学中的特征物理量

19 现在我们把原子看成是一个动力学体系，包含有一个很小的原子核，其周围是电子云．电子受原子核的吸引，它们之间通过电磁力相互作用．比较迄今为止的理论和实验，我们确信电磁力是在决定原子和分子的结构中唯一起重要作用的力．

研究带电粒子和电磁场相互作用的量子理论称为*量子电动力学*．这个理论，与狭义相对论相结合，是我们当前对基本粒子的基本过程的最成功的理论．正是在这个理论范围内，我们要描述原子和分子的结构以及原子和分子对电磁辐射的发射和吸收．

20 实验证明原子核的大小约为10^{-13}厘米，而原子的大小约为10^{-8}厘米．因此原子核与原子相比是非常小的．

原子核的质量比电子质量大得多，电子质量是0.0005486原子质量单位，电子质量与质子质量之比为

$$\frac{m}{M_p}=\frac{1}{1836} \tag{20a}$$

因此，有理由认为：至少在取一级近似中，原子核的运动实质上不起作用，在这种近似条件下，我们可以认为原子核“无限”重，因而固定在空间不动．而且，由于原子核非常小，我们还可以把它近似地看成一个“点”，它的唯一的作用是产生一个静电场，这个场可以用下面形式的电势来表示：

$$V(r)=\frac{eZ}{r} \tag{20b}$$

e是基本电荷，Z是原子序数．

因此，在一级近似中，原子理论研究的问题是电子在静电

场中的运动，同时也考虑了电子之间的相互静电排斥作用．还应请读者注意，这里我们所说的“运动”是指量子力学意义上的运动，其含义将在以后作精确说明．

21 在狭义上量子电动力学是研究电子和电磁场相互作用的学科．现在我们来讨论此理论中涉及到的一些物理量，即：电子质量 m，电子电荷 $-e$，光速 c 和普朗克常数 $\hbar$．从这些常数 m，c 和 $\hbar$ 出发，我们可以建立起量子电动力学的自然单位，就象第 13 节中所说的：m 是质量单位，mc^2 是能量单位，$\hbar/mc$ 是距离单位及 $\hbar/mc^2$ 是时间的单位．还有，$\hbar$ 是角动量的单位，c 是速度的自然单位．

至今我们尚未讨论过基本电荷 e．它起着**耦合常数**的作用，是表明电子和电磁场之间耦合程度的量[1)]．我们想建立一个无量纲的量来量度这种耦合强度，并用上述自然单位来讨论相隔一个自然单位距离的两个电子相互排斥的静电能．用 α 来表示这个量，则有[2)]

$$\alpha=\frac{e^2/(\hbar/mc)}{mc^2}=\frac{e^2}{\hbar c}$$
$$=(7.29720\pm0.00003)\times10^{-3}\approx1/137 \qquad (21a)$$

这个常数 α 叫做**精细结构常数**，在原子物理中起着基本的作用．在自然单位制中，它等于基本电荷的平方，因而，它描述这个电荷的大小，其方式与任何宏观物理标准无关．α 在数值上十分小，这反映电磁相互作用从根本上看“很弱”；两个电子相隔单位距离时的静电能要比电子的静止能量小得多．**精细结构常数是自然界真正的基本常数之一**，到目前为止，

---

1) 这是一般的表达方式．但更深刻地讲耦合常数是表明基本电荷彼此之间相互作用的强弱程度．从根本上说，电磁场是为了便于讨论电荷之间的相互作用而引入的虚构概念．

2) α 的这个表示式适用于厘米·克·秒单位制，在米·千克·秒单位制中 $\alpha=e^2/(4\pi\varepsilon_0\hbar c)$．

它还纯粹是一个经验常数，其意义是：对它的大小还没有在理论上的解释．同样可能“结果”是比较大，如果是这种情况，世界面貌就会大不一样．事实上，会有难以想像的差异．

读者考察一下方程(21a)，就会注意到电子的质量不包含在 α 的表达式中．因此，α 是描述带电量为 e 的任何基本粒子与电磁场耦合情况的耦合常数．

在表21A中，我们列出了一些可以用 m, $\hbar$, c 和 e 来表示的重要量，表中写出了它们的名称，在名称的下面给出了这些量的大小．

表 21A　又几个物理常数

电子的静止能量

$$mc^2=(0.511006\pm0.000002)\text{兆电子伏}$$

电子的康普顿波长

$$\lambda_e=\frac{\hbar}{mc}=(3.86144\pm0.00003)\times10^{-11}\text{厘米}$$

第一玻尔半径

$$a_0=\frac{\hbar^2}{me^2}=\alpha^{-1}\lambda_e=(5.29167\pm0.00002)\times10^{-9}\text{厘米}$$

设质子质量为无限大时氢的非相对论电离势

$$R_\infty=\frac{1}{2}\alpha^2mc^2=(13.6053\pm0.0002)\text{电子伏}$$

设质子质量为无限大时的里德伯常数

$$\tilde{R}_\infty=\frac{\alpha}{4\pi a_0}=R_\infty/hc=(109737.31\pm0.01)\text{厘米}^{-1}$$

22　在第一章第51节中我们讨论过氢原子玻尔半经典理论的一个方面，即氢原子的大小，而且我们说明了由第一章(51a)式定义的常数 a_0 是原子典型大小．读者会发现，这个称为(氢原子的)第一玻尔半径的常数 a_0 与列在表21A中的 a_0 是一样的．根据第一章的讨论 a_0 是原子行星模型中电子圆形轨道的半径，并由此而得名．在用量子力学讨论氢原子

时对这个常数有不同的解释：$1/a_0$是基态原子的 $1/r$ 的平均值，这里 r 是电子和质子之间的距离．不管是哪一种情况，都可以把 a_0 看做是电子和质子间的"典型"距离．

23 让我们来继续第一章的半经典理论的讨论，并来估计氢原子中电子的结合能．距质子的距离为 r 以速度 v 运动的电子(因此它的动量为 $P=mv$)的总能量 E 为

$$E=\frac{P^2}{2m}-\frac{e^2}{r}=\frac{1}{2}mv^2-\frac{e^2}{r} \tag{23a}$$

当圆形轨道的半径 $r=a_0$ 时，动态平衡的条件为

$$\frac{mv^2}{a_0}=\frac{e^2}{a_0^2} \tag{23b}$$

将此式代入(23a)式，得

$$E=\frac{1}{2}\left(\frac{e^2}{a_0}\right)-\frac{e^2}{a_0}=-\frac{e^2}{2a_0}=-\frac{1}{2}\alpha^2mc^2=-R_\infty \tag{23c}$$

因此，在此轨道上运动的电子的能量为 $-R_\infty$，即约为 -13.6 电子伏．这个能量应当与电子离开质子无限远且处于静止状态时的总能量相比较，由(23a)可以看出，电子在无限远处静止时的总能量等于零．因此，要想把电子从所考虑的圆形轨道上移到无穷远，就需要供给原子 R_∞ 的能量．这个能量叫做电离能．电离能可以表示成等效波数，这就是众所周知的里德伯常数．用 $\tilde{R}_\infty$ 来表示[1]．

正巧，这个简单估计得出的电离能 R_∞ 与严格的量子力学理论得出的结果完全一样．因为这个估计是以行星模型为基础的，行星模型在其他方面不是很有说服力，所以在原则上我们认为这一点是"巧合"．R_∞ 是氢的电离能，或换种说法，$-R_\infty$ 是氢原子的基态能．

而且，也是碰巧，所有原子的电离能(即，把一个电子从原

1) R_∞ 和 $\tilde{R}_\infty$ 的脚标 ∞ 是表示认为质子无限重而且静止不动的模型．实际的电离能略小于此值．

子中取走需要做的功)都约为10电子伏的数量级. 以后我们还要讨论这个问题.

24 现在我们来看：电磁力很弱(即耦合常数 α 很小)在氢原子结构中如何表现出来. 假如耦合常数的数量级为1，那就可以预见原子的大小的数量级为1个量子电动力学中的自然长度单位，即康普顿波长 $\lambda_e = \hbar/mc$. 但是，耦合常数"很小" $\left(\alpha = \frac{1}{137}\right)$，因此原子核的库仑场不能将电子限制在康普顿波长的范围内. 电子轨道用自然量子电动力学单位表示时是很大的，也就是半径 $a_0 = \lambda_e/\alpha$.

由方程(23b)，我们可以求出在轨道上电子的运动速度 v

$$v = \sqrt{\frac{e^2}{ma_0}} = \alpha c \tag{24a}$$

因此，这个速度要比自然单位(即光速 c)小137倍. 这一点是一个事后的验证，说明我们对此问题作非相对论讨论是合理的.

动能 $E_{\rm kin}$ 和势能 $E_{\rm pot}$ 为

$$E_{\rm kin} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(\alpha c)^2 = R_\infty \tag{24b}$$

$$E_{\rm pot} = -\frac{e^2}{a_0} = E - E_{\rm kin} = -2R_\infty = -2E_{\rm kin} \tag{24c}$$

基于这些讨论，可以说氢原子是一个结合松弛并分得较散的结构. 关于这一点以及精细结构常数 α 在原子理论中所起的作用，读者需要仔细体会.

25 既然在半经典理论中，原子中电子的运动速度已证明为很小，因此就有理由相信也可以用量子力学的非相对论理论来描述原子. 在此理论中，如果我们把 m、$\hbar$ 和 e 看成是基本常数，光速将不起作用，特别是应该可以仅用这些常数就能表

示玻尔半径 a_0 和电离能 R_∞. 事实正是这样, 我们发现

$$a_0 = \lambda\!\!\!^{-}_e/\alpha = \hbar^2/me^2 \quad (25a)$$

及

$$R_\infty = \frac{1}{2}\alpha^2 mc^2 = \frac{e^2}{2a_0} = \frac{e^4 m}{2\hbar^2} \quad (25b)$$

在这些式子的最右端不出现光速, 而且, 长度 a_0 是唯一能够用常数 m、$\hbar$ 和 e 表示的长度, 而能量 R_∞ 是唯一能用常数 m、$\hbar$ 和 e 表示的能量. 因此, 我们可以论证, 既然这些常数是非相对论量子力学理论的组成部分(这一点至今尚未向读者讲清楚). 所以按此理论计算的任何长度一定是 a_0 的一个数字倍数, 同样, 任何能量一定是 R_∞ 的一个数字倍数 (这里说的数字倍数是指与这三个常数无关的一个数字. 我们希望能有一个"合理"的理论, 在此理论中这些数字的数量级都是"1").

26 读者可能会感到这些"推导"是很荒唐的. 我们早先说过玻尔模型是很错误的, 那么这里以玻尔模型为基础进行的论证还有什么价值呢? 对待上节的量纲论证, 我们要认真到什么程度呢? 是否能出现一种情况: 给出以 R_∞ 表示的正确能量的这个常数, 即上面我们希望其数量级为 1 的常数, 实际上却证明是象 4711 或 $(2\pi)^{-4}$ 之类的数字呢? 显然, 这样的常数将对我们的估计引起很不小的差异.

答案是这种情况很可能会发生, 但是有经验的作者知道实际上这是不会发生的; 这个常数是等于 1. 关于这类"简单推导"(它们在物理教科书中时常出现), 求全责备的人总是能指出, 这种论断看来解决问题特别好的全部情况, 或者是已知实验结果的, 或者是已知更完整理论的结果的.

为了讲清楚我们已做的工作, 现做如下几点说明:

(i) 我们想形成一个图象表示原子和分子物理中各个量

的数量级．除了告诉读者氢原子的电离能是13.6电子伏以外，我们还想把13.6电子伏和由基本常数构成的表达式联系起来．最好要知道13.6电子伏等于$\alpha^2mc^2/2$和0.53埃等于$(1/\alpha)(\hbar/mc)$．我们对量子电动力学的讨论和它对氢原子的

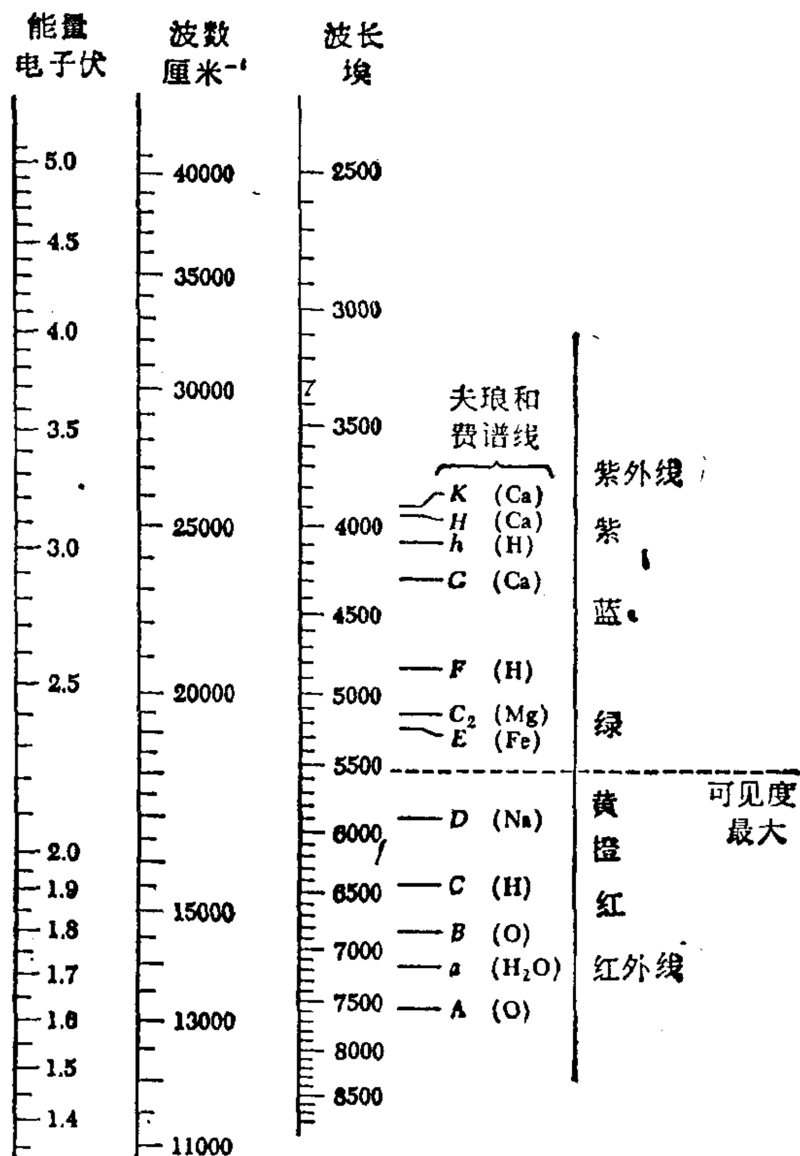


图26*A*　接近可见光的谱线，在太阳光谱中夫琅和费线是明显的吸收谱线(暗线)．左行是这些谱线的名称，右行是产生吸收谱线的原子或分子的化学符号．

当然，各光谱区颜色的标定，仅是一种近似，请注意最大可见度约在5500埃．

关系的讨论至少使我们在某种程度上了解所有这些量是怎样联系起来的．如果在精确的理论中没有与这些思想相对应的理论，当然作者也就不会介绍这些思想了．因此，我们的"推导"至少可以用作记忆手段．

(ii) 我们承认玻尔理论是错误的．但另一方面，读者肯定知道，玻尔理论在某些情况下曾是成功的，虽然它在一些别的情况下严重地失败了．因此，说得含糊一点，这个理论具有某些正确的成分．它把普朗克常数引进了物理学，从而也引进了位置和动量之间的关系：有点象 $rp\sim\hbar$，这是在纯经典理论中根本不出现的关系．我们可以持这样的观点，即这种以玻尔理论为依据的推导在本质上是 $rp\sim\hbar$ 这类关系的一种检验．以后我们还要以不同的方法来考察这个关系式，并将讨论出一个根据测不准关系式来估计氢原子大小和电离能的方法．同时，我们将能更好地理解为什么氢原子不会崩溃．

(iii) 认真研究量子力学描述氢原子的特定方程(例如所谓薛定谔方程)，就能使人更加相信第 25 节的量纲论证．无需实际解这个方程，我们就能相当容易地得出结论：不会出现象 4711 或 $(2\pi)^{-4}$ 这类的数．当然，要想得出这类结论，必须要对微分方程解的性质有某种程度的理解．(薛定谔方程是一个微分方程．)如果对一个理论的总的特征有相当了解，从而使量纲论证经受考验，这样的量纲论证才是最有用的．

这一简单的量纲论证是这类论证的一个入门．我们已经告诉读者有一个"好"的理论，能够期望这个理论给我们些什么呢？这正是我们已经提出并已作了回答的问题．

27 我们现在继续讨论原子物理，并试对重原子(即原子序数 Z 大的原子)的结构作一初步探讨．读者一定听说过，在某种意义上这类原子核周围的电子云具有壳层结构，这个概念将是我们讨论问题的依据．让我们想象，从周围没有电子的原

子核开始，然后一次加上一个电子，从而构成原子．那末，第一个电子所受的束缚有多紧呢？

这个体系能量的表达式取如下的形式：

$$E=\frac{P^2}{2m}-\frac{e^2Z}{r} \tag{27a}$$

稍加考虑就了解，只要用 αZ 代替精细结构常数 α，则前面对氢原子讨论的结果仍然适用．换句话说，第一个电子受到的结合能为

$$e_1=-Z^2R_\infty=-Z^2(13.6\text{ 电子伏}) \tag{27b}$$

第一个电子离开原子核的距离为

$$r_1=\frac{a_0}{Z} \tag{27c}$$

Z 很大时，这个距离就比氢原子的玻尔半径 a_0 小得多．第二个加上去的电子也被束缚在离开原子核很小的距离上，而结合能比氢原子的电离能大得多；很明显，这两个电子之间的静电斥力要比对核的吸引力小 Z 倍．现在研究带有几个电子的离子的表现．这些电子都被束缚在离开原子核很小的距离上．设带有 n 个电子，则在电子受束缚的距离之外，离子的行为就象是带电量为 $(Z-n)e$ 的原子核一样．因此，只要 $(Z-n)$ 不是很小，第 $(n+1)$ 个电子也会被紧密地束缚住，但是束缚的紧密程度要比第一个电子差．因此，可以想象，相继加上去的电子受到原子核的束缚一个比一个松．当加上 $(Z-1)$ 个电子之后，离子变得象一个带电量为 e 的电荷云，其大小与玻尔半径 a_0 差不多．因此，对最后加上去的一个电子的结合能的数量级为 R_∞，因而为 10 电子伏特的数量级．原子最后的大小也将是玻尔半径 a_0 的数量级．

28 这种描述当然是非常粗糙的．请注意，对于电子云具有“壳层结构”的说法，我们没有证明过，甚至也没有作过象样的

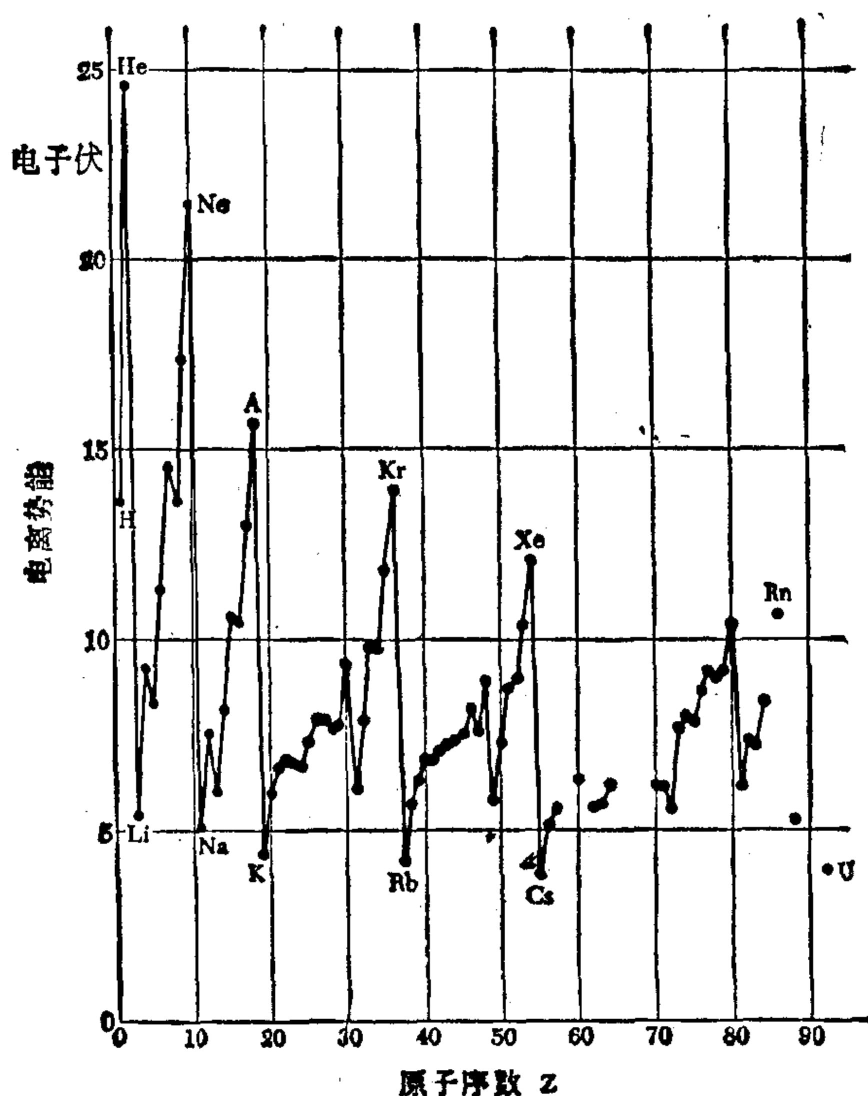


图 27.4 上图表示原子的电离势与原子序数之间的对应关系．电离势是指从中性原子中取走一个电子所要的能量．我们看到，对于所有原子这个能量差不多都为同一数量级，即为 10 电子伏的数量级．

懂得一些化学知识的读者很容易发现，电离势的大小和元素的化学性质之间有明显的关系．惰性气体的电离势特别大，而碱金属的特别小．

说明．但是，我们的讨论却是以这种说法为依据的；我们是以一种特别的方式"建造"原子．

事实上，要真正理解原子结构必须注意到物理学的一个基本原理，这个原理至今我们尚未提到过，而且它完全不在经

典物理学范围之内．这原理叫做不相容原理．其内容是说在一个原子中永远不会有两个电子处于相同的运动状态．电子彼此“回避”．（这种“回避”与两个带同号电荷粒子的库仑排斥作用完全不同．要真正理解不相容原理的含义需要有一定的量子力学的知识．）不相容原理是解释原子结构的关键．它具有深远的影响，如果自然界不遵守这一原理，世界面貌将会大不一样．为什么是这样在现阶段肯定不是显而易见的．

不相容原理是 W. 泡利 1924 年在研究当时所知道的原子物理一些经验事实时发现的[1]．

29 我们的讨论是有很多缺陷的，但它还是对重原子的性质给出了某种图象．从这种图象可以得出，最外层电子或光学电子的运动状态的跃迁所涉及的能量为 1 电子伏的数量级．这个能量差不多相应于在光学区域发射的光子波长．光学区域是指能量范围为 1.8—30 电子伏或波长范围为 7000—4000 埃．另一方面，与内层电子有关的那些跃迁相应的能量要大得多，可高达 70 千电子伏，相应的波长低到 0.2 埃．这些光子处于远紫外光或 X 射线区．跃迁能量与原子序数 Z 的关系如公式(27b)所示．

我们注意到原子的典型大小为 1 埃，比光子的波长小得多．这种情况是由于耦合常数 α 很小引起的，通过下面的讨论我们将会看到这一点．一个光学电子的结合能约为 α^2mc^2．光学电子的特征跃迁能量为同一数量级；它们肯定不会比结合能大．一个外层电子在两个亚稳态之间跃迁总是联系于发射或吸收光子，该光子的能量等于这两个能级的能量差，因

1) W. Pauli, "Über den Zusammenhang des Abschlusses des Elektronengruppen im Atom mit der Komplexstruktur der Spektren," *Zeitschrift für Physik* **31**, 765 (1925).

此，与这个光子相应的波长约为

$$\lambda_{光子} \sim \frac{2\pi\hbar c}{\alpha^2 mc^2} = \frac{2\pi a_0}{\alpha} \approx 1000 a_0 \tag{29a}$$

这个式子也表明了波长与原子大小的比值的数量级.

30 现在我们对原子物理领域中有关量的数量级已有了相当了解，下面想对分子再作一些介绍. 这里的关键问题是了解分子的结合：为什么有时原子会组成稳定的分子，但有时却不能？要真正理解这些问题需要用到比解决原子问题更为细致的方法. 但是我们可以先回答这个一般问题的一个小部分，可以问：假使在某些条件下原子组成稳定的分子，那么它的特征结合能多少；以及在一个分子中两个原子的特征距离又是多少？

先考虑一个最简单的情况，即氢分子，它是两个质子和两个电子的结合态. 试以量纲论证来估计结合能和原子核之间的距离，因此我们的论证所涉及的是，象在氢分子中一样确实发生了分子结合的那些情况.

由于质子要比电子重得多，因此在研究氢分子的基态时，质子的运动也不起实质性的作用. 在取一级近似时，实际上可以把两个质子看成是静止的，具有固定的距离 d，它们被两个电子组成的“云”包围着. 可以想象，我们求得的两个电子的基态能应是质子间距 d 的函数. 当 d 为某一数值时，这个能取最小值，在这个能量值我们就得到一个稳定的分子. 这是一个非相对论问题，由于把质子看成是无限重，所以我们只用到 m, $\hbar$ 和 e 这几个常数. 因此，唯一的“自然”能量就是 R_∞，唯一的“自然”距离就是玻尔半径 a_0. 这些量应是表示分子的特征量. 较为细致的研究证实了这一预见，它也与实验事实相符. 氢分子的实际结合能约为 4.5 电子伏，两个质子的平均距离约为 0.75 埃. 对于一般的分子，这些数值是相当

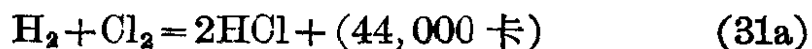
典型的；各种分子的结合能的数量级都是1—10电子伏，而原子核间的距离是1埃的数量级，即10^{-8}厘米的数量级．

保持分子成一整体的"机理"也就是保持固体成一整体的机理，在固体中相邻两个原子间的典型距离也是1埃的数量级．

表30A　任意选定的几个二原子分子的特征常数

分　子	原子核间的距离（埃）	离解能（电子伏）	分　子	原子核间的距离（埃）	离解能（电子伏）
AgH	1.62	2.5	HF	0.92	6.4
BaO	1.94	4.7	HgH	1.74	0.38
Br_2	2.28	1.97	KCl	2.79	4.42
CaO	1.82	5.9	N_2	1.09	9.76
H_2	0.75	4.5	O_2	1.20	5.08
HCl	1.27	4.4			

31　这些估计值可使我们理解在化学反应中释放或吸收能量的大小．一个化学反应的基本过程是两个或两个以上的不同的分子相互撞碰，形成一个或多个新的分子．这种原子重新组合成新分子的过程所联系的能量一定与典型分子结合能同数量级，即每个化学反应的基本过程释放或吸收的能量为1—10电子伏的数量级．因此，整体反应能约为(1—10)×N_0电子伏/摩尔，即大致为20,000—200,000卡/摩尔．以氢气在氯气中燃烧的情况为例，根据反应方程式



$$H_2+Cl_2=2HCl+(44,000\text{ 卡}) \qquad (31a)$$

这个数量级与我们的估计是一致的．

32　宏观单位中有一个有趣的特点，值得一提．我们曾经说过厘米·克·秒这些单位是用来描述人的特征的，因此，这些单位不特别适用于讨论原子是不足奇怪的．但是，有一个宏观单位似乎具有特殊地位：即电势的单位伏特，它的导出单位

电子伏特"正好适用于原子". 这是一个偶然事件吗?

不, 这不是偶然的. 最初选定伏特这个单位就是让伏打电池的电动势为1伏特的数量级, 实际上有一种镉-汞标准电池的电动势非常接近1伏特. 我们知道这种电池的工作是以电池内发生的电化学反应为依据的, 每当有一个电子离开电池的一极时, 就一定是已经发生一个基本化学过程. 每发生一个基本化学过程, 就要放出一定能量, 例如说是 X 电子伏, 这个能量可以在电池外部转变成机械能或热能. 如果电池的电动势为 U, 则有 $Ue=X$, 由于选定单位为伏特, U 应是1伏特的数量级, 由此得出典型电化学反应能应为1电子伏特的数量级. 这就解释了为什么在原子和分子物理中适于把电子伏特做能量单位的秘密; 伏特实际上是一个"原子单位"!

四、核物理的几个最基本的事实

33 原子核是质子和中子组成的. 质子和中子有许多重要物理性质相同, 时常把它们看成是"一种"粒子的两种不同荷电状态, 这种粒子称为核子. 因此, 核子有两种形态: 带电态, 就是质子; 不带电态, 就是中子[1].

原子核中所含核子的数目 A 叫质量数或核子数. 质子的数目 Z 叫做电荷数, 或者当谈到有关原子时叫做原子序数.

质子和中子的质量为:

$$M_p=(1.00727663\pm0.00000008)\,\text{amu}$$
$$=(938.256\pm0.005)\,\text{兆电子伏}/c^2 \qquad (33a)$$

1) 中子是查德威克在1932年发现的, [J. Chadwick "*The Existence of a Neutron*" *Proceedings of the Royal Society* (London), Ser. A, **136**, 692 (1932).]

$$M_n=(1.0086654\pm0.0000004)\text{amu}$$
$$=(939.550\pm0.005)\text{兆电子伏}/c^2 \qquad (33b)$$

下面来研究质量数为 A，电荷数为 Z 的一个原子核．设它的质量为 $M(A, Z)$．则量

$$\Delta(A, Z)=[ZM_p+(A-Z)M_n]-M(A, Z) \qquad (33c)$$

称为原子核的质量亏损．这个量是正值，对此有一简单的解释：量 $\Delta(A, Z)c^2$ 等于原子核的结合能，或者等于把原子核完全分裂成它的基本成分——质子和中子时所需要的能量．

实验表明，对于所有的稳定核，每个核子的结合能差不多都一样，即为

$$\frac{\Delta(A, Z)c^2}{A}\sim 8\text{ 兆电子伏} \qquad (33d)$$

在非常轻的原子核中有明显例外的，而且随着质量数 A 的增加平均结合能有规则的略有降低，如图 33A 所示．

34 读者应该注意．在绝大多数"原子核"质量表中列出的质量实际上是相应的中性原子的质量．假如用 $M(A, Z)$ 表示原子核的质量，$\overline{M}(A, Z)$ 表示相应原子的质量，则

$$\overline{M}(A, Z)=M(A, Z)+Zm-B(Z) \qquad (34a)$$

这里 m 是电子的质量，$B(Z)$ 是正的，它表示原子中所有电子的结合能．

在考虑原子核反应中的能量平衡时，是用真正原子核的质量，还是用有关原子的质量，在绝大多数情况下，这都不产生差别，因为如果改用后者，电子质量的贡献都会抵消．结合能 $B(Z)$ 与每个核子的原子核结合能 8 兆电子伏相比是很小的，因此几乎总是略去不计．

为什么表中列出的是原子质量而不列出原子核的质量呢？其原因是原子质量比较容易测量．通过一个叫质谱仪的特制仪器，在电场和磁场的组合中进行偏转实验就能确定各

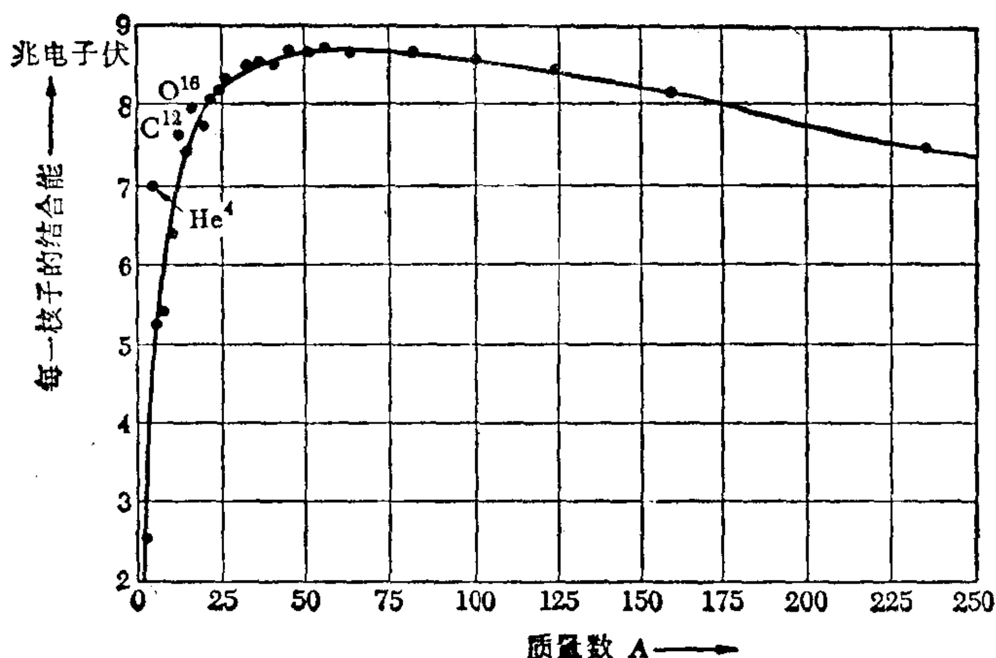


图 33*A* 此图表示每个核子的结合能 $\Delta(A, Z)\,c^2/A$ 与质量数 *A* 的关系．黑点表示特定的原子核，其中有几个标出了名称．这根光滑的图线不能很好地反映最轻原子核的不规则情况，但当 $A>25$ 时，曲线能准确地反映实际情况．

每个核子的结合能都接近 8 兆电子伏．随着质量数的增加，每个核子的结合能缓慢地降低，这种有规则的趋势是由原子核内质子的静电排斥能引起的．

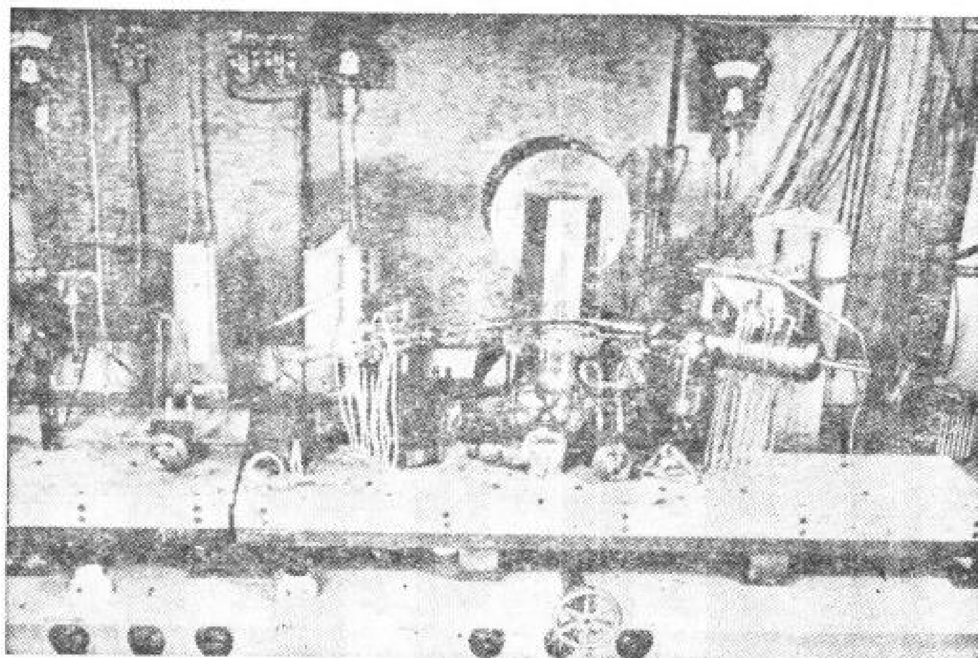
种离子的荷质比．这一工作最初是由 J. J. 汤姆逊和 F. 阿斯顿做的，利用这一实验测出了许多原子质量的精确数值[1]．

也可以用质谱仪测定天然存在的化学元素中不同的同位素的丰度，一旦知道了这些丰度，我们就能从化学原子量得出"原子核"的质量．

最后，从对原子核反应运动学的研究中，我们也能得到原子核的质量．

35 荷质比 Z/A 作为质量数 A 的函数的变化趋势有一定的

1) F. W. Aston, "Isotopes and Atomic Weights," *Nature* **105**, 617 (1920). Also F. W. Aston, *Mass Spectra and Isotopes* (Edward Arnold and Company, London, 1942).



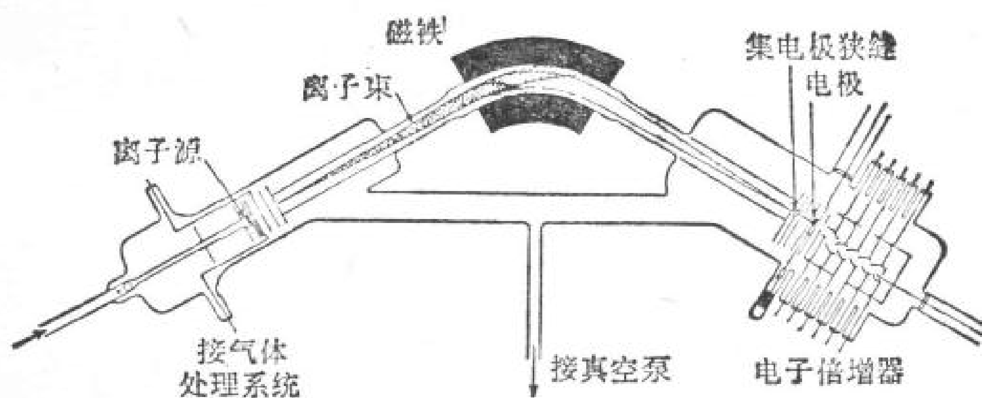


图 34A–B　图中的质谱仪是设计来分析陨石放出的惰性气体的少量样本. 其目的不是为了精确测量原子质量，而是为了测定陨石中元素(氙)的同位素的相对丰度. 所得数据可以用来估计陨石的年龄，这对了解太阳系的起源和发展有重大意义. 关于这一工作的介绍，请看 J. H. Reynolds, "The age of the elements in the solar system," *Scientific American* **203**, 171 (Nov. 1960).

上图是该仪器的照片，下图是其工作原理. 惰性气体样本从左边引进抽空的玻璃套管，在离子源处受电子的轰击而电离. 离子被中间的磁铁加速并偏转. (磁铁的极板和线圈在照片的中间可以看到.) 不同同位素的偏转量不一样. 通过改变磁场强度，就能逐一测出每个同位素产生的通过右边集电极狭缝的电流. 当然，同位素的丰度是与电流成正比的. 为了使离子束部分聚焦，故把磁场做成楔形.

规律性，对于不太重的核，例如 A 小于50的那些原子核，这个比值接近于1/2. 随着 A 的增大，这个比值慢慢减小；铀同位素 $_{92}U^{238}$ 的荷质比 $Z/A=0.39$. 当 A 很小时，又出现不规则情况；例如，氢有三个同位素，$_1H^1$，$_1H^2$(氘)和 $_1H^3$(氚).

有些原子核是稳定的，但也有些原子核并不稳定，它们通过发射粒子或 γ 射线而衰变. 一般常见的原子核或者是绝对稳定，或者是有很长的寿命；否则，它们应在地球历史的早期

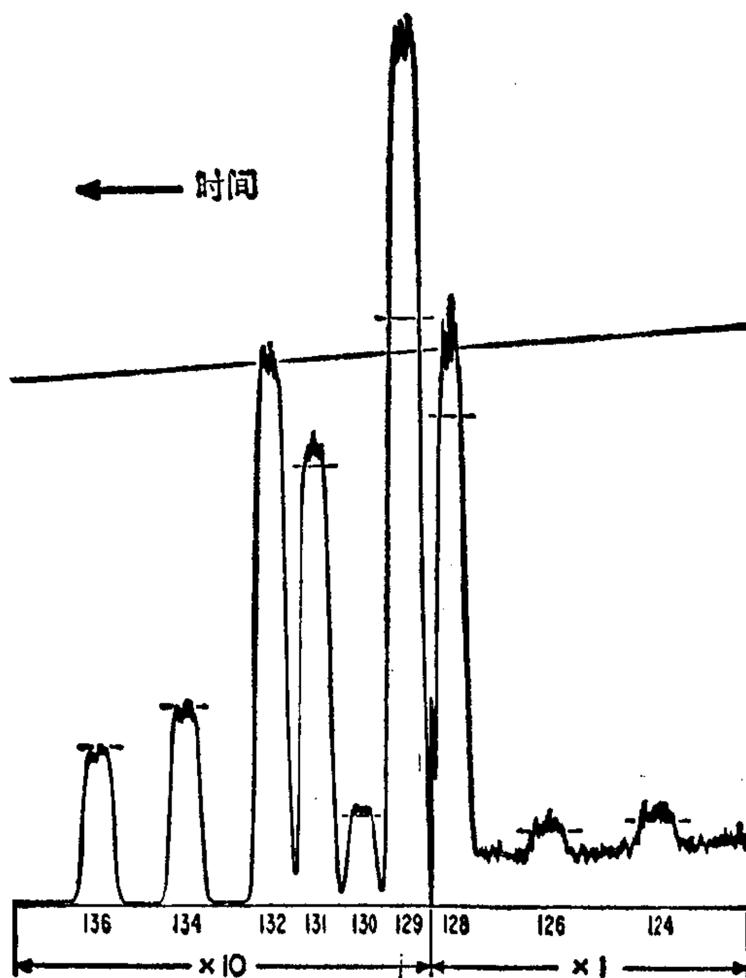


图 34C 用图 34A-B 所示装置记录下来的氙的质谱，氙是从陨石上取出来的. 此图取自 J. H. Reynolds, "Determination of the Age of Elements," *Physical Review Letters* **4**, 8(1960)，横短线表示在氙的地球样本中同位素的丰度. 我们可以看到陨石样本中含有较丰富的同位素 Xe^{129}. 请注意，此图采用了两种不同的纵坐标标度.

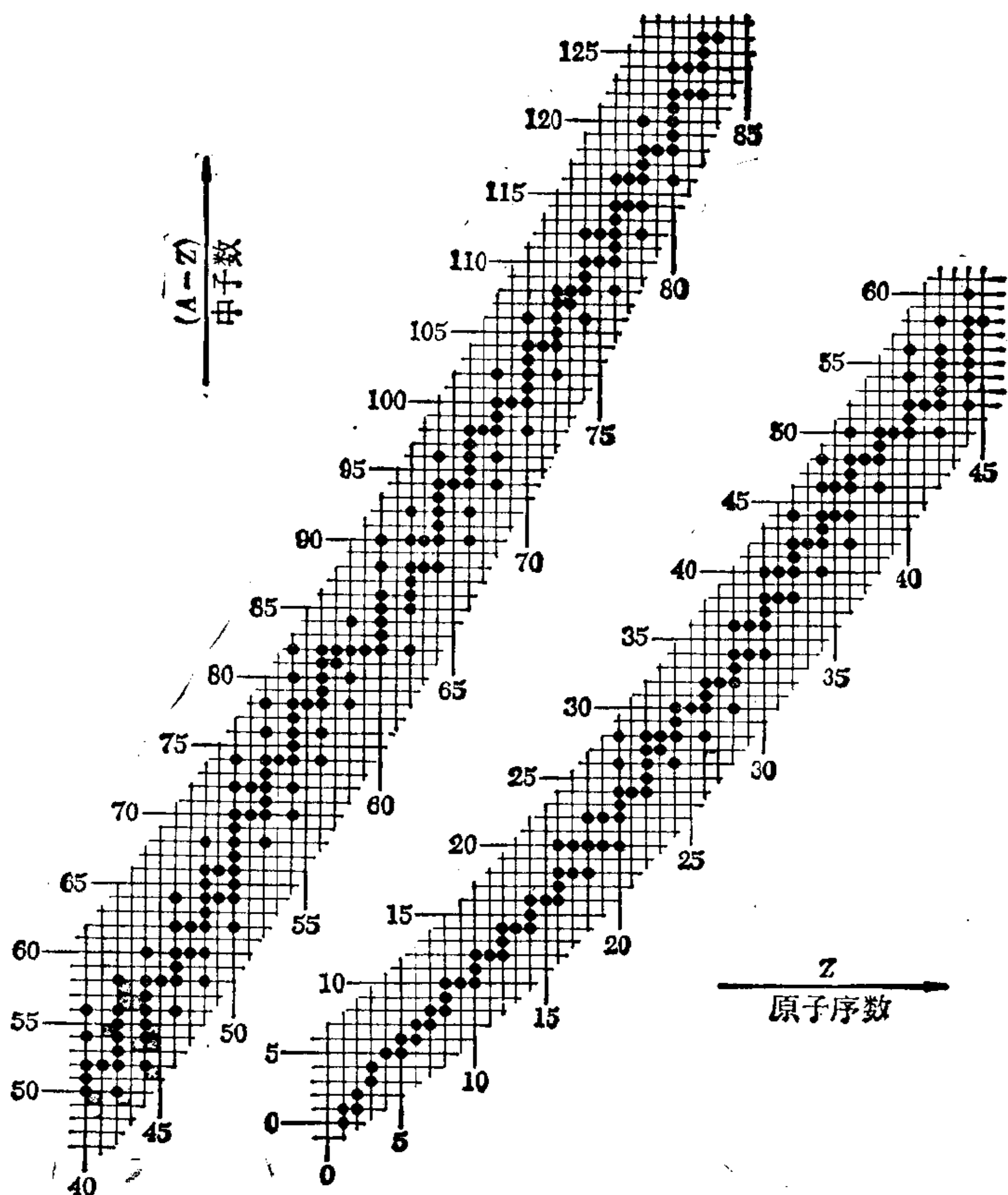


图 35A 稳定的和近于稳定的原子核. 图中标出的是所有已知的半衰期大于 5×10^{10} 年的原子核. 这个半衰期下限的选取有一定的任意性. 这个下限差不多是太阳系估计年龄的十倍, 因此即使按地质时间标度来计算这些原子核寿命也是长的. 在此图中(包括两个部分), 纵坐标是中子数($A-Z$), 横坐标是原子序数 Z. 很明显,原子核差不多是聚集在一根光滑的曲线上. 轻原子核中的质子数和中子数差不多相等,但随着原子序数的增大,中子数增加得较快.

原子核排成的图象呈阶梯形是根据如下事实得出来的: 即一个原子核的稳定性与质子数和中子数是偶数还是奇数有关. 偶-偶核最稳定,偶-奇(和奇-偶)核不很稳定,奇-奇核最不稳定. 读者需仔细研究此图才能看出这个规律. 图中奇-奇核很少,有些质子数和中子数处出现"空白", 这相应于没有稳定核. 请注意,这种情况总是发生在中子数或质子数是奇数的地方.

阶段就已衰变完了，不会保存到现在．在核反应中形成的原子核寿命可以很短，不到一秒的数量级．当其寿命很短时我们常称之为原子核的激发态，特别是当放射γ射线而发生衰变时，这时A和Z保持不变．

目前已经知道的原子核约有900种左右，其中近280种是稳定的．如果在(Z, A)平面上画出这些原子核，那么表示各个原子核的点按我们前面说过的规律沿着一根光滑的曲线排列．(参看图35A)离开“中心曲线”越远的原子核，就越不稳定．

36 实验已经发现，原子核有非常确定的大小，可以看成是一个核物质的球，球的半径为

$$r \cong r_0 A^{1/3} \text{ 这里 } r_0 = 1.2 \times 10^{-13} \text{ 厘米} = 1.2 \text{ 费米} \quad (36a)$$

(1费米$=10^{-13}$厘米，在基本粒子物理学中常用它做长度单位.)

由于原子核的体积与r^3成正比，因此，根据(36a)式，它是与核子数A成正比，由此得出结论，不同原子核中的核物质密度差不多是一个常数．

(36a)式总结出的原子核大小已为多种实验所证实[1]．最直接的方法是测量在散射实验中原子核对高能粒子束所表现的有效散射截面．

37 现在来谈一谈有关使原子核结合在一起的力的性质．所有实验事实都说明：

(i) 核力在本质上不是电磁力；与电磁力相比核力要强得多．

(ii) 核力是短程力，当两个核子的距离超过10^{-12}厘米时，这种特殊的核力就变得微不足道了．

---

1) R. Hofstadter, "Structure of Nuclei and Nucleons" (Nobel adress), *Science* **136**, 1013 (1962).

(iii) 两个质子之间的核力与两个中子之间的核力一样．而且，两个质子之间的核力与一个质子和一个中子之间的核力有同样的性质；我们可以说它们实际上是同样的核力，虽然这种说法需要一些条件．

这三个论断的证据来自一些散射实验，也来自对稳定核或放射性核以及它们的能级的系统研究．特别是关于核力是短程力的论断可以用下面方法证明：用经过加速器加速的高能质子去轰击一个原子核，然后来研究由该原子核引起的质子散射．当质子距原子核较远（即超过10^{-11}—10^{-12}厘米）时，唯一起作用的是库仑斥力．除非质子的能量很大，否则库仑斥力会阻碍质子接近原子核，使质子不能与原子核靠近到足以使核力起作用的程度．如果说核力是短程力的说法是正确的，我们便可预期，能量不太高的质子（或者象卢瑟福实验中的α-粒子）的散射好象是在只有库仑力的情况下发生的．因此我们可以通过详细分析散射实验来证明论断(ii)，其结论正如前面所说．

由于质子是带电的，它们也会受电磁力的作用，原子核中的两个质子当然会互相施以库仑斥力．当距离远大于10^{-12}厘米时，在所有实际问题中只有电磁力起作用，但是当距离较小时，核力起主要作用．电磁力在原子核结构中有一定的作用，但不起主要作用．

与这一点相联系，应当清楚地指出，*电子看来是完全不受这种特殊的核力影响*，对电子起作用的只有电磁力．

38 强大的核力是短程力，现在我们化点功夫来研究一下这个问题．就我们目前所知，在两个核子之间起作用的这个力的一般性质能够很好地用如下形式的势函数$U(r)$来表示[1)]

---

1) 关于势函数的这个形式，我们将在第九章中作理论解释．

$$U(r)\approx C\left(\frac{b}{r}\right)\exp\left(-\frac{r}{b}\right) \tag{38a}$$

其条件是距离 r 大于 10^{-13} 厘米．常数 b 是力的作用范围，其值 $b=1.4\times10^{-13}$ 厘米．常数 C 表示力的强度．当距离小于 10^{-13} 厘米时，这个力的性质要复杂得多，到目前为止对之尚了解得很少．

应强调指出，势函数 $U(r)$ 并不是准确地描写两个核子之间的相互作用，而是表示这种相互作用的一个最重要的特征，即势能随距离的增大按指数形式下降．

下面我们来看一下这到底是什么意思．当距离 $r=b$ 时，有 $U(b)=C/e$（这个常数约为 10 兆电子伏的数量级）．当距离 $r=10b=1.4\times10^{-12}$ 厘米时，势能为 $U(10b)=(0.1C)\exp\times(-10)\sim5\times10^{-6}C$．当距离 $r=100b=1.4\times10^{-11}$ 厘米时，势能 $U(100b)=(0.01C)\times\exp(-100)\sim10^{-45}C$．从这些数字运算中我们可以得出结论：当两个核子之间的距离超过 10^{-11} 厘米时，核力完全可以忽略．在所有实际问题中，当距离超过 10^{-11} 厘米时，就认为没有核力了．

对此，读者需要仔细思考一下．初看起来(38a)式与库仑势相似．但是，指数因子毕竟使情况变得毫无共同之处．我们所列举上述数字运算，就是为了使读者深入理解这一事实．

在分子和固体中原子核之间的这种特殊核力实际上是不存在的，正是在这种情况下，电磁力才有可能起主要作用．当距离小到 $r\sim10^{-13}$ 厘米时，这种特殊核力比电磁力强得多，电磁力便退居于次要地位．从原子核存在的事实立即可以看到这一情况．静电斥力要把原子核中带电粒子分开，但是核力却要把它们聚在一起，核力较强，因而取胜．

39 原子核的典型结合能为每个核子 8 兆电子伏的数量级，

因此可以预计，原子核嬗变所涉及的能量约为1兆电子伏的数量级. 从原子核发射出的物质粒子和光子(γ射线)实际上具有的能量范围一般是100千电子伏到10兆电子伏.

因此核反应所涉及的能量与化学反应所涉及的能量有完全不同的数量级，我们很容易理解为什么化学过程不会影响原子核. 从化学和原子物理学的观点看，原子核正好是一些小而坚硬、质量大、不可分的带电球.

在讨论原子时我们曾得出结论，光子的波长要比原子的大小大得多. 值得注意的是在核物理中也有类似的情况. 能量为1兆电子伏的γ射线(1兆电子伏是原子核跃迁的典型能量)的相应波长为1.2×10^{-10}cm$=1200$费米，可见，它比典型的原子核大小要大得多.

五、万有引力和电磁力

40 现在我们应当说明为什么在讨论原子、分子和原子核时略去了万有引力. 为此，我们计算两个质子之间的万有引力与静电力的比值. 这个比值与两个质子之间的距离无关，等于

$$\frac{M_p^2G/r^2}{e^2/r^2}=\frac{M_p^2G}{e^2}=8.1\times10^{-37} \tag{40a}$$

这里我们已用到了引力常数$G=6.67\times10^{-8}$达因·厘米^2/克^2.

因此，这两个力的强度之比是很小很小的，在有电磁相互作用时，我们完全可以忽略万有引力的影响. 只有当其他已知力都不起作用时，譬如两个很大的电中性物体隔开的距离远大于一般原子距离时，它们之间的万有引力才起作用.

爱因斯坦的广义相对论是万有引力的纯几何理论. 这是

一个很完美而且内在逻辑性很强的理论．但是尽管爱因斯坦和其他一些人做了很多努力，至今还没有能够不牵强地把其它自然力统一到这个理论中来．因此，万有引力现象与微观范围内影响物质结构的相互作用相差很远，看来引力与微观物理学毫无关系，这就是本书中略去万有引力的原因．请读者注意，(40a)式给出的比值不是别的，正是以自然微观单位表示的引力常数与精细结构常数之比．在当代量子物理理论中没有这样小的量的位置．也许将来什么时候能在微观物理和引力这两个表面上没有联系的学科之间，能发现一个联系环节，但到目前为止，对于如何建立这种联系，我们没有得到任何提示．

41 现在让我们来考虑在距离质子一个玻尔半径 a_0 处的静电场强度．因为 a_0 是 10^{-8} 厘米数量级，氢原子中电子的静电势能为 10 电子伏的数量级，所以我们知道这个场应是 10^{11} 伏特/米的数量级，或者精确地说

$$E_{\text{atom}}=5.14\times10^{11}\text{ 伏/米} \tag{41a}$$

与可以实现的最强的宏观静电场(强度约为 10^7 伏/米)相比，这是一个非常强的场．首先，我们得出这样的结论：在实验室里可以得到的外来电场对原子和分子的影响很小，而对原子核的影响则完全可以忽略．然而，这些影响还是可以观察到的，电场可以把原子的每条谱线分裂成频率相近的几条谱线．这种现象叫做*斯塔克效应*．

作用在原子内的电子上的静电场比实验室里用宏观方法能得到的静电场大很多，这一现象根据下面事实很容易理解．静电场有一个很重要的特点(如麦克斯韦方程所示的)，如果在某一空间区域保持着这样一个场，那么场强一定在导体的某个点上取最大值．但是导体是由原子组成的，如果作用在导体上的场强变得能与维持原子成一个整体的场强相比拟

时，则导体将开始崩溃．因此，(41a)式的估计值是可以实现的宏观静电场的绝对上限，实际上在远没有达到这个上限之前就发生电击穿了．

42 对宏观静磁场可以作类似讨论．在实验室里能够得到的静磁场必定是很弱的，其意思是：它对原子结构不能产生很明显影响．磁场也能使一条谱线分裂成几条．这个现象叫塞曼效应．

为了确定能以实现的磁场上限，我们计算能产生与 10^{11} 伏/米数量级的电场所产生的能量密度相同的磁场，这个磁场强度约为 10^7 高斯．实验室里很容易得到强度达50,000高斯的稳定磁场，在短的时间间隔内能产生接近 10^6 高斯的磁场．考虑到产生磁场的载流导体受到的应力一定不能超过把原子和固体保持成整体的力的极限，这就告诉我们不可能产生超过 10^7 高斯的静磁场．

43 如果用量子电动力学中自然场强的观点来看宏观场强时，我们可以断定，原子中的电场也很弱．我们可以把场强(电的或磁的)的自然单位定义为在空间产生能量密度为(1个静止的电子能)/(电子的康普顿波长)^{3}的场．这个电场强度单位等于 4.0×10^{17} 伏/米，而磁场的相应单位为 1.3×10^{13} 高斯．在这些场强时量子电动力学理论预见到与真空中麦克斯韦方程有明显的偏差．特别是迭加原理不再适用，不能再用线性方程来表示电磁场．实际上量子电动力学也预见到在实验室里能实现的很弱的电磁场也有对线性关系的很小的偏差．但是这些偏差出奇的小，以致在宏观上没有实际意义，事实上至今还没有在宏观实验中探测出这些偏差．以自然单位量度的宏观场所以很小，最终可以追溯到精细结构常数 α 很小，这使我们对于为什么在实际应用中线性的麦克斯韦方程是如此准确有一定的理解．

六、关于数值计算

44 下面来谈一谈有关某些物理量的理论表达式的数值计算. 读者可能会感到没有必要谈这个问题, 以为数值计算是一种必要的灾难(特别是在习题中). 认为从这种算术练习中学不到物理. 这并不完全对. 数值计算有"好", 有"坏". 作出好的数值计算需要有物理的洞察本领. 让我们举一例说明"好"、"坏"计算之间的差异. 在研究氢原子光谱的细节时,发现在分辨率较差的测量中,这些谱线看上去是一根,但当分辨率较高时, 可以看出它们实际上是由几根相距很近的谱线组成. 我们说谱线有精细结构. 在精细结构的理论研究中, 会遇到能量 E_f, 它是表征这种两条相近谱线的典型距离, 在理论上这个能量的表达式为

$$E_f=\frac{e^8 m}{32\hbar^4 c^2} \tag{44a}$$

如果直接用表 2A 中的数值来代(44a)式中出现的常数, 可以肯定这样计算 E_f 的方法是"坏"的. 因为, 首先, 必须计算 e^8 和 $\hbar^4$, 这将是一个很麻烦的事. 其次, (44a)式的意义很不明确, 在进行计算之前我们"看"不出这个能量有多大, 这样的表达式本身也不能告诉我们任何有关物理效应的性质. 但是, 我们可以先把(44a)式中的一些常数归并成几个有明确意义的因子, 写成如下形式:

$$\begin{aligned} E_f &= \frac{1}{16}\left(\frac{e^2}{\hbar c}\right)^4\left(\frac{1}{2}mc^2\right) \\ &= \frac{1}{16}\alpha^2\left(\frac{1}{2}\alpha^2 mc^2\right)=\frac{\alpha^2}{16}R_\infty \end{aligned} \tag{44b}$$

从上式的最右端可以看出, 精细结构距离 E_f 的大小是十

分清楚的；它是对粗的结构的一个微小的修正，相对数量级约为 10^{-5}. 假如要以电子伏为单位来计算能量 E_f，那么这个计算就很简单了，只要用常数 $\alpha^2/16$ 去乘 13.6 电子伏即可. 因此，很显然，象(44b)式中的因子归并可以简化纯粹的数值计算工作. 而且，(44b)式还使我们看到一些物理效应的本质. 在用纯粹非相对论理论处理氢原子(近似地认为质子质量无限大)，并略去电子本征磁矩的影响时，不会有精细结构. 要理解这一点，必须记住，在这个理论中只能有常数 e、m 和 $\hbar$，而无 c 出现. 实际上电离能 R_∞ 与 c 无关. 但是 E_f 式中出现的精细结构常数 α 与 c 成反比关系，而且在非相对论中近似认为 $c=\infty$，所以得出 $E_f=0$. 因此，我们可以认为 E_f 是对粗结构的相对论修正. 这样，可以预计这个修正值应为 $(v/c)^2R_\infty$ 的数量级，这里 v 是电子的速度. 我们已经估计出速度 v 的值，并且发现 $(v/c)\sim\alpha$，这就得出了和 (44b) 相似的表达式. 因此，氢原子中的精细结构是一个相对论效应.

45 把常数 α 定名为精细结构常数在历史上与索末菲研究氢原子精细结构的工作有关；正是在(44b)式中常数 α 第一次被认为是一个重要常数. 在玻尔介绍他的氢光谱理论时，氢的电离能 R_∞ 本来不是我们已写过的形式

$$R_\infty=\frac{1}{2}\alpha^2mc^2, \tag{45a}$$

而是

$$R_\infty=\frac{e^4m}{2\hbar^2}. \tag{45b}$$

正是因为这个原因，α 没有被叫成"粗结构常数"，这样叫应该是更恰当些. 我们必须看到(45a)式是 R_∞ 比较好的表达式，因为它能使我们更好地看出原子的性质. 正如我们已说过的

那样，α 是电磁场和基本电荷之间的基本耦合常数．因为 α 小于1，所以原子是一种“结合疏松的结构”，它带有“缓慢”运动着的电子．就是因为这个道理，非相对论理论是一个很好的近似．相对论修正值的数量级为 $(v/c)^2$，即数量级为 α^2．

46 我们希望通过这个例子来说明处理数值工作应采取的一些精神．在进行任何数值计算之前，我们总是试图先去认清式子中有物理意义的常数组合，并进行因子或项的归并．显然，做这种归并工作需要有物理洞察力，除非理解现象的本质，否则就不可能自然地而又有意义地做好这种归并工作．

本书中的问题不是为了作为单纯的算术练习，它们的目的是要使读者熟悉量子物理学中物理量的数量级，并教会读者把课文中讨论的思想应用到具体的物理问题中去．

七、提高课题：自然界的基本常数[1)]

47 现在来探讨下面一个有趣的问题：自然界到底有几个独立的基本常数？

提出这个问题的背景如下：近代物理理论指出了表征物理体系的各个参量的明确关系．例如，氢原子的电离能在理论上可以用常数 m、e 和 h 来表示，或者如果我们高兴，也可以用常数 m、c 和 α 来表示．如果已经知道常数 m、e 和 h，我们就能“预言”电离势，然后把这个预言和实验结果相比较来检验我们的理论．按照同样的意义，可以“在理论上理解”很大量的其它物理参量：即能用少数几个基本常数来表示它们．

1) 初读时可略去．

这里"在理论上理解"这句话应从非常广泛的含义上来理解．只要我们能建立一个在原则上确立某个常数的方程式，不管我们是否有足够的数学能力来计算出这个常数的数值，我们就认为这个常数是"在理论上理解"的．

把物理参量分成基本常数和导出常数的分法在原则上是任意的．实际上，我们把那些在方程式中以特别"简单"的方式出现的，而且物理意义相当明确的参数，挑出来作为基本常数．显然，把精细结构常数看作是基本常数，把氢原子电离能看作是导出量要比反过来看更为合理．

因此，一组独立的基本常数就是一组经过适当选择的物理参量，它们彼此之间在理论上没有联系．我们不知道它们的数值大小，每一个这种常数都必须用实验来测定．我们的问题是这些独立常数最多有多少个，即要想计算(预言)出所有其它物理参量至少要知道多少个常数．

显然，我们的问题只有针对当前的物理理论才有意义．因为今天认为一个常数是纯实验常数，明天就有可能在一种新的理论结构中把这常数"解释"了．

48 为了说明当前的情况，让我们把几个基本常数列在下面：

（i）精细结构常数：

$$\alpha=\frac{e^2}{\hbar c}\cong\frac{1}{137}$$

（ii）电子与质子的质量比：

$$\beta=\frac{m}{M_p}=\frac{1}{1836}$$

（iii）在自然原子单位制中的引力常数：

$$\gamma=\frac{(M_p^2G)/(\hbar/M_pc)}{M_pc^2}=5.902\times10^{-39}$$

（iv）表征所谓弱相互作用强度的常数，弱相互作用是许

多原子核的β衰变的原因．根据目前的看法，弱相互作用与强核力，电磁力或重力都毫无联系．所有涉及弱相互作用的现象看来都是自然界中一种基本(普遍)的相互作用的表现，其特征由一个单独的耦合常数来表示．这种相互作用的强度大约为核力强度的10^{-14}倍．

(v) 电子与μ介子的质量比$m/m_\mu \sim 1/200$．μ介子是一个基本粒子，除了质量较大外，其它性质与电子似乎没有区别．μ介子在基本粒子理论体系中的地位，目前几乎完全不清楚．

(vi) 最后，需要有几个常数来描述强相互作用，其中特别包括强核力．在这方面的理论研究还非常不清楚，还不知道在这个领域内到底有几个独立常数．但可以考虑下面两个量：

$$s_1 = \frac{\pi\text{ 介子质量}}{\text{质子质量}} \cong 0.15$$

$$s_2 = \frac{B_D}{M_p c^2} \cong 2.35 \times 10^{-3}$$

这里$B_D = 2.23$兆电子伏，是氘的结合能．

我们任意地选取了常数s_2，是因为它作为描述核力强度的一个可能的常数，有直接的物理意义．关于这个数并没有任何很基本之处，但是可以认为它给出了对力的强度的一种量度．换句话说，我们相信所有其它原子核的结合能在原则上都能用s_2和s_1来表示．在这里我们对于"在理论上理解事物"的含意确实不得不采用一个极宽容的观点，在这里，我们不知道"正确的方程"是什么，我们虔诚地希望有这种只包含s_1和s_2的方程存在，但这种希望可能是完全没有根据的．

真实情况是，在我们写这本书时，我们还不能真正算出象K介子，核子，λ粒子等这类粒子的质量比．我们没有一个

基本理论可用来做这种计算，很可能，在我们的基本常数单子上要列出所有这些质量比．但另一方面，可能有一天会出现一个理论，通过这个理论我们能算出某些或者全部强相互作用粒子的质量．根据最乐观的看法，“正确”的理论将会使强相互作用物理学不包含任何实验常数，一切都是通过计算求得的，包括 s_1 和 s_2．但是，目前应该认为表征强相互作用的常数数目的问题是完全没有解决的．

49 在我们的单子里没有包括一个非常值得注意的实验决定的常数，即电子和质子的电荷比．根据 J. G. 金在 1960 年做的实验，这个比值等于 -1，其精确度为 $1/10^{20}$．他用类似的方法还测量了氦原子核与质子的电荷比，并发现这个比值等于 2，精确度同上[1]．这些结果有力地支持任何粒子的电荷一定是电子电荷的整数倍的看法．已经有许多证据支持这个看法，尽管在绝大多数情况下，这些证据都不象 J. G. 金的测量那样严格．事实上，物理学家早已相信“电荷是量子化的”．但是，为什么所有电荷必定是电子电荷的整数倍并没有理论上的解释．

那么，为什么不把常数 (-1 ± 10^{-20}) 列进我们的单子里呢？因为，我们的理论是这样的，假如这个常数不是真的等于 -1，我们将会感到这理论被推翻了．我们可以默认这种可能，即真正列在单子里的常数都会有微小的差异，正是从这个意义上说它们是实验常数．假如精细结构常数大了 1%，并不会推翻量子电动力学，我们所知的自然定律不需要发生任何本质上的变化．但是关于电荷量子化的情况就不一样了，因为我们的理论结构是以这个原则为依据的．

---

1) 这里说的是一个合理的推论，他实际做的工作是证明氢分子和氦原子在上述的精确度范围内是中性．[J. G. King, “Search for a small charge carried by molecules,” *Physical Review Letters* **5**, 562 (1960).]

50 作为原子、分子和大块物质的理论的量子电动力学实质上只包含两个基本实验常数，即 α 和 $\beta=m/M_p$. 我们这样说的意思是相信在原则上我们已经知道在物理学这个领域中的所有物理量与这两个常数的关系. 不同原子核的性质只决定于整数 Z 和 A, 而原子核的其它物理特征对原子、分子和大块物质只有"很小"的影响.

因此，我们的这种说法是对实际情况的一种简化，但要追究下去是很有意义的. 初看起来，上述说法好象是错误的，因为列在表 2A 中的"基本常数"肯定多于两个. 但是，应该注意，表 2A 列出的常数是以完全人为规定的单位 (人类单位) 为依据的，它们的数值根本没有绝对的意义.

因此，要想知道大块物质的性质，就必须分清哪些是基本物理量，哪些是与所选的单位有关的量. 以声音在晶体中的传播速度为例来说，若以厘米/秒为单位求这个速度，这就不是一个"基本"问题，因为答案与选取的厘米和秒的定义有关. 最明确的理论问题是求声速 c_s 与光速之比；很明显，这个量与一切宏观标准无关. 可以肯定，原则上这个量在量子电动力学里是能算得出的.

51 为了理解表 2A 中所列常数的真正意义，我们来讨论一下宏观单位制的定义.

千克，按照国际协议规定它是保存在巴黎的一个特定金属块的质量. 为了表明我们所指的金属块，用 $(\mathrm{kg})_P$ 来表示这个单位，"巴黎千克". 克的定义是 $(\mathrm{gm})_P=(\mathrm{kg})_P/1000$.

这个金属块包含有一定数量的核子，譬如说 n_1 个. n_1 的准确数值是不知道，但原则上可以数得出来. 假如在核物理和强相互作用理论中我们可以算出每个原子核与质子的质量比，那么，就可以用下面形式写出保存在巴黎的金属块的质量

$$(\mathrm{kg})_P = n_1 c_1 M_p = n_1 c_1 \beta^{-1} m \tag{51a}$$

这里 c_1 是一个常数，接近于1，是通过计算得出来的．严格地说，它与 α 和 β 有关，但这种关系是很弱的．数值 n_1 虽然不能准确地知道，但它是国际协议规定的一个常数，是巴黎金属块中的核子数．

52 对于米有，或者说曾经有，两个标准．在旧标准中米是保存在巴黎的一个金属棒上两条刻痕之间的距离，我们用 $(\mathrm{m})_P$ 来表示这个米，叫"巴黎米"．新的标准在本质上是"原子的"，与此相应的米，我们用 $(\mathrm{m})_a$ 来表示，叫"原子米"，其定义为氪光谱中一确定的橙色谱线波长的某个倍数，国际协议规定这个倍数为 $n_2=1,650,763.73$.

橙色氪谱线的波长在原则上是可以计算的(但实际上不能)，而且可以写成下面的形式

$$\lambda = c_2 \alpha^{-2}\left(\frac{\hbar}{mc}\right) \tag{52a}$$

这里 c_2 是个常数，与 α 和 β 的关系非常微弱．在一级近似中，它是个单纯的数值常数，如果掌握了原子物理中的数学，我们就能求出这个数．

因此，原子米可以写成

$$(\mathrm{m})_a = n_2 c_2 \alpha^{-2}\left(\frac{\hbar}{mc}\right) \tag{52b}$$

53 虽然目前秒是按天文学标准定义的，但是采用时间的"原子标准"看来已是迫切需要了．让我们超越历史[1]，假设已经采用了原子标准，并且用铯原子在射频区的某一跃迁频率来定义秒．这个频率是铯原子核自旋在轨道电子场中的进动频率，已被非常精确地测定，其值(以天文秒为单位)为

1) 实际上1967年第十三届国际计量大会已决定采用时间的"原子标准"，作为秒的新定义。——译者

$$\frac{1}{T_0}=\nu_0=9,192,631,770\pm10\text{ 周/秒} \tag{53a}$$

这个数的精确度代表了在射频测量中能够得到的精确度的特征，(根据量子电动力学)这个频率的理论表达式为

$$\nu_0=c_3\alpha^4\beta\left(\frac{mc^2}{\hbar}\right) \tag{53b}$$

这里c_3是个数字常数，几乎与α和β无关；如果知道了有关铯原子核的一些数据，在原则上就能算出这个数值，但实际上做不到．因此，设想我们按下式来定义秒，用$(\sec)_a$即"原子秒"来表示：

$$\begin{aligned}(\sec)_a&=(9,192,631,770)T_0\\&=n_3c_3^{-1}\alpha^{-4}\beta^{-1}\left(\frac{\hbar}{mc^2}\right)\end{aligned} \tag{53c}$$

这里T_0是这种原子振荡周期，根据国际规定，

$$n_3=9,192,631,770.$$

54 最后，我们来考虑长度的旧标准，巴黎米$(\mathrm{m})_P$. 它的定义是一个金属棒上两个刻痕之间的距离，因此等于某一串原子排列起来的长度．设排在这条线上的原子数目为n_4，由于它是排在金属棒上两刻痕之间的原子数目，所以从某种意义上说，这个数值是由国际协议规定的(尽管这个数并不能精确地知道)．金属棒上相邻两原子间的距离在原则是可以算出来的，此距离的表达形式为c_4a_0，a_0是玻尔半径，c_4是个常数，与α和β的关系十分微弱．因此，巴黎米可以写成

$$(\mathrm{m})_P=n_4c_4\alpha^{-1}\left(\frac{\hbar}{mc}\right) \tag{54a}$$

由于明显的技术原因，这个长度标准已经不用了，两刻痕之间的距离本身就是一个不很确定的量．用两个光波波长进行比较可以有较大的精确度．因此，我们就没有理由一定要

用金属棒的长度来表示这些波长了.

55 上述讨论说明了宏观标准的真正本质. 它们都是由多少有点任意选择的"原子参量"和国际协议规定的数 n_1, n_2 和 n_3 来定义的. (如前所说, 实际上我们不能准确知道 n_1, 它的定义不是直接的.)现在我们指出下面几点:

(i) 要测量一个光波的波长就是将这个波长与橙色氪线的波长相比较. 这种比较可以做得很精确, 因此, 光波波长是一些精确测定的量. 里德伯常数 $\tilde{R}_\infty$ 本质上是光波的波数, 这就是为什么这个常数能够知道得如此精确的原因. 最精确的长度测量不是别的, 就是光波波长之比的测量. 这些数据可能具有理论意义; 假如我们对原子光谱理论掌握得足够好, 以致能比较精确地推算出这些波长比, 我们就能对理论和实验进行有意义的比较. 但是, 我们的计算能力是非常有限的, 因此, 这种波长测量的实际理论意义也是有限的.

(ii) 我们能非常精确地比较在射频区域的两个频率. 如果我们要测量一个原子或分子在该区域的频率, 实际上就是把它和铯的频率相比较.

(iii) 测量光速就是把橙色氪线的频率与铯频率相比. 因此,这不是一个"基本物理常数"的测量,而是用一个任意规定的时间标准来推算一个任意规定的长度标准.

56 请看(51a), (52b), (53c)和(54a)式. 它们借助下面三组数给出了宏观标准的理论表达式: (i)国际协议规定的数 n_1, n_2, n_3 和 n_4; (ii)量子电动力学的基本标准 m, $\hbar/mc$ 和 $\hbar/mc^2$; (iii)量 c_1, c_2, c_3 和 c_4,这些量我们相信在原则上是可以算出的.

即使实际上我们不能精确地算出量 c_1, c_2, c_3 和 c_4, 但是我们知道, 在取一级近似时它们是与 α 和 β 无关的纯数字参

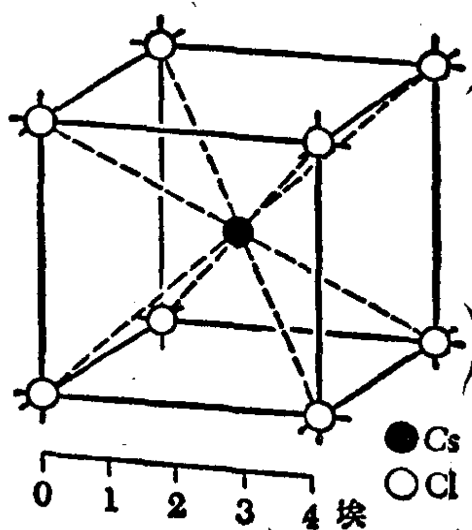


图 54A 提醒读者注意，在任何固体中原子间的距离都是玻尔半径 a_0 的数量级. 上图是氯化铯的晶体结构. 这种晶格叫做体心立方晶格. 可以这样描述：氯原子构成立方晶格，铯原子居于每个立方体的中心，请注意，这个结构与氯化钠的结构不一样. 氯化钠的结构请看第一章图 30A.

氯化铯的化学式是 CsCl，晶格中包含有相等数量的铯原子和氯原子. 相信读者自己可以看清楚，图中包含这个意思，虽然乍看起来，似乎在晶格中氯原子多于铯原子.

数. 如果我们能够真正算出这些数，这就意味着我们能以 $(\mathrm{m})_a/(\mathrm{sec})_a$ 为单位算出光速的数值.

这些宏观标准的理论表达式使我们能够处理如下问题：如果自然常数发生微小变化时，世界的面貌将会如何？这就是说：如果两个实验常数 α 和 β 发生微小变化时，世界将会变成什么样子？这是一个很有意义的问题，因为它检验我们是否正确理解 α 和 β 在世界上所起作用. 这个问题留给读者去思考；他应当在读完这本书之后，再回到这个问题上来.

57 如果我们要问，为什么原子的大小是 10^{-10} 米的数量级；

为什么原子是这么小？听起来，好象这是一个故弄玄虚的问题，但其实不然．假如我们把这个问题改成下面的问法：为什么人的大小为 $10^{10}a_0$？这是同一个问题，因为根据米的定义，人体大小的数量级为一米．如果我们能说出人体中原子的数目，我们就能粗略地回答这个问题，这个问题在原则上并非物理学上不可能回答的．如果要想准确地算出这个数目那是荒谬的，但是我们应该能估计到某一个数量级，譬如说 10^6．（如果我们对生物学和有关学科有比较多的了解，就能做到这一点．）我们把这些轻率的推测留给读者．这里我们提出这个问题只是要说明我们生活所在的宏观世界中的所有的性质最终是取决于基本粒子和它们的相互作用．

问　　题

1．1903 年 P．居里和拿波德研究了镭的热发射．他们发现一克纯镭（现在知道其中包含有同位素 $_{88}Ra^{226}$）发射出 100 卡／小时的热．根据这个数据和已知的半衰期近似计算放射出的 α 粒子的能量（以兆电子伏为单位）．在居里和拿波德的实验中，这些粒子在放射源和量热器内被俘获，因此，它们的动能转变成热能．（半衰期是 1622 年）

2．(a) 镭原子核具有正的质量亏损，但是，它仍然不稳定，会衰变．为什么这是可能的？质量亏损为正值是不是稳定的充分和必要条件？试详细说明之．

(b) 上面提到的镭的同位素 $_{88}Ra^{226}$，是 P．居里和 M．居里发现的．它放出 α 粒子而衰变．α 粒子不是别的，就是氦原子核 $_2H^4$．

寿命短的同位素在地质年代里应该早已衰变完了．因此，我们似乎可以认为在自然界只有稳定的原子核或寿命很长的同位素存在．但是与地球的年龄相比，半衰期为 1622 年不算特别长；而是相当小．那么如何解释有天然存在的镭呢？

3. 在放射性原子核，如 Ra^{226} 的衰变中，我们发现一个值得注意的情况：镭的寿命是"意想不到的长"。试用核物理和电动力学的基本常数组合成一个"自然的时间"，并以秒为单位求出其值。不管你怎么用这些常数（不管你用得多好），你都得承认 Ra^{226} 的寿命太长了。显然，我们这里遇到了一个以后要解决的问题；所观察到的现象实际上是可以解释的，这个长寿命的原因（或者也可以说，这种衰变的原因）是一个有趣的量子力学效应，称为隧道效应。

4. 太阳以 3.86×10^{26} 瓦的功率从它表面辐射出能量。在原子核物理发展之前，要解释如此巨大的能量究竟从何而来的确是个难题。下面我们试作一些简单的估计。

据信太阳至少已有 40 亿年的历史。太阳的质量为 1.98×10^{30} 千克。

(a) 为了说明这么大辐射功率，太阳每年要有多少质量转变成辐射能？你会发现，这个数字说明太阳在过去 40 亿年中没有发生多大的变化。

(b) 排除化学反应是能量源。

(c) 你知道在太阳内部可能发生什么样的核过程，这个过程能用来解释太阳辐射能量的来源？参考某些天文学入门的书籍，并通过一些简单估算来证明你的解释是讲得通的，或至少与事实没有明显的矛盾。

5. 我们曾说过核物质密度，即原子核内部物质的密度，对于所有原子核大体上都是一样的。试用宏观单位，克/厘米^3，写出这个密度。

6. (a) 参考第 17 节的讨论，试估计在室温条件下氮气中一个氮分子的平均能量和平均速度。一个氮分子是由两个氮原子组成。（以电子伏为单位写出能量。）

(b) 在大气压强和室温条件下，一摩尔氮气（或任何其他气体）占据的体积为 22.4 升。设氮分子具有"典型的分子大小"，试估计一个氮分子每秒钟碰撞的次数。将此碰撞频率与典型光学频率相比较。

7. 氢谱线中有一条谱线的波长是 4861.320 埃。H. Urey 在 1932

年发现这条谱线有一条暗淡的伴线，位于4859.975埃．[参看 *Phys. Rev.* 39,164(1932)；40,1(1932).]其解释是通常的氢从同位素讲不是纯的，它是两种同位素 $_1H^1$ 和 $_1H^2=D$ 的混合物．较重的同位素氘原子只占0.015%，这个同位素就引起了上述的暗线．

在研究氢光谱时，取一级近似可以忽略原子核的运动．现在我们试把原子核的运动也考虑进去．这时不再是原子核固定不动，而是原子核和电子的质心不动．因此，用考虑原子核运动的理论定出的谱线位置与把原子核看成无限重的理论所确定的谱线位置稍有偏移，偏移的数值当然与原子核的实际质量(在本例中与质子或氘核的质量)有关．

试用一简单理论来说明上述两个波长的比．用这两个波长来计算氘核和质子的质量比，并将所得结果与原子核质量表中的数字相比较．

8．单电离的氦，即失掉一个电子的氦原子，和氢原子类似，是由原子核和一个绕核运动的电子组成的体系．因此，我们可以料定单电离氦所发射的谱线完全类似于氢原子所发射的谱线．但是，这两个体系并不全同，氦原子核带有两个基本电荷，而氢原子核(即质子)只带一个．按照本章所说的观点，通过与氢相比较，就有可能找出单电离氦中由于中心电荷的增加在谱线上产生的后果；因此，知道了氢的谱线波长也就有可能知道单电离氦发射的相应谱线的波长．换句话说，无需详细的原子结构理论，就有可能求出这些相应波长的比．

有一条可见氢谱线的波长是6562.99埃．单电离氦发出的与此相应的谱线的波长是多少？此谱线是否在可见光区？

在此，我们可以认为两个原子核都无限重．此例告诉我们，朴素的量纲论证(如第27节中所介绍的)有时也能用来作出精确的定量预测．

9．设 α 粒子与电荷数 Z 和质量数 A 的原子核正碰．要使 α 粒子能正好到达原子核表面，它就应该具有一定的能量，试导出这个能量的表达式，即其与质量数 A 的函数关系．为了简单起见，假定在碰撞时原子核不动，$A=2Z$，而且 α 粒子是一个没有大小的点电荷．如果 α 粒

子没有达到原子核表面，短程核力就不会起作用．这时，碰撞的过程中好象只有静电力起作用．因此，很粗略地讲，你算出的能量是一个特征量，当大于这个能量时，散射的结果与只考虑静电力得出的结果就开始有明显差别．

10．本题讨论原子核中静电斥力的能量．既然核物质密度大体是一个常数，因此我们可以认为原子核是一个均匀的带电球．当原子核不是太轻时这个模型是合适的．

(a) 试证明对于质量数 A 和电荷数 Z 的原子核，其静电能 U_e 为

$$U_e \cong A^{5/3}\left(\frac{Z}{A}\right)^2 \times (0.7\ \text{兆电子伏}) \qquad \text{(i)}$$

我们进一步假定中子数等于质子数，即 $A=2Z$．这样，从(i)式就能得出每个核子的静电能的表示式，即

$$\frac{U_e}{A} \sim A^{2/3} \times (0.17\ \text{兆电子伏}) \qquad \text{(ii)}$$

应该把这个能量与一个核子的平均结合能（约 8 兆电子伏）相比较．这样就可以看出，当 A 不是太大时，每个核子的静电能很小．但是，随着 A 的增大，这个能量也变大，这一情况正是解释了第 33 节中提到的那种有规则的变化趋势．按照这种特定的核力的性质，如果只有核力作用，最稳定的原子核应具有差不多等量的中子和质子．但是，由于电磁力也有作用，这两种力同时存在的结果会使原子核比较容易带有过量的中子，随着质量数 A 的增大，原子核带过量中子的趋势也增大．

(b) 为了验证对原子核的这一描述，我们来讨论下面的事实．（不稳定的）氟同位素 ${}_9F^{17}$ 和氧同位素 ${}_8O^{17}$ 质量相差 $M(17.9)-M(17.8)=3.0\times10^{-3}$ 原子质量单位．我们看到第一个原子核有 9 个质子和 8 个中子，而第二个有 8 个质子和 9 个中子．换句话说，通过质子和中子的交换，我们就可以由一个原子核得到另一个原子核．我们说这是一对镜象核．

在课文中我们说过中子和质子具有非常相似的物理性质，如果这是对的，就应能预见上述两种原子核的质量亏损是相等的．但是质子和中子的电荷不一样，两个镜象原子核的区别也就在这里．假定两个

镜象核除了电荷之外其它都一样，根据静电斥力能量，我们就可以算出它们质量亏损的差别. 试进行这一计算来看一看这些想法的正确程度.

11. 有几个有名的重原子核会通过裂变而自发衰变. 在此过程中原子核分裂成近乎相等的两块，每次裂变约放出200兆电子伏的能量. 用中子轰击的办法也可以引起裂变. 原子核吸收入射的中子而处于激发状态，然后从激发态裂变. 铀的同位素 U^{235} 就是原子核吸收中子之后容易发生裂变的一个例子. 由于与元素周期表中间部分的元素相比，重元素有比质子数多的过量中子，因此，在裂变过程中会放射出几个中子. 这种情况可能引起链式反应：裂变中放出的中子引起更多的可以裂变的原子核发生裂变，这些裂变又放出更多的中子，等等. 原子核反应堆和(裂变)原子弹就是根据这个原理制成的.

(a) (以卡和千瓦-小时为单位)试估计一克 U^{235} 完全裂变时放出的能量，并将此能量与一克物质在发生典型化学反应时所放出的能量作一比较.

(b) 一小块金属 U^{235} 不会发生自发爆炸，而一大块 U^{235} 却会自发爆炸，如何解释这一现象?

(c) 为了研究裂变中释放出来的能量的来源，根据第10题中关系式(i)来研究裂变前原子核(如 U^{235})的静电能和(裂变后)碎片的总静电能. 显然，有部分静电能将被放出. 试计算这个能量，并与200兆电子伏/裂变的值相比较.

12. 两个氘核的质量比 α 粒子(＝核 $_2H^4$)的质量大. (参看原子质量表4A.)

(a) 计算一克氘聚变成氦时放出的能量，并与裂变时放出的能量相比较.

(b) 为什么一个装满氘的容器不会自发爆炸?

13. 假设电子是一个经典的点粒子，并设原子中的电子是在与 z 轴垂直的平面的轨道上运动，这种运动方式使得电子的角动量是个常数，等于 $\hbar$.

(a) 电子的有效磁矩是多大? 我们称此磁矩为一个*玻尔磁子*.

(b) 将一玻尔磁子的磁矩放在1000高斯的磁场中，问在磁矩与磁

场同向和反向这两种情况下能量(以电子伏为单位)有何不同?

(c) 假设在铁晶体中每一个原子的位置上都有一玻尔磁子的磁矩,而且设所有这些磁矩的取向都相同. 问这样形成的磁化强度是否与饱和铁磁体中的磁化强度大小相同?

这里,我们关心的是估计原子中可能有的磁矩的大小. 不要把原子磁性的朴素经典模型看得太当真. 但是已经证明玻尔磁子确是原子的典型磁矩. 在对原子磁性作完全的量子力学讨论时,人们认识到磁矩有两个来源: 一个是来源于电子的"轨道运动",它与经典磁矩类似; 另一个是来源于电子的自旋,即电子还具有本征角动量, 这与小弹子球绕其中心轴旋转的角动量相似. 这个自旋角动量的大小是$\hbar/2$, 其相应磁矩很接近于一个玻尔磁子.

本题(c)计算的目的是想看一看是否有希望用原子磁矩来解释铁磁性. 计算结果是令人鼓午的. 但是, 必须说明一下, 铁磁性是一个复杂现象,我们的简单计算并不能说清楚其全部问题.

14.[1] 在第51—56节中, 我们讨论了某些宏观测量标准的"原子性质".

假设, 目前我们已经比较而且调整了我们的标准, 使得$(\mathrm{m})_P=(\mathrm{m})_a$, 而且按照这些标准基本原子常数$e$, m, M_p, c和$\hbar$就是表2A中列出的数值. 并假设在1988年5月30日上午1时, 常数α和β突然变为

$$\alpha'=\alpha(1+u),\ \beta'=\beta(1+w)$$

然后保持在这些新的数值不变. 我们将设u和w都很小,比方说为1%的数量级; 否则世界秩序的变化会太激烈了. 这个自然灾难当然是会被注意到的(当从最初震惊苏醒过来之后), 在某一段时间里物理学家忙于重新测量他们的神圣常数. 我们用一撇来表示这个大灾难后的各种量.

(a) 求$(\mathrm{m})'_P/(\mathrm{m})'_a$.

(b) 电子质量和质子质量的新数值各是多少? [以新巴黎克$(\mathrm{gm})'_P$为单位.]

1) 本题是有关提高课题的.

(c) 在 $(\mathrm{m})'_a/(\mathrm{sec})'_a$ 单位制中,光速的新数值 c' 是多少?

(d) 普朗克常数的新数值 $\hbar'$ 是什么?

(e) 在静电单位制中电子电荷的新数值是多少? 如以库仑为单位,这个新数值又是多少?

(f) 在大灾难以后铜的密度是多少? [以 $(\mathrm{gm})'_P/(\mathrm{cm}^3)'_a$ 为单位.]

第三章　能　　级

一、谱　项　图

1　每个化学元素都有一个独特的光谱与之相联系，这个事实是自然界里令人惊异的表现之一．自然界的这个特色十分普遍：不仅原子有特征光谱，分子和原子核也具有特征光谱；这些客体发射和吸收某些确定频率的电磁波，其频谱从射频（分子光谱）起直至极短的X射线波段或γ射线波段（原子核光谱）．历史上，元素的光谱首先是由G. R. 基尔霍夫与R. 本生在十九世纪中叶发现的，而分子的射频谱和原子核的γ射线谱则是在晚得多的时候，迟至本世纪才发现的．

我们用原子、分子和原子核的能级来解释光谱．通过对光谱的研究我们开始了解到复合体系的一个极其重要的性质，即每一个这样的体系都有一组它所特有的能级，即定态．我们在“小”的体系中，如原子、分子和原子核中发现了这些能级，在这时它们非常直接地呈现于我们所观察到的光谱中．我们在“大”的体系里，诸如固体、液体和气体中，也发现了这些能级．初看起来，我们或许不会想到原子核发射和吸收γ射线跟某些电子装置中石英晶体的振动之间存在什么联系，但事实上确有这种联系．

2　本章我们将研究在“小”的体系中的能级，我们将讨论一些有关的实验事实，并试图在很简单的理论概念的基础上理解所观察到的现象的某些方面．本章我们不拟解释能级何以产生，而宁可把自然界的这个特色看作是一个基本的经验事实，

4742.5—4728.6 A.

Wave-length	Ele-ment	Intensities Arc	Spk.,[Dis.]	R
4742.589	Mo	–	10	–
4742.549	Er	3 w	–	–
4742.5	bh Sc	5	–	Me
4742.481	Sm	3	–	–
4742.392	Nd	4	–	–
4742.333	U	10	3	–
4742.325	Pr	7	–	–
4742.266	Th	4 l	2	–
4742.25	Se I	–	[500]	Rd
4742.227	Sm	2	–	–
4742.110	Ti I	15	1	–
4742.04	Ho	10	3	Ex
4741.997	Er	3 w	–	–
4741.937	Ge II	–	50	–
4741.922	Sr I	30	–	ISn
4741.78	Cd II	–	3	Vs
4741.775	Eu	10 W	–	–
4741.726	Sm II	80	–	–
4741.71	O II	–	[20]	Fl
4741.539	Dy	3	2	–
4741.533	Fe I	12	1	S
4741.520	W	12	2	–
4741.503	Pr	30	–	–
4741.404	Yt I	2	·3	–
4741.398	Er	20	–	–
4741.282	U	1	2	–
4741.269	Ru	4	–	–
4741.10	Tm	3	–	Me
4741.018	Sc I	100	60 h	–
4741.005	Pr	6	–	–
4740.97	Se II	–	[600]	Bl
4740.928	Dy	3	2	–
4740.68	Cl I	–	[10]	Ks
4740.614	Cb	3	3	–
4740.524	Eu	500	2	–
4740.517	Th	20	15	–
4740.5	bh Zr	8	–	L
4740.40	Cl II	–	[150]	Ks
4740.359	Mo	5	5	–
4740.331	Ru	7	–	

Wave-length	Ele-ment
4737.642	Sc I
4737.626	U
4737.561	Pt I
4737.350	Cr
4737.282	Ce
4737.1	bh C
4737.05	Tl II
4736.965	Zr
4736.958	Sm
4736.945	Er
4736.9	bh Z
4736.79	Dy
4736.782	Ca
4736.780	Fe
4736.688	Pr
4736.637	Me
4736.608	Eu
4736.6	Rt
4736.491	Ct
4736.490	S
4736.30	T
4736.203	[illegible]
4736.151	[illegible]
4736.116	
4736.089	
4736.062	
4735.94	
4735.93	
4735.848	
4735.847	
4735.77	
4735.76	
4735.66	
4735.4[illegible]	
4735.4[illegible]	
4735.3	
4735.3	
4735.[illegible]	
[illegible]	

图1.4　波长表中的很小一部分示样:《麻省理工学院波长表》,在G. R. Harrison 指导下编纂而成(MII Press, Cambridge, Mass. 1939). 这本 429 页的表中列载了 10,000 埃和 2,000 埃之间的 100,000 条以上的谱线. 每页有三栏; 谱线按波长减少的次序排列. 对应于每条谱线的化学元素已经标出,有些激发方式和强度上的数据亦载于表中.

通常编列的可见光区域内的波长是在空气中测得的,而紫外区域中的波长则是在真空中测得的,在可见光区域我们近似地有 $\lambda_{vac}=\lambda_{air}$.

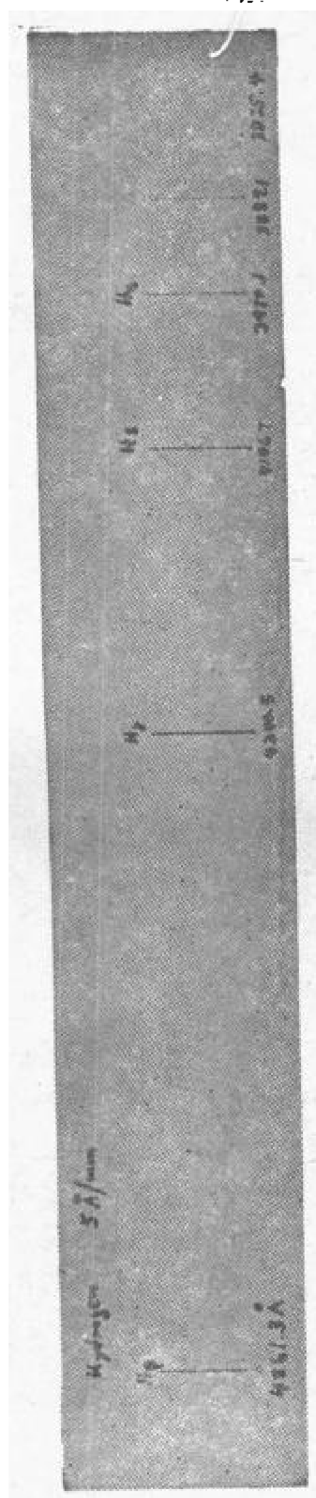


图1*B* 氢光谱(波长单位是埃)。这个光谱在可见光区中的表现，初看起来并无特异之处，然而，氢原子的波长引起了极大的兴趣。由于氢原子是可能有的最简单原子，它对所有的原子理论都起了试金石的作用：必须解释这个光谱。玻尔能够说明这些谱线，这件事在我们对于自然界的理解上是一个惊人的进步。现代量子力学已能说明这个照像底板图上可见到的任何细节以及更多的事情，在物理学的记录上，氢原子理论的历史的确是绚丽多彩的一页。

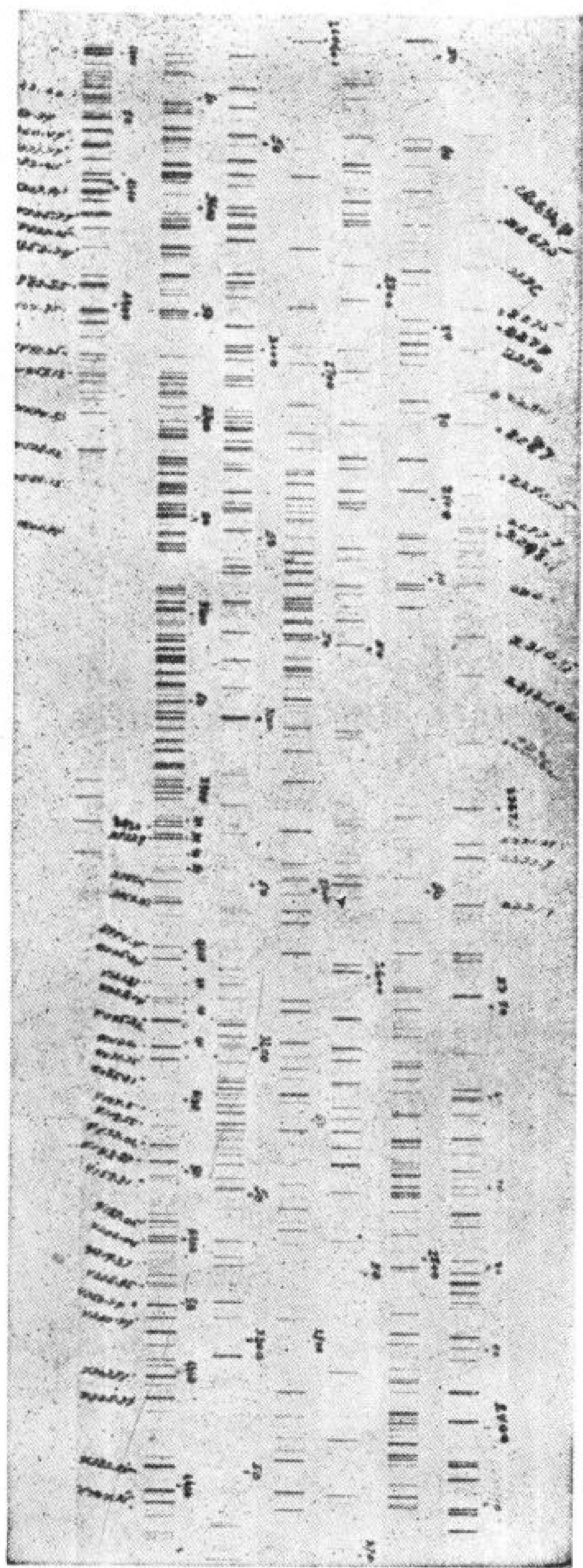


图1C　在同一块玻璃底片上摄得的铁光谱的若干部分．片上波长的单位是埃，这张特定照片的目的并非用以测量铁的波长，而是要利用这些熟知的波长去对石英棱镜摄谱仪图进行定标。

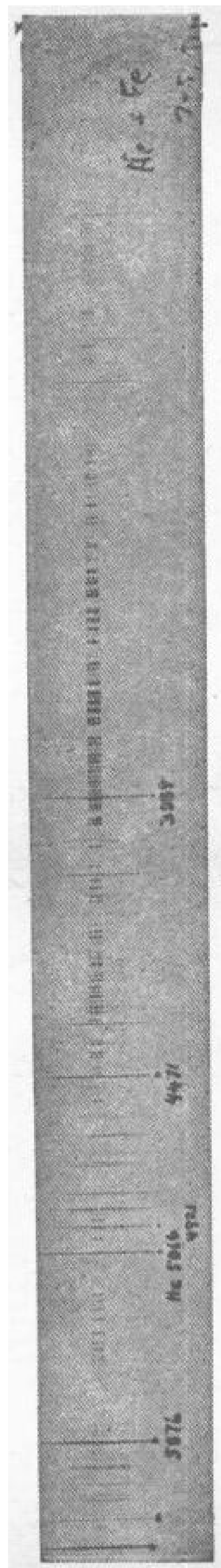


图1D 迭加在铁光谱（短线）上的氦光谱（长线）。底板上的数字是以埃为单位的某些氦的波长。铁光谱的复杂性和氦光谱的简单性成为鲜明的对比。

在第八章中，我们将面临着解释能级的挑战，并且将看到如何在量子力学的基础上理解它们.

本章中所讨论的许多原子光谱的特色早在原子构造的一个满意理论，(即量子力学)形成之前就已发现，就这种含义而言，我们的叙述次序实际上有点类似于本课题的历史发展. 然而，我们的叙述并不*真正*是历史的，我们将比较广泛地讨论与能级有关的经验事实. 因此，也将讨论到原子核，尽管在历史上知道它的特性是很迟的.

3 原子光谱的某些显著的规律性早就受到了注意. 作为例子，我们说一下里兹组合原则，根据这个原则，在一个元素的许多谱线中，任一谱线的波数等于其他某两条谱线的波数之*差*，或*和*. 比方说，在某个元素[1)]中观察到下列谱线：

$$\tilde{\nu}_1=82258.27\ \text{厘米}^{-1};$$
$$\tilde{\nu}_2=97491.28\ \text{厘米}^{-1};$$
$$\tilde{\nu}_5=15232.97\ \text{厘米}^{-1}.$$

我们有 $\tilde{\nu}_2-\tilde{\nu}_1=15233.01$ 厘米$^{-1}$. 这个差值与 $\tilde{\nu}_5$ 如此接近，以致我们难以相信这种符合纯系"偶然"，由于对同一个元素的其他谱线以及许多其他许多元素的谱线都呈现出同样的特点，就更不是偶然的了.

后来发现了一条更一般的原则. 一个原子发射的任何谱线的波数 $\tilde{\nu}$ 可以表示为两个光谱谱 T' 和 T'' 的差 $\tilde{\nu}=T'-T''$. 每个原子都有一组这样的光谱项 (表示为波数) 作为它的特征，称为该原子的*光谱项系*.

这个原则包括了里兹组合原则；设三根谱线与三个光谱项有下述联系：

$$\tilde{\nu}_{12}=T_1-T_2,\ \tilde{\nu}_{13}=T_1-T_3,\ \tilde{\nu}_{23}=T_2-T_3 \qquad (3a)$$

---

1) 我们不拟在此揭示出这种原子的名称，那样会使本章末的问题 *1* 索然无味.

则我们有

$$\tilde{\nu}_{23}=(T_1-T_3)-(T_1-T_2)=\tilde{\nu}_{13}-\tilde{\nu}_{12} \qquad (3b)$$

这就是组合原则的一个例子.

4 今天我们将一个谱项解释为相当于原子的一个能级. 因此,就把光谱系解释为表征该原子的能级组的一种表现方式. N. 玻尔首先在他的氢原子论文中提出了这个思想[1].

让我们按照有关电子辐射的量子本性的理解来考虑这件事. 频率为 ν 的光量子, 即光子(因而其波数为 $\tilde{\nu}=\nu/c$) 带有能量 $E=h\nu=(hc)\tilde{\nu}$. 如果波数是两个谱项 T' 与 T'' 的差,那么这个能量就是两个能量 $E'=(hc)T'$ 和 $E''=(hc)T''$ 的差. 因此, 谱项也可以表示为能量、波数、或频率. 因为这些量总是通过常数 h 和 c 相联系. 由此我们可以说, 一张光谱项表也就是一张"能级"表. 正如我们将见到的, 这种表达方式有真实的物理含义: 它不仅仅只是术语上的改变.

5 在某些原子光谱和原子结构的初步描述中,大体上是按如下方式说明的,即作出两个理论上的假设:

I. "原子只能存在于某些确定的内部运动的定态中. 这些定态组成一个离散的集合, 每个定态的特征是具有一定的总能量."

II. "当一个原子发射或吸收电磁波时, 它从一个定态跳到另一个定态. 如果原子从一个能量 E_u 较高的定态跳到能量 E_l 较低的定态 (因此 $E_u>E_l$), 将发射一个光子, 频率 ω 是[2]

$$h\nu=\hbar\omega=E_u-E_l,$$

这个发射过程的逆过程则是吸收一个频率为 ω 的光子,

---

1) N. Bohr, Philosophical Magazine, **26**, 1 (1913).

2) 正如第二章第 8 节所说明的, 与有关量 $\omega=2\pi\nu$ 都称为"频率", 类似地 h 与 $\hbar=h/2\pi$ 都叫普朗克常数,下面大多用 ω 与 $\hbar$, 因为作者更愿使用它们.

那时原子从低能态跳至高能态."

现在我们应当直接注意到,如果按字义解释上述假设,那么第一个假设显然是错的."较高的态"不能绝对地稳定或根本不能稳定,因为原子的确会由这些态自发地衰变.按宏观的时间尺度,这种衰变是非常迅速的.我们可以引用 10^{-8} 秒的时间作为数量级上的估计,来描写原子激发态的典型寿命.然而,我们应当注意,按原子时间的标度,这样的寿命是相当长的.一个光学光子[1]的频率数量级相当于 10^{14} 秒$^{-1}$,因此对应的周期远比一个激发态的典型寿命短得多.

关于第二个假设我们可以说,它不是很说明问题的:我们完全不知道原子从一个定态"跳"到另一个定态意味着什么.某些作者实际上完全不愿使用"跳"这个字,而宁愿说"原子从一个定态跃迁到另一个定态."这种表达方式无疑听来更有学问,但很难说对知识会有什么增加.当原子跃迁时,精确发生的事情又是什么呢?

尽管我们刚才说了那些话,读者不应将两条假设作为无意义的命题加以屏弃:应当把它们视为描写极复杂现象的第一级近似,在这种程度上它们是有用的.

6 为了说明在原子(或分子、原子核)中所有被观察到的谱线,我们试图为原子建立一个光谱项系,或能级系统,后者可理解为一系列的能级 E_0, E_1, …等等编列成的表,这样每根观察到的谱线对应于光谱项系的两个能级间的一个跃迁.

如此建立的能级系统常常以谱项图的方式用图象表示出来,如图 6A 所示.水平线表明了系统的四个能级,能级间的竖线指出了可能的跃迁,而箭头表明了跃迁是向上(吸收)或向下(发射).六个可能的跃迁频率列于图下,通常在画谱项图时用了线性的竖直能量标度,因此,这些跃迁频率就正比于

1) 光学光子,原文为 Optical Photon,是指可见光的光子.——译注

能级间的箭头(或线段)的长度.

如同图上所显示的那样，比较少的谱项描写了为数甚多的谱线：从 n 个能级可能挑出能级对的数目是 $\frac{n(n-1)}{2}$. 然而,应当说,一般地我们未观察到对应于每个可能的能级对的谱线，就此而论，图 6A 是有可能使人误解的，我们以后会讨论这个重要的问题.

为了充分地理解这种做法给光谱研究带来了多大的条理性,我们只要看一些更为复杂的原子光谱,或者更好去看分子的带光谱就行了(见图 6B 及本章的另一些光谱). 后一类光谱独特地表示出一系列能带,用高分辨率考察它们时,发现它们是由大量间隔接近的谱线所组成. 初看之下，分子的带谱显得令人绝望地复杂，然而却发现可能在这样的复杂性中引进条理性：在许多情况下,我们可以做出谱项图,并且说明每根观察到的谱线.

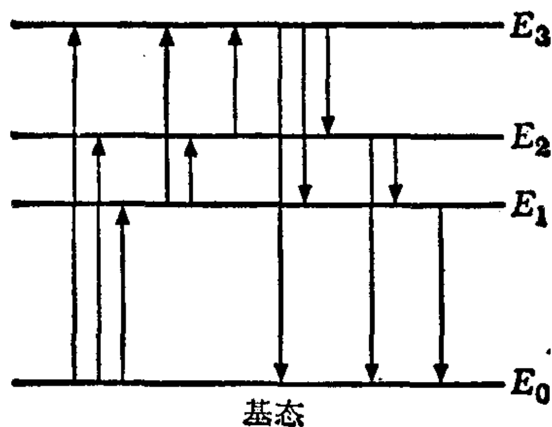


图 6A　表示四个能级以及能级间的跃迁的谱项图。可能的跃迁频率是:

$$\omega_{30}=\frac{(E_3-E_0)}{\hbar},\quad \omega_{31}=\frac{(E_3-E_1)}{\hbar}$$

$$\omega_{20}=\frac{(E_2-E_0)}{\hbar},\quad \omega_{21}=\frac{(E_2-E_1)}{\hbar}$$

$$\omega_{10}=\frac{(E_1-E_0)}{\hbar},\quad \omega_{32}=\frac{(E_3-E_2)}{\hbar}$$

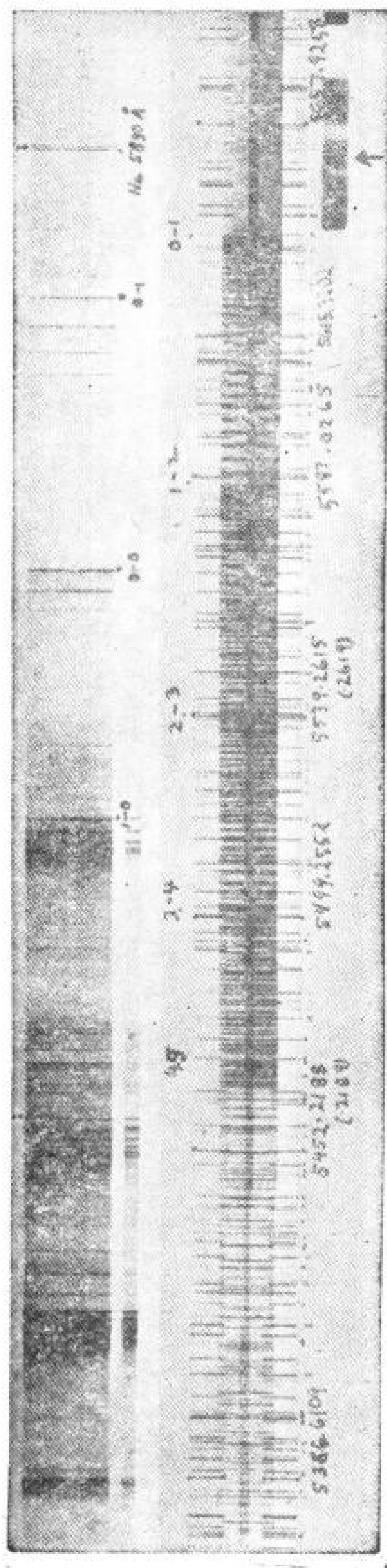


图6B 在两种不同的色散下所取得的C_2分子光谱的一部分．左边那个是在低色散下取得的，显示出分子光谱的"带"特征．右边那个则在高色散下得到．(见图上以埃为单位的波长)在这里已可清楚看出组成带的谱线．

7 再考虑图 6A，并让我们假定该图表示一个原子的谱项图，在此情况中，能级间隔典型地具有一个电子伏特的数量级．

假如我们来研究原子的吸收光谱．利用具有连续光谱分布的光源所发出的光，当它通过一层所研究原子的（单原子）气体后，我们观察光谱中的吸收线．进一步假定气体是相当冷的，比如在室温下，那么我们会在三个频率 ω_{30}，ω_{20} 和 ω_{10} 上看到吸收谱线，但剩下的三个频率上则没有．对此的解释很简单：气体中的绝大多数的原子处在基态，因此，我们将只是观察到从基态到某一较高态的跃迁．

当温度提高后，原子处于某一个激发态中的几率增加了．在这套书的第五卷[1]中我们将学习到，温度为 T 的气体中，处于第 n 激发态的原子数与基态的原子数之比是

$$N_n/N_0=\exp\left(-\frac{E_n-E_0}{kT}\right) \tag{7a}$$

在"室温"，$kT\approx\frac{1}{40}$ 电子伏，这个比是可忽略的小数值．因而得知冷气体将不会发射（可见）光，除非原子被某种其他（外来的）手段所激发．

8 假如我们研究受激（比如说由于放电所引起）原子气的发射光谱，我们可以观察到所指出的全部谱线．如果原来处于基态的原子与一个能量较高的电子碰撞，电子可能会将其部分能量转移给原子．这就使得原子跳到一个较高的态，随后则由此衰变至较低能级，并发射光．不言而喻，除非电子具有足够能量将原子提高到某个激发态，这个过程不可能发生．如果电子能量小于 (E_1-E_0)，那么电子只能经受一次与原子的弹性碰撞．如果能量大于 $(E-E_0)$，导致光辐射的非弹性碰撞就有可能发生．

---

1) Berkeley Physics Course, Vol. V *Statistical Physics*.

对于这幅图景，有一个明显的实验鉴定方法，而实际上这也正是对第 5 节中的假设的一般概念基础的验证；我们只要改变激发原子的电子的能量，那么在能量增加时应当出现新的发射线．图 8A 表明了对于汞原子气体的这种实验的一些结果．正如所见，所显现的发射光谱以预期的方式变化着，并且可以根据图 8B 所示的谱项图来说明这种变化．

9 图 9A 表示了一个类似实验的结果．低压情况下，气体的汞原子被电子的轰击所激发．激发原子经发射光子而衰变回到基态，这些光子（特别是紫外光子）的存在可通过当它们射到铁电极时所引起的光电流来观察到，当轰击电子的能量增

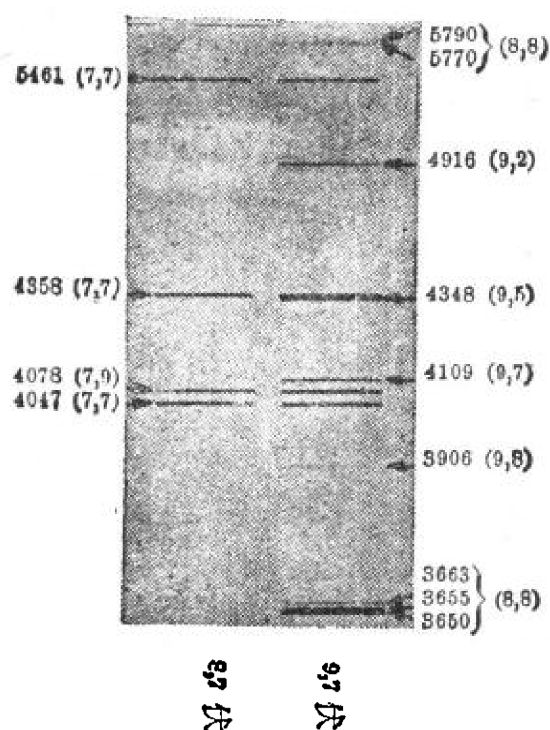


图 8A　汞原子的由二种不同能量的电子碰撞而激发的光谱．这张照片采自 G. Hertz, "Übe rdie Anregung von Spektrallinien durch Elektronenstoss, 1" *Zeitschrift für Physik*, **22**, 18, (1924)

当电子能量从 8.7 电子伏（左面光谱）增加到 9.7 电子伏时（右面光谱），在左面光谱中毫无踪迹的整列新光谱线出现了．图上括号里的数字表示了光谱线首次呈现时的电子能量，不加括号的数字则表示了波长，其单位为埃．

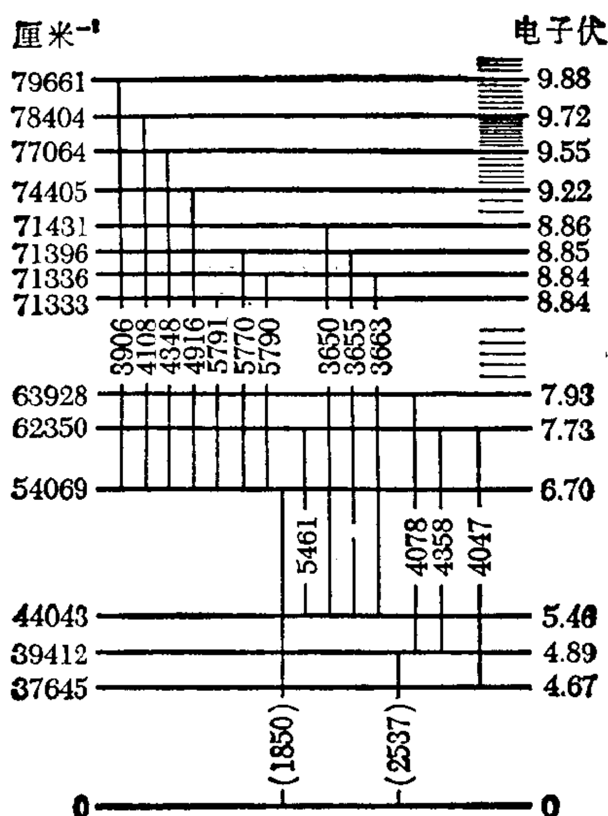


图 8*B* 大为简化的中性汞原子的谱项图，它表示了在图 8*A* 中见到的跃迁中所涉及的能级．左方的数字是以波数来表示的能级的能量．以电子伏表示的相应的能量标在右方．注意这个谱项图并没有按比例画．那些省略掉数据的能级在右方加以指明．跃迁线上的数字是以埃表示的波长，所有到达基态的跃迁都处在紫外区域中．其中的两个在图上已标明（括号里表示的是波长）．这些谱线在图 8*A* 的光谱中是看不到的．电离的极限位于 84184 厘米⁻¹处（相应于 10.4 电子伏）

大时，就可能激发新的能级，结果就可能有新的跃迁．在汞原子的每个新能级上，所发射光子数目的增加率随着电子能量的增加而突然增加，因此曲线的斜率将在这些能量上显示出不连续性．在图 9*A* 中的这些不连续的位置应当与图 8*B* 的谱项图上所表示的能级相比较．

精确确定轰击电子的能量是件难事，然而，这样的测量在确定一个原子的能级系统上显然可能是非常有用的．图 9*A* 的曲线确定了许多能级的近似位置．发射波长的精确测量又

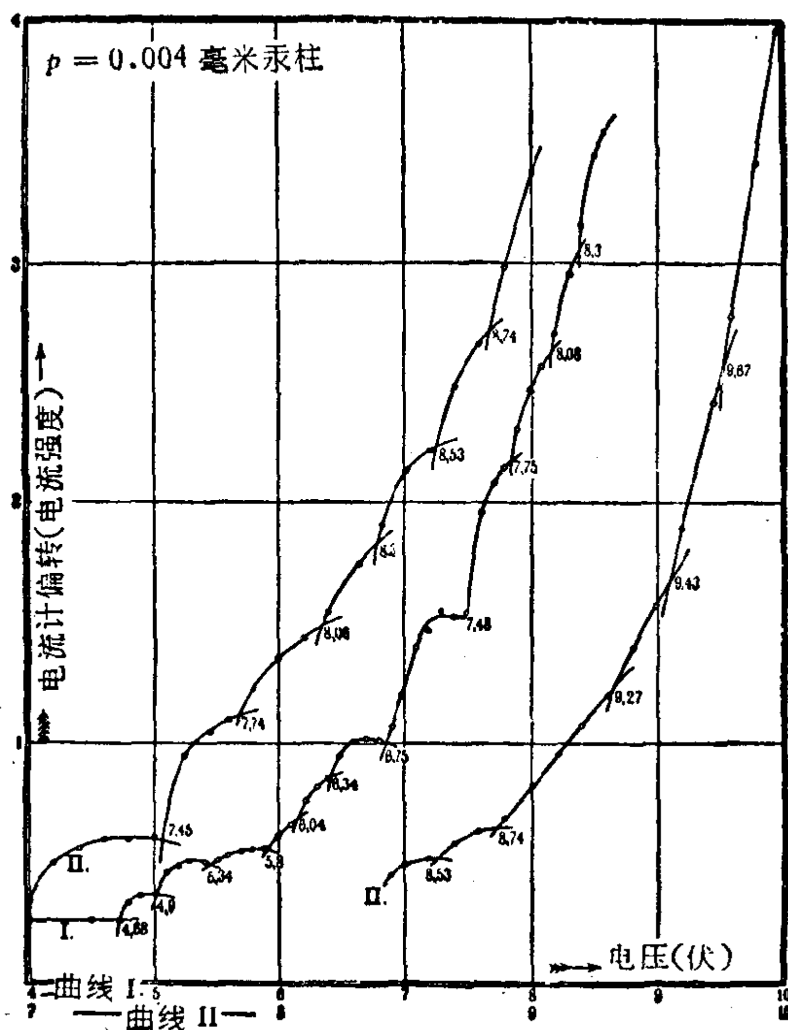


图 9.4 汞原子的由电子碰撞而引起的激发，本图采自 J. Franck and E. Einsporn, "Über die Anregungspotentiale des Quecksiberdampfes," *Zeitschrift für Physik*, **2**, 18(1920),

横坐标表示了电子的能量（按两种不同的标度），纵坐标表示了对汞原子发射的光所进行的测量（见正文的解释）。当电子能量增加时，将激发新的能级，在每个新能级上，曲线的斜率发生突变，因为涉及新添加的光子的新跃迁已可能了.

原子是以汞气体的形式出现的，压强为 0.014 毫米汞柱，温度为 50°C

增补了这些数据，同时由于我们能够观察到一根谱线在多大电子能量下首次出现(如果使用的是电子轰击的激发方法)，我们就得到跃迁所涉及的能级的知识．另外的信息可以从吸收光谱的研究中得到：在吸收光谱的情况，我们知道跃迁中的低能级必定就是基态．

在过去曾用过这些方法和许多其他方法，现今仍使用来收集原子光谱和原子能级方面的大量数据．

10 荧光的现象很容易在图 6*A* 的基础上来理解．一个处于基态的原子吸收了能量为(E_3-E_0)的光子，因此它就相应地跃迁到 E_3 能级．它可能从这个能级衰变到其他能级，于是我们就会观察到图 6*A* 中列出的所有频率的光子．

根据这个图象我们立刻就能理解斯托克斯定则：荧光发射的频率不能超过激发光的频率．这条定则相当广泛地成立，然而，如果某些吸收激发光的原子原来不是处于基态，那就可能出现例外．

在爱因斯坦讨论光电效应的论文中，他也从光子的图象的观点讨论了斯托克斯定则．那时能级的概念尚未产生，但是如果假设发射量子(光子)的能量必须从吸收的量子(光子)得到，也能理解上述定则．

11 原子处在高于基态的某个确定能量状态时将会电离，那个能量是电子和单电离原子[1]可以彼此完全分离地存在的最小能量．在这个能量及更高的能量下，“原子”不再作为一个原子存在着，但是我们仍可认为这个体系由单电离原子和一个电子所组成．很清楚，这个体系可以具有我们所想要的高于电离能的任何能量．因此，这体系的一套可能的能量状态就由低于电离能的一系列分立的能级以及高于那个能量的连

1) 单电离原子，原文是 singly ionized atom，是指原子失去一个电子后形成的离子．——译者注

续能谱所组成. 这种情况有如图 11A 所示. 在电离能级 E_i 上的阴影区域代表连续能谱.

左边那根竖线表示了原子通过吸收一个能量为 $(E'-E_0)$ 的光子从基态跃迁到连续能谱中的 E' 能量. 这个过程就是单原子的光电效应. 逸出的电子将有动能 $(E'-E_i)$.

光致电离(光电效应)的逆过程是电子与单电离原子的辐射复合. 这个过程在图 11A 中由右边那根竖线表示. 一个动能为 $(E''-E_i)$ 的电子与(静止的)离子相碰撞, 于是这个体系"跌"到 E_2 能级, 并发射出一个能量为 $(E''-E_i)$ 的光子. 原子由这个能级经过第一受激态继续下落到基态, 有如一些箭头所示. 在这个级联过程中的每个跃迁都发射出一个适当频率的光子.

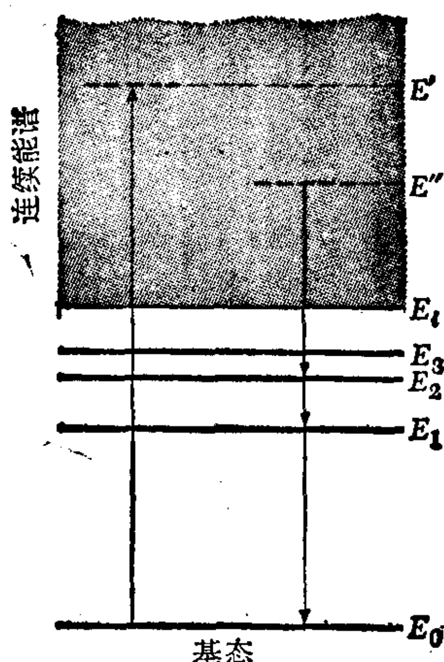


图 11A 表示分立能级以及在电离能级以上的连续能谱 (灰色区域)的谱项图. 由竖直的箭头指明在分立的能级间的跃迁, 以及到达和离开连续能谱的跃迁. 嵌在连续能谱里的点线并不表征原子的能级, 而只是表示了连续能量区域中的特定能量, 在这些能量下有可能存在一个电子和一个离子所组成的体系.

在原子物理中，常常规定电离能级的能量值为零，因此束缚态都具有负能量．其他规定也是可能和适宜的，视具体的情况而定．在原子核物理学中我们常常规定原子核的基态能量为零，我们应当注意零点的选择纯粹只是一个约定．

12 至此我们只是根据两条假设考虑了原子．然而，能级的概念以及这些能级间的跃迁的观念具有极为广泛的应用，我们可以按同样方式讨论分子和原子核．考虑任何数目和种类的粒子的任意一个体系．电离能级（或离解能级）是体系有可能以两个彼此相距甚远的分离部分存在的最低能量．在这能级之上，体系的可能的能量形成连续能谱．在这个能量之下，我们可以遇到对应于体系的束缚态的一些分立的能级．（这里我们是按照两个假设的精神来进行描写的，但如我们希望非常确切，就必须加限制条件．）

作为核物理中的谱项图的一例，我们现在来考虑图 12A 所示的氘核的能级图．氘核没有分立的受激态．它的结合能

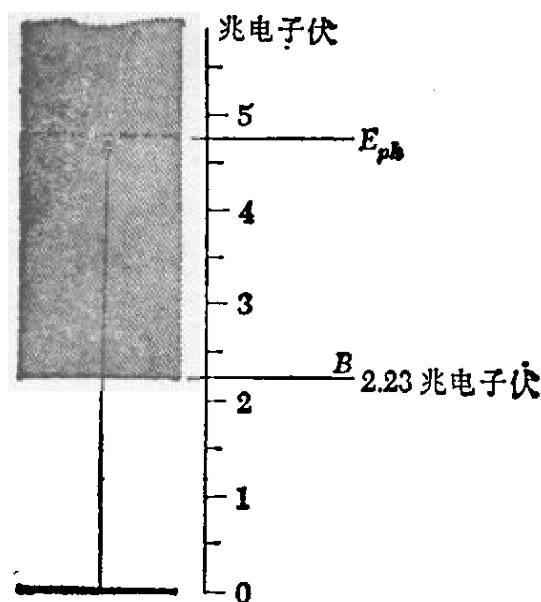


图 12A 质子-中子系统谱项图．表示了氘核的基态以及高出基态 2.23 兆电子伏（离解能量）处开始的连续区域．箭头表示了氘的光致衰变．

是 $B=2.23$ 兆电子伏，这意味着连续能谱开始的能量比基态能量高，相差为 B，在此以上，“氘”不复为氘，而是由彼此分离的一个中子和一个质子所组成的体系．

图中的竖直箭头表示了氘核的光致蜕变．一个能量为 $E_{Ph}(E_{Ph}>B)$ 的光子使得氘核分离为一个质子和一个中子，这质子和中子的动能合为 $(E_{Ph}-B)$．这个过程在实验上已经详加研究过．很明显，它完全类似于前一节所讨论过的原子的光致电离．它的逆过程是质子对一个中子的辐射俘获．

13 作者期望这些关于谱项图的介绍性评述能使读者相信我们的两条假设在研究原子、分子和原子核的结构时确实是有用的．它们使得能以谱项图把光谱上所观察到的数据组织起来．第二条假设的重要部分显然是关系式 (5a)．有关“原子跳跃”的叙述，并不试图描写辐射和吸收过程的细节；这只是一种形象化说法，说明发生了某件事情而已．

由于习惯，跳跃一词已作为量子物理学上的一种通用语加以使用．作者认为这是对一个词的不幸选择，你可能揣测到，这个词在物理学的研究上已引起了许多不必要的麻烦；这个词由于它有引起错觉的可能：当我们说，“体系从一个状态跳到另一种状态”时，似乎隐指这个过程有某种突然和间断的特性，从而在思想上所形成的图象就可能将我们严重地引入岐途．

二、能级的有限宽度

14 采用“跳跃图象”我们迄今在讨论中尚未遇到任何困难，理由不过是我们实际上未曾使用过它：我们只是用了式(5a)．现在来考虑一种情况，这时如果我们过于机械地对待“跳跃图象”就会遇到麻烦．

有一个频率为 ω_0 的光子入射到原来处于基态的一个原子. 频率 ω_0 正好相当于原子从基态跃迁到某个激发态所需的能量，因此原子就将吸收光子，形成一次跳跃. 最后它又向下跳到基态，重新发射出频率为 ω_0 的光子. 这个光子可能沿任何方向发射出去. 然而，假定入射光并不正好具有 ω_0 的频率，而是具有非常接近于 ω_0 的另一个频率 ω，那么原子是否会散射这种光呢？回答是肯定的；人们在实验上发现，当使入射光频率 ω 从小于 ω_0 的值开始变化时，原子作为散射体的有效本领也改变着：它首先增加，在 $\omega=\omega_0$ 达到一个明显的极大值，然后再减小. 频率不对的光子不知如何地也可以激起"跳跃"：实验告诉我们的就是如此. 我们可以进一步问，如果入射光频率 $\omega\neq\omega_0$，那么散射光的频率将是多少. "跳跃图象"似乎可能启示我们说，这个频率应当是"正确"的，即应当是 ω_0，但这并不是在实验上所发现的：重新发射的光频实际上是 ω，正如我们能够根据能量守恒（和光子图象）所预期的那样.

在讨论称作为谐振荧光的这个现象时，"跳跃"这个词就难以认为是适当的了. 它甚至会把我们严重地引入歧途.

15 刚才的观察事实可以很容易地利用别的模型加以解释，让我们把原子当成一个力学体系：电子由弹簧连结在原子核上. 这样的一个体系将会有一系列谐振频率，其中之一即是 ω_0. 在原子处于基态时，这个体系是静止的，但入射的电磁波会激发起体系的振动. 结果振动电子将会辐射出与入射光波频率相同的电磁波. 越接近谐振频率 ω_0，振动的幅度越大，因此，当入射光频率等于 ω_0 时，原子作为散射体的有效本领显然就最大. 另外，最重要的是，辐射波将会与入射波保持确定的相位关系，因而它就能以非常确定的方式与入射波相干，这是"跳跃图象"不能很好解释的. 在这种情况下它的最严重缺陷是以一种无法与实际情况对应的方式分析散射过程：散

射过程本应被视为是一个单一的相干过程；而不应看成是由两步跳跃所组成，不应认为其中的第二步跳跃所发射的光子与第一步跳跃所吸收的光子之间没有确定的位相关系.

究竟再辐射的光波是否与入射光波相干是可以用实验验证的事,而证据令人确信地支持预言了相干性的振子模型.

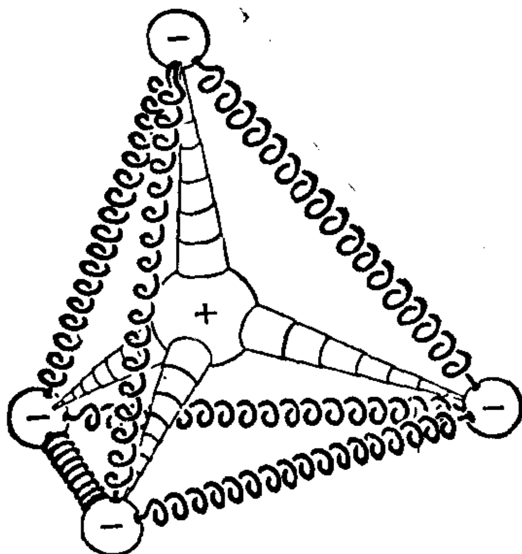


图 15*A* 有助于理解谐振荧光的原子的机械模型. 如果推动一下这个奇特装置（比方说与电子相撞），它就会振动，而由于电子是带电的，就将在这体系的谐振频率上发射出电磁辐射. 运动必然是受到阻尼的,因为体系由于辐射而失去能量.

在入射电磁波的影响下，原子将进行频率为入射波频的受迫振动，因此就将发射出同样频率的辐射. 这就是谐振荧光的现象.

16 有关谐振荧光的讨论启发我们对原子、原子核和分子的能级作一种新的解释：即体系能够在与能级差相对应的频率上谐振,*能级差值就是谐振频率*.

当然我们不应当认真对待任何带有弹簧和杠杆的力学模型：那显然是毫无意义的. 这种公认错误的模型之所以仍然能够这样好地描写诸如谐振荧光那样的现象，只是由于谐振现象的许多方面与模型的细节无关：在这个模型中要考虑的只是具有谐振频率(以及有关的阻尼常数)的体系和各种谐振

模式与外来激发源耦合的性质.

17 现在，假如我们试图决定一个原子在基态上某一能级的能量，办法是测定能够使该原子从基态跃迁到这个激发态的光子的频率. 换言之，我们打算确定原子的谐振频率. 但是，这样的频率并不是唯一的：原子在某个小的频率范围内全都响应，当然，我们可以说，决定能级的"正确频率"是响应的极大值的频率 ω_0. 然而，仍然存在着这种情况，即在紧邻着 ω_0 的附近频率上原子也响应，因此，在原子吸收光谱上的谱线不可能绝对地尖细：它具有有限宽度. 这一点是个实验事实：吸收光谱中的谱线具有有限的宽度.

于是我们可以提出问题：原子所发射出的谱线又怎样呢？它们是否也具有有限的宽度？答案是肯定的. 发射光谱线的宽度与对应的吸收光谱线的宽度相同.（这里我们必须提及，在实际情况中我们所观察到的光谱谱线由于若干种不同的效应而变宽. 这里所涉及的是由孤立的相对于观察者静止的原子发射或吸收光谱谱线的宽度. 这个宽度是原子的内禀性质. 让我们暂时忘掉所有其他的致宽原因：我们将在本章的后面讨论这些原因.）

发射光谱具有有限宽度的含义是什么呢？字面的意思是：如果我们用分辨率极高的摄谱仪来拍摄谱线，我们发现谱线具有有限的宽度. 发射光的频率不是正好为 ω_0，我们也会发现在 ω_0 紧邻区间上的一些频率.

18 由于能级的位置是通过发射和吸收谱线的观察来确定的，而且又由于这些谱线总有有限的宽度，我们就必须断定受激态的能量不可能是一个精确确定的量. 如果相信光子的图象及能量守恒原理，就不得不导致这个结论，因此，我们在第5节中的第一个假设并不是严格地正确. *在基态以上的能级具有有限的宽度.*

假定我们观察联系着受激态和基态的吸收谱线来确定原子(或分子、或原子核)中一个特定的受激态的能量. 如果原子在频率 ω_0 上出现了响应的极大值, 我们可以对受激态指定一个平均能量 $E=E_0+\hbar\omega_0$, 这里 E_0 是基态的能量. 如果谱线宽度是 $\Delta\omega$ (以某种恰当的方式定义), 我们说受激能级的宽度是 $\Delta E=\hbar\Delta\omega$. 一旦我们认识到能级具有有限的宽度, 使用"平均能量"这样笨拙的用语是没有多大意义的: 我们简单地说能级的"能量", 并理解这个能量所指的就是一个适当定义的平均能量.

19 可以用经典力学中一个例子来很好地说明作为我们第一个假设的基础的简化假定的实质. 考虑把一个单摆开动, 然后让它自己摆动, 我们假设摩擦力(其中最重要的是空气阻力)很小, 但不是零. 这样, 单摆在其摆动能量减少到初值的 $1/e$ 之前可以进行数百次振荡. (能量减少到原有值的 $1/e$ 所需的时间是"振动状态的平均寿命")

设相继两次向右摆动之间的时间间隔为1秒. 现在如果有人问我们单摆的频率, 毋庸多加思索我们就会说频率是每秒一次, 这无疑是合理的答案, 但严格地说是不对的; 所谓"频率"我们理解为周期现象的重复率. 然而单摆的运动只是近似地周期摆动, 因为振动的幅度随着时间推移而衰减着. 阻尼谐振的频率并不是精确确定的, 虽然实际上这个频率是可以很好地确定的.

一个原子发射辐射在某些方面类似于一个阻尼摆. 发射过程并不是永远持续着, 而这必定意味着"原子内的振动"是阻尼振动. 因此, 并没有精确确定的频率, 因为这个振动现象不是严格周期性的. 于是, 由"在原子内部振动的某个东西"所发射的电磁辐射不是单色的. 发射的谱线就有有限的宽度.

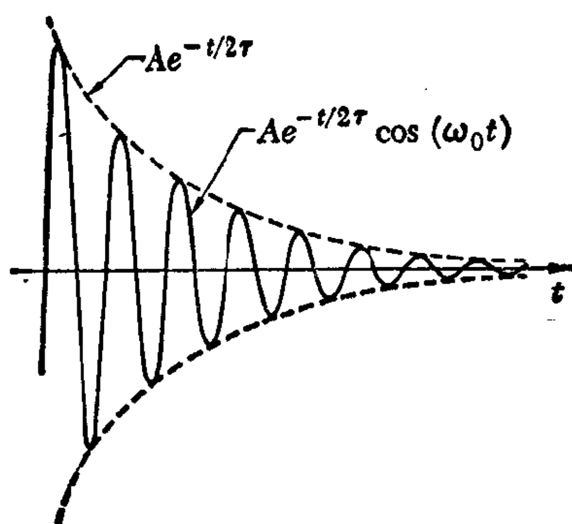


图 19A 表示了振幅作为时间函数的指数衰减阻尼振荡过程．由于它在时间上并非是严格周期性的，因而讲振动的频率为 ω_0 是不正确的，因为频率的概念是指周期现象的，如果阻尼不太大，就有理由说频率近似地是 ω_0．直观上很明显，如果阻尼愈小，即两次连续的极大值的幅度减小得愈少，则频率就愈确定．

20 如果我们想到图 19A，就可能认为，阻尼越小，频率的确定性就越好，因此我们可以猜测或许频率上的不确定性 $\Delta\omega$反比于平均寿命 τ．

为了研究这个问题，我们将本着第 15 节的“振子模型”的精神来考虑原子的发光和散射．我们假定只涉及两个状态：基态和比基态能量高 $\hbar\omega_0$ 的受激态．

首先，考虑原子本身在刚受到激发后的情况．我们用 $A(t)$ 表示某种在原子内部振动的振幅，假定它与时间的关系是

$$A(t)=A\exp\left(-i\omega_0 t-\frac{t}{2\tau}\right) \tag{20a}$$

这里 A 是常数，这是以复数形式表示出的平均频率为 ω_0 的阻尼振动振幅与时间的关系．

由于这个振动现象涉及带电粒子，我们预期将发射（平均频率为 ω_0 的）电磁辐射，而辐射波振幅与时间的关系必定与

(20a)有同样形式. 辐射的强度 $I(t)$ 正比于振幅绝对值的平方

$$I(t)=C|A(t)|^2=CA^2\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \tag{20b}$$

这里 C 是某个常数. 因此我们可以写出

$$I(t)=I(0)\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \tag{20c}$$

(20a)中的指数衰减因子我们写成$(-t/2\tau)$, 因为我们希望在强度的表达式中有 $\exp(-t/\tau)$ 的因子. 显然, 如何写这个因子, 即如何定义 τ 只是个约定的问题. 按照我们的定义, τ 是辐射强度衰减到原来的 $1/e$ 所需的时间. 由于 τ 是过程持续时间的一种度量, 我们可以将 τ 理解为受激态的平均寿命, "大多数衰变发生在数量级为 τ 的时间之内."

21 (20a)所写出的振子振幅 $A(t)$ 满足一阶微分方程:

$$\frac{dA(t)}{dt}+\left(i\omega_0+\frac{1}{2\tau}\right)A(t)=0 \tag{21a}$$

这个齐次微分方程描写了不存在任何外界影响的情况下振子的运动. 现在如果频率为 ω 的单色光射到振子上. 方程(21a)必须加上修正项来描写谐变着的外加的驱动力, 结果振子的非齐次微分方程的形式就是

$$\frac{dA(t)}{dt}+\left(i\omega_0+\frac{1}{2\tau}\right)A(t)=F\exp(-i\omega t), \tag{21b}$$

这里 F 是表示驱动力大小的常数.

微分方程(21b)有稳态解(不考虑过渡解)

$$A(t)=\frac{iF\exp(-i\omega t)}{(\omega-\omega_0)+i/2\tau} \tag{21c}$$

它对应着一个幅度不变而频率是驱动频率 ω 的振动.

这个振子发射的辐射强度正比于 $A(t)$ 的绝对值的平方. 由驱动振子所产生的辐射作为散射现象而被观察到, 散射量

则正比于强度．让我们用 $S(\omega)$ 表示对应于单位振幅入射光在单位时间内的散射总量，这里 ω 是入射频率，由于(21c)我们可以写出

$$S(\omega)\propto\left|\frac{1}{(\omega-\omega_0)+i/2\tau}\right|^2 \quad 或$$

$$S(\omega)=S(\omega_0)\frac{(1/2\tau)^2}{(\omega-\omega_0)^2+\left(\frac{1}{2\tau}\right)^2} \tag{21d}$$

这里 $S(\omega_0)$ 是“谐振”时的散射量，亦即当 $\omega=\omega_0$ 时的散射量．

$S(\omega)$ 与 ω 的图象关系见图 21A．

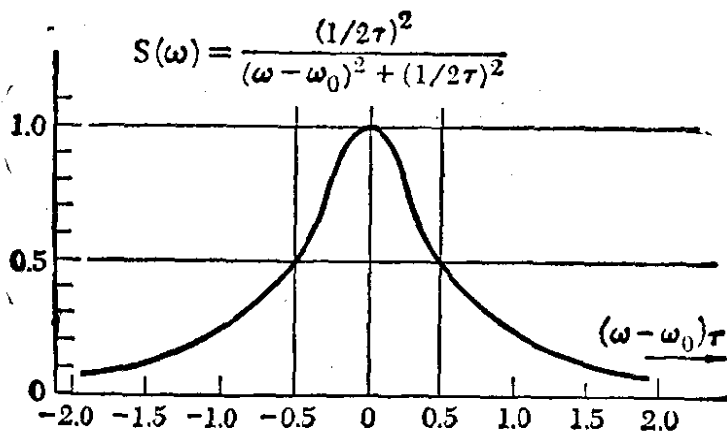


图 21A　普适谐振曲线．它描写了如果没有其他谐振频率靠近的话，任何线性(或近似线性)体系对于一个以邻近于谐振频率作正弦变化的外力所作的响应．(两种钟形曲线在物理学中起着特别重要的作用：一是谐振曲线，另一是高斯曲线．寻常画出时，它们可能十分相象．但要记住，高斯曲线在中心区域外下降很快，而谐振曲线有长的尾巴．)

22　函数 $S(\omega)$ 表示了体系在频率为 ω 的外界扰动下的“响应强度”．这种谐振响应在量子物理学中是非常普遍的现象，它决不只限于光和原子间的相互作用．当我们研究具有十分确定能量的实物粒子，如质子，为原子核所散射或 π 介子为质子所散射时，同样也发现谐振响应．人们很可以说一个量子力学体系的准稳能级“存在”，其精确意义是：即体系显示出

如方程(21d)所示的在恰当频率下的谐振响应.

在核物理中谐振公式(21d)称为布莱特-维格纳单能级谐振公式.

23 现在让我们来注意谐振公式(21d)的一个重要特色. 考虑这样一个频率 ω, 在这个频率的响应是极大响应值的一半, 而我们发现

$$\omega=\omega_0\pm\frac{1}{2\tau} \tag{23a}$$

因此谐振曲线(见图 21A)在半极大值处的宽度为

$$\Delta\omega=\frac{1}{\tau} \tag{23b}$$

这合于我们在第 20 节中对于频率不确定性与受激态平均寿命之间关系的猜测.

由于我们可以用 $\Delta E=\hbar\Delta\omega$ 来定义(受激)能级的宽度, 立刻就可从(23b)推得非常重要的关系:

$$\Delta E=\hbar/\tau \tag{23c}$$

它用状态的平均寿命来表示能级能量的不确定性 ΔE. 状态持续的时间越长, 能量的确定性就越佳.

24 对于诸如(21b)的一个简单微分方程确实能描述光和原子之间的相互作用这样一个复杂的现象, 读者可能具有强烈怀疑. 实际上它的确是不能的; 但要点在于我们并不试图描写相互作用的每个方面, 而只是描写原子对于紧邻谐振频率 ω_0 的那些频率上的(几乎是)单色光的响应, 频率 ω_0 对应于从基态到受激态的跃迁. 公式(21d)描述的只是一个谐振, 而如果有几个谐振(在原子, 分子和原子核的场合下总是有几个谐振的), 就必须对理论进行修正. 当远远离开所有其他谐振时, 可以期望公式(21d)在谐振曲线的邻近保持好的精确度.

要介绍辐射跃迁的完整情形将会使我们走得太远, 我们

必须满足于这个多少有些含糊的理论．事情的实质很清楚：有某个东西在振动，这个东西带有电荷，而且（在幅度上）对外界扰动的响应是线性的．

25 下面让我们来考虑在两个受激态间的跃迁中所发射出的谱线宽度，这种情况如图 25A 所示．能级的宽度是用水平线的宽度来表示的（这里是极为夸张地画出的）．我们考虑两次跃迁的级联：从第二受激态到第一受激态，随后就从第一激发态到基态，在第二次跃迁中发射的谱线（频率为 ω_{10}）宽度为 $\Delta\omega_{10}=\Delta E_1/\hbar$.

我们也可以求出单个原子在级联中发射出的两种频率的和所出现的不确定性．如果我们用 $\omega_{20}=\omega_{21}+\omega_{10}$ 来表示两个频率之和，就将有 $\Delta\omega_{20}=\Delta E_2/\hbar$．这是由能量守恒原理得出的结果：总共可能有的能量不确定性显然与第二受激能级在能量上的不确定性相同．

由此我们可以推测第一次跃迁中发出的（频率为 ω_{21}）谱线宽度是 $\Delta\omega_{21}=(\Delta E_2+\Delta E_1)/\hbar$，而如果第一受激态是宽的，那么即使第二受激态非常狭窄（对应于较长的寿命），跃迁发

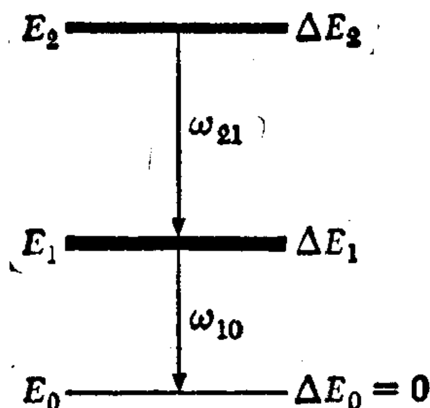


图 25A 说明第 25 节的讨论的谱项示意图．在由较高的受激态往较低的受激态的跃迁中所发射的（平均频率 ω_{21} 的）谱线宽度取决于两个能级的宽度，我们有：

$$\Delta\omega_{21}=\frac{(\Delta E_2+\Delta E_1)}{\hbar}.$$

射的谱线也还是宽的．对于总的可能有的能量如何分配于两个发射光子，第一受激态能级的宽度引入了一个不确定性．

刚才所介绍的建立于能量守恒定律和能级有限宽度的观念之上的结果的确似乎是非常有理由的．虽然我们的讨论并不严格，但它使我们足以理解问题的定性特点，而重要之点在于发射谱线的宽度必须取决于所涉及的两个能级的宽度．

26 我们再来看看关系式 $\Delta\omega=1/\tau$．由于频率反比于波长 λ，在波长上的相对不确定性等于频率上的相对不确定性，即

$$\Delta\lambda/\lambda=\Delta\omega/\omega=1/\omega\tau \tag{26a}$$

对于原子中的光学跃迁[1]，$\omega\tau$ 这个量总是很大．频率 $\nu=\omega/2\pi$ 的数量级是 5×10^{14} 秒$^{-1}$，而平均寿命的数量级约是在 $10^{-7}\sim10^{-8}$ 秒之间，于是波长（或频率）上的相对不确定性的数量级约为 $\dfrac{\Delta\lambda}{\lambda}\sim10^{-7}$，这是个很小的量．由此而产生的谱线宽度称为自然线宽；它是原子的内禀特性（即在跃迁中所涉及到的能级的特性）．

三、能级和谱项图的继续讨论

27 让我们现在来看几个典型的谱项图．它们是根据实际测量绘制的，而且也已在量子力学的范畴内得到解释．我们应当重视它们：每个图，或者说与之相关的波长表都是大量劳动的成果．

我们构画谱项图的方式与读者将在文献上见到的相同．这种画法和不同的能级的编号按照一些行之已久的传统约定．为了更现实起见，我们愿意遵守这些约定；虽然我们不能

1）光学跃迁，原文是 *Optical transition*，意指可发射出可见光的跃迁．——译者

在这里解释这些图上的每个细节．也许读者会持异议，认为我们不应当在还没有准备好作理论解释的图上去说明任何东西．但是这种态度以及其逻辑结论，就会使我们在能够从理论上说明能级的确存在之前，根本不可能考虑谱项图．然而，本章的目的是，在承认能级确实存在这一经验事实的前提下，讨论物理体系的某些方面．历史上的事实也是，原子的谱项图（图 28A 所示的即为典型例子）是依据了光谱测量画出的，

44 JACK SUGAR

TABLE 1. – Observed spectral lines of Ce

λ_{air} Å	Intensity	σ (cm⁻¹)	Classification	o – c	λ_{air} Å
4623.197	20	21624.00	101354, –122978°,	– 0.03	4356.835
4616.233	60	21656.62	103612, –125269°,	+ 0.01	4346.353
4613.803	60	21668.02	21849°, – 43517,	+ 0.03	4344.025
4612.528	2	21674.01	101354, –123028°,	– 0.05	4339.205
4612.384	4	21674.69	101354, –123029°,	+ 0.03	4336.143
4610.723	30	21682.50	103612, –125295°,	– 0.03	4335.515
4599.803	1	21733.97			4331.168
4582.264	200	21817.16	103351, –125168°,	0.00	4327.503
4576.904	300	21842.71	103351, –125193°,	+ 0.01	4321.384
4575.494	3	21849.44	0, – 21849°,	– 0.03	4314.767
4570.430	2	21873.65			4309.634
4568.802	20	21881.44	103351, –125232°,	– 0.02	4304.710
4551.460	60	21964.81	103231, –125196°,	+ 0.01	4300.97
4544.250	100	21999.66	103231, –125230°,	– 0.01	4296.17
4536.526	1	22037.12	103231, –125268°,	– 0.05	4289.79
4536.330	10	22038.07	103231, –125269°,	+ 0.01	4287.78
4535.726	1000	22041.01	21476°, – 43517,	+ 0.01	4285.50
4527.861	6	22079.29	103079, –125158°,	– 0.01	4284.77
4526.655	4	22085.17	103079, –125164°,	– 0.02	4282.30
4525.931	2	22088.71	103079, –125168°,	+ 0.01	4280.4
4525.330	100	22091.64	100814, –122905°,	+ 0.03	4271.2
4524.689	10	22094.77	100814, –122908°,	– 0.04	4264.6
4521.924	1000	22108.28	100814, –122922°,	– 0.01	4247.
4520.709	3	22114.22	103079, –125193°,	– 0.02	4239
4519.918	10	22118.09	100814, –122932°,	– 0.04	423
4503.372	10	22199.36	100734, –122933°,	+ 0.02	
4502.825	100	22202.05	70433, – 92635°,	0	
4494.689	2	22242.24	100734, –122976°		
4491.454	100	22258.26	102897, –		
4490.855	4	22261.23	[illegible]		

图 27A 一张表格的一部分，它载于 J. Sugar 的论文第 44 页．"Description & Analysis of the Third Spectrum of Cerium (*Ce III*)," *Journal of The Optical Society of America*, **55**, 33 (1965)；

第一栏是双重电离的铈原子在空气中所观察到的波长．第二栏是谱线的相对强度，第三栏是以波数表示的光子的能量．第四栏是所涉及的光谱项，其能量也是以波数表示的．

而那是在人们理解图形细节的完整含义之前，就是在发现量子力学之前.

28 量子力学体系的能级是用一些量子数来标记的，这些数是在体系的量子力学描述中所出现的重要物理参量的数值. 我们将结合谱项图来讨论某些量子数的物理解释. 不过，读者并不一定要去理解和详细记住所示的能级上的所有标记.

图 28*A* 是中性锂原子的谱项图，左边的能量尺度包括了电子伏特和等价的波数两种单位. 水平的短横线表示能级，连接能级的线表示观察到的两能级间电磁跃迁，这些线上的数字则以埃为单位表示出谱线的波长，在光谱上特别突出的谱线则用级间的粗线指明.

图 28*A* 的谱项图中的能级已排列成行，其中的四行分别用字母 s, p, d 及 f 表示，实际上锂原子还有更多的能级，我们本应也把它们排成行，列于图上所示的那些行的右边，但它们都很靠近电离能级，并且对锂的可见光谱不起什么作用.

我们注意到图 28*A* 所出现的谱线服从一个有趣的定则：这些跃迁是在相邻行的两个能级间发生的. 实际上图 28*A* 中并没有包括所有可能的跃迁. 量子力学预言说，从 s 行，或 d 行也将会有达到 $3p$ 能级的跃迁；从 p 行到 $3s$ 能级；从 p 行，或 f 行到 $3d$ 能级，等等. 许多这样的跃迁都曾实际观察到，但为了不使图象内容太多，我们没在图上表示出来. 这些处于红外区域的附加的跃迁也服从前述定则，即跃迁在相邻行的级间发生. 这个定则是选择定则的有趣例证. 选择定则说只有一定的能级对可能包括在某次跃迁中. 当我们观察一下图 28*A* 的线时，对这条定则的经验支持是惊人地明显. 我们特别注意到在 $3s$ 级与 $2s$ 级间没有跃迁；$3p$ 级与 $2p$ 级之间也没有跃迁，等等. 由于这条选择定则支配了锂原子的光谱，将能级排成行(正如我们已做的那样)就显得是自然的了.

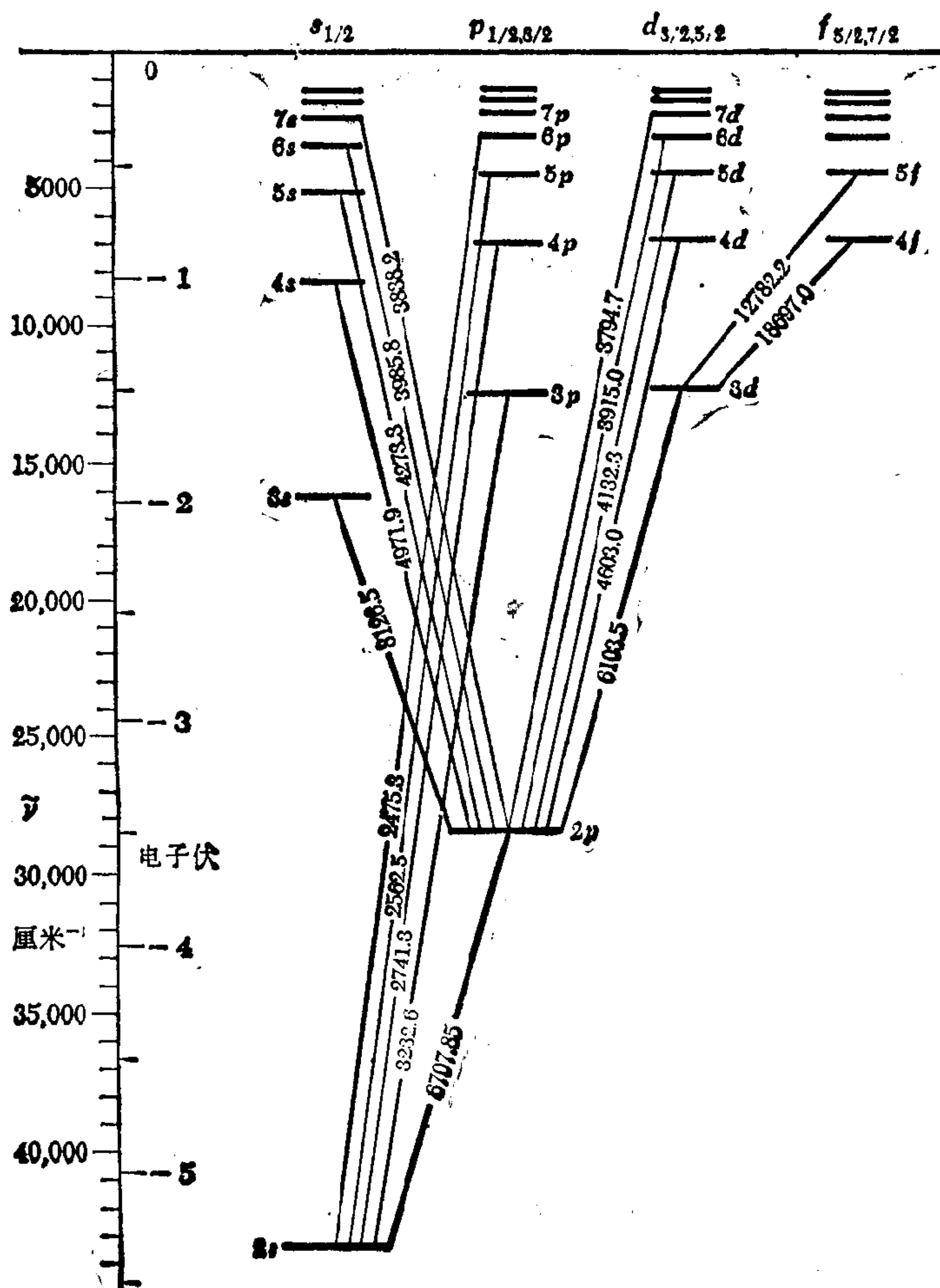


图 28*A* 中性锂原子的谱项图．斜线表示了观察到的电偶极跃迁．这些线上的数字是波长(单位是埃)．其他细节请见本文．此图以 W. Grotrian 的一幅图为基础，载于 Graphische Darstellung der Spektren von Atomen. . ., Vol. II, p. 15 (*Verlag von Julius Springer, Berlin*, 1928)．

Fe III—Continued

Authors	Config.	Desig.	J	Level	Interval
$z\ ^3P_2$	$3d^5(a\ ^4P)4p$	$z\ ^3P^\circ$	2	119697.64	−284.62
$^3P_1$			1	119982.26	−197.69
$^3P_0$			0	120179.95	
$y\ ^5F_1$	$3d^5(a\ ^4D)4p$	$y\ ^5F^\circ$	1	120697.10	129.07
$^5F_2$			2	120826.17	182.61
$^5F_3$			3	121008.78	232.89
$^5F_4$			4	121241.67	227.15
$^5F_5$			5	121468.82	
$z\ ^3G_3$	$3d^5(a\ ^4G)4p$	$z\ ^3G^\circ$	3	121919.74	21.55
$^3G_4$			4	121941.29	8.33
$^3G_5$			5	121949.62	
$z\ ^3D_3$	$3d^5(a\ ^4P)4p$	$z\ ^3D^\circ$	3	122346.61	−281.73
$^3D_2$			2	122628.34	−214.69
$^3D_1$			1	122843.03	
$y\ ^5D_4$	$3d^5(a\ ^4D)4p$	$y\ ^5D^\circ$	4	122944.15	114.60
$^5D_3$			3	122829.55	−69.29
$^5D_2$			2	122898.84	−22.53
$^5D_1$			1	122921.37	−534.55
$^5D_0$			0	123455.92	
$y\ ^5P_1$	$3d^5(a\ ^4D)4p$	$x\ ^5P^\circ$	1	123552.95	144.23
$^5P_2$			2	123697.18	53.21
$^5P_3$			3	123750.39	
$y\ ^3D_3$	$3d^5(a\ ^4D)4p$	$y\ ^3D^\circ$	3	124854.04	−49.88
$^3D_2$			2	124903.92	−50.96
$^3D_1$			1	124954.88	
$y\ ^3F_4$	$3d^5(a\ ^4D)4p$	$y\ ^3F^\circ$	4	125443.58	−194.40
$^3F_3$			3	125637.98	−34.85
$^3F_2$			2	125672.83	
$z\ ^3S_1$	$3d^5(a\ ^4P)4p$	$z\ ^3S^\circ$	1	126390.57	

图 28B　谱项图对于概览是有用的，但详尽的大批精确数据最好列成表格．上面绘出双重电离铁原子中的能级表格的一部分．从基态算起的能量用波数厘米$^{-1}$为单位(第五栏)．标有 J 的那栏给出了态的角动量．前三栏表示了能级的各种名称，这无需在此解释．

本表采自 C. E. Moore, Atomic Energy Levels, Vol. II. p. 62. (Circular of the National Bureau of Standards 467, U. S. Government Printing Office, Washington, 1952)．

29 上面提到的选择定则是锂原子光谱的一个显著特色．我们可以在理论上解释它吗？是的，我们完全可以理解这种现象．解释所依据的事实是两个：物理空间的各向同性，以及精细结构常数 $\alpha(=e^2/\hbar c\sim1/137)$ 的数值很小．本书中我们不打算叙述完备的解释，因为我们不能要求读者具有有关的数学工具的知识，但我们至少将使读者对于所包括的内容有

个粗略的概念.

由于精细结构常数很小，在原子物理中某种类型的电磁跃迁就占了统治地位. 明确讲，在这一类型的跃迁中所发射出的电磁波与小的电偶极振子所发射的波有同样的对称性质，这一点我们实际上将在后面说明. 我们称这种波（或光子）为电偶极波（或电偶极光子），在量子力学的框架内可以说明它带走了数量为 $\hbar$ 的角动量.

物理空间的各向同性意味着在世界上不存有特殊的方向：一个孤立体系的行为与它在空间的指向无关，在极为一般的条件下，这意味着（不仅在经典力学之内，而且在量子力学之内）一个孤立体系的角动量矢量是守恒的：它不随时间而变，那就是说，假如一个原子发射了电偶极光子，在发射前原子的角动量必定等于发射后原子的角动量加上偶极光子所带走的角动量. 这条守恒原理就导致选择定则，因为一个原子的每个稳定态的特征是角动量有确定的值.

30 按量子力学，原子角动量的平方（忽略任何可能由原子核带有的角动量）的形式为：

$$J^2 = j(j+1)\hbar^2 \tag{30a}$$

这里 j 是角动量的量子数. j 的可能值受到下述定则的限制：$2j$ 可以是任何非负的整数，$2j=0, 1, 2, \cdots$. 这样，如果原子有偶数个电子，$2j$ 就是个偶数，而如原子有奇数个电子，则 $2j$ 是奇数，人们习惯于说由角动量量子数 j 所表征的状态有"角动量 j".

在量子力学内可以证明，在一个电偶极子的跃迁中，从角动量为 j_i 的初态转变为角动量为 j_f 的终态后，所允许的角动量变化受下列定则支配：

$$\Delta j = j_f - j_i = -1,\ 0,\quad \text{或}\quad +1. \tag{30b}$$

这是一条对于所有孤立量子力学体系都适用的严格定

则，无论这体系是原子，分子，还是原子核．这个定则是按前节所讨论的守恒原理推得的．本书中我们将不讨论角动量理论，因此我们就不能告诉读者推导关系式(30a)与(30b)的过程了．

31 然而，我们刚才所叙述的定理并非是支配锂原子行为的选择定则的全部内容．在原子物理中，存在一个附加的近似的选择定则，它支配了电偶极跃迁，可表述如下：在电偶极跃迁中电子的轨道角动量必定正好改变一个单位，即

$$\Delta l=l_f-l_i=-1,\quad 或\quad +1, \tag{31a}$$

这里带适当下标的 l 表示原子中电子的轨道角动量量子数．l 的意义是什么？这个量子数也有个"经典"解释：如果我们以经典术语考虑原子，那么 l 表示与电子的轨道运动相关的角动量的大小．事实上每个电子还有一个内禀角动量，即自旋．对电子来说自旋角动量量子数是 $j_s=1/2$，我们就说"电子自旋是 1/2"．原子中电子的总角动量于是就由两部分组成：它是轨道角动量和自旋的矢量和．

l 在理论上允许取的值都是非负整数：$l=0, 1, 2, 3, 4, \cdots$．图 28A 中各行所标明的字母 s, p, d, f 事实上是轨道角动量的代号："s"指 $l=0$；"p" 指 $l=1$；"d"指 $l=2$；"f" 指 $l=3$．在第 28 节中所叙述的选择定则等价于选择定则(31a)．

并非总是可能为原子中的能级确定一个轨道角动量的量子数．虽然碰巧的是，对于碱原子诸如锂原子这是做得到的．其理由在于虽然总角动量是个运动常数，但轨道角动量与自旋角动量则皆非运动常数，换言之，能级一般说并没有确定的 l 值．正是在这种含义下定则 (31a) 仅是近似成立．正如我们所说过的，对碱原子(和氢原子)这是一条好的定则．

32 再考虑一下图 28A，j 以及选择定则(30b)又如何呢？在这个图上选择定则尚未完全显示出来，因为我们绘出的是谱

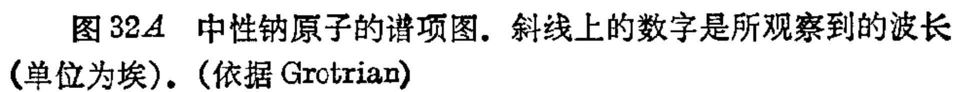


图 32A 中性钠原子的谱项图. 斜线上的数字是所观察到的波长(单位为埃). (依据 Grotrian)

项图的简化形式．实际上我们应当将 p 行及 f 行各画成两行，对行编号 s, p, d 和 f 加以下标 1/2, 3/2, 5/2 与 7/2 以表示总角动量 j. 对碱原子（及氢原子）下列定则成立：如 $l=0$, 则 $j=1/2$（整个角动量都归结于电子的自旋）．对所有其他的 l 值，j 可以取值：$j=l+\frac{1}{2}$ 和 $j=l-\frac{1}{2}$.（对其他原子，定则是不同的.）于是能级 $2p$ 实际上是双重的．但双重态的两个能级之间的能量差别是相当小的，在该图形的精确

Na I—Continued

Config.	Desig.	J	Level	Interval
6f	6f $^2F^\circ$	{2½, 3½}	38400.1	
6h	6h $^2H^\circ$	{4½, 5½}	38403.4	
7p	7p $^2P^\circ$	½ 1½	38540.40 38541.14	0.74
8s	8s ^2S	½	38968.35	
7d	7d ^2D	2½ 1½	39200.962 39200.963	−0.001
7f	7f $^2F^\circ$	{2½, 3½}	39209.3	
8p	8p $^2P^\circ$	½ 1½	39298.54 39299.01	0.47
9s	9s ^2S	½	39574.51	
8d	8d ^2D	{2½, 1½}	39729.00	
8f	8f $^2F^\circ$	{2½, 3½}	[39734.0]	
9p	9p $^2P^\circ$	½ 1½	39794.53 39795.00	0.47
10s	10s ^2S	½	39983.0	
9d	9d ^2D	{2½, 1½}	40090.57	
9f	9f $^2F^\circ$	{2½, 3½}	40093.2	
10p	10p $^2P^\circ$	{½, 1½}	40137.23	

图 32B　中性钠原子能级表的一部分．(第四行的)能量是从基态起算的，以波数厘米$^{-1}$表示出。本表采自 C. E. Moore, Atomic Energy Levels, Vol. 1, p. 50, (Circular of N. B. S. 467, U. S. Government Printing Office, Washington, 1949)。

度内，两个能级是重合的.

图 32A 表示了钠原子的谱项图，它也是硷原子. 十分明显，它的谱项图在许多方面类似于锂的谱项图. 在这种情况中我们可以将 p 行画成两行，但为了节省篇幅(和劳力)让 d 行与 f 行成为单行. 图 32A 中所表示的所有跃迁都是电偶极子的跃迁. 钠灯特征的黄光所对应的跃迁是由 $3p_{1/2}$ 与 $3p_{3/2}$ 能级到基态 $3s_{1/2}$ 的"黄色钠线"，事实上是个双重线.

读者应当思考图 32A 的谱项图，使自己相信所示的跃迁分别服从对于 j 和 l 的选择定则(30b)与(31a).

33 图 33A 所表示的氦原子的能级图形成两个完全独立的系统：单态的以及三重态的. 所观察到的谱线产生于在这些系统之内的跃迁：从单能级到单能级、从三重能级到三重能级.

氦原子是双电子原子. 在单能级中，两个电子的自旋指向相反，而在三重能级中两个电子的自旋是平行的.

字母 $S, P, D, F, \cdots$ 表示电子的总轨道角动量. 左上标 1 或 3 表示了**多重性**(单重或三重). 对单能级，总角动量等于轨道角动量. 对三重能级，总角动量 j 可以取值 $j=l-1, l, l+1$，并规定总有 $j\geq 0$. 在三重态系统中 S 级是单一的，而其余的则是三重的. 单态的能级当然是单一的.

34 我们注意到铊原子谱项图的一个有趣细节：在图 34A 中，处在 $7^2S_{1/2}$ 态的原子可以衰变到 $6^2P_{3/2}$，也可以衰变到基态 $6^2P_{1/2}$. 原子可以选择任一条"跳跃"的途径. 这种特点不仅在铊的谱项图上的其他地方可以见到，在本章的其他一些谱项图上也能见到(读者应当找出这些例证). 如果一个受激态可以沿几条途径衰变，那么每个衰变模式就以确定的几率出现. 这个几率就称为所涉及到的衰变模式的**分支比**，这是受激态的内禀特性，也即是说不管这一受激态是如何达到的，

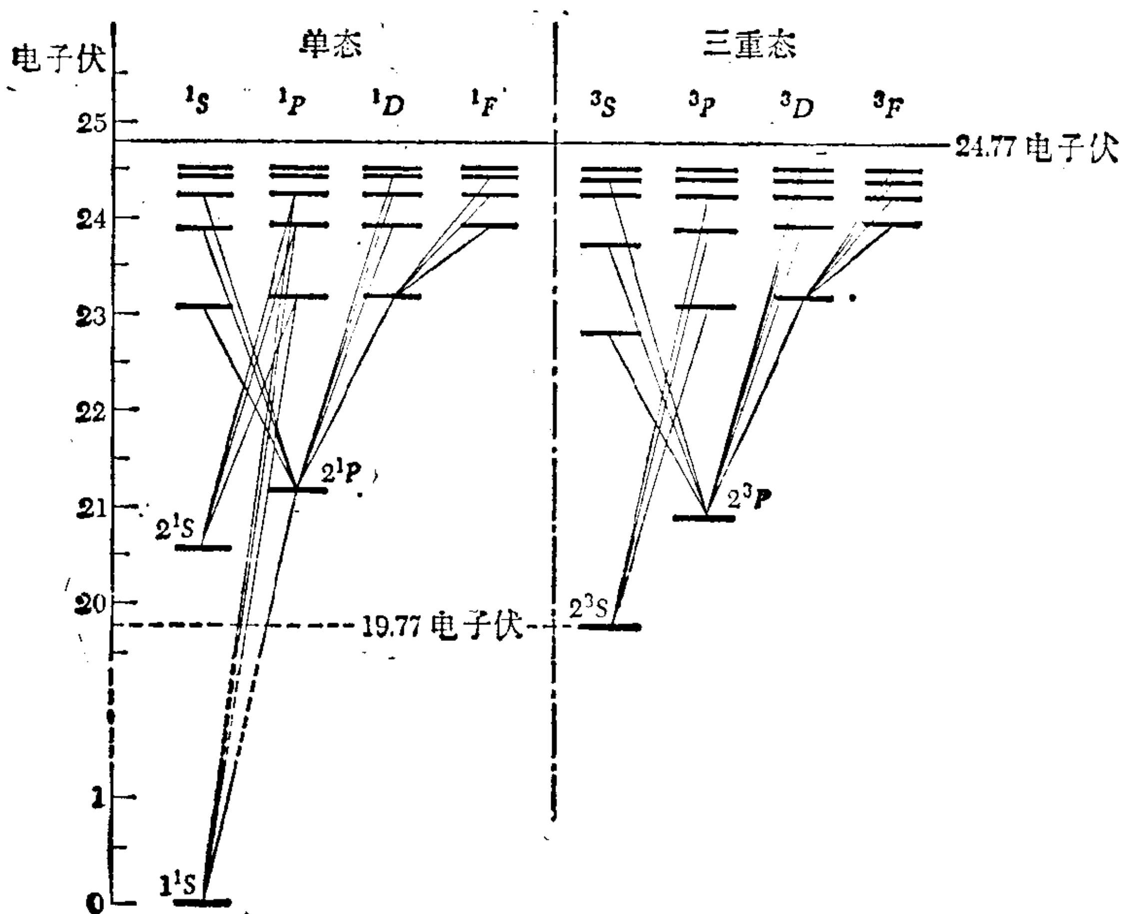


图 33A　中性氦原子的谱项图. 注意在能级的单态和三重态系统之间有显著的分离. 在三重态中电子自旋是平行的, 而在单态中则是反平行的. 除去在三重态中没有类似于基态的状态之外, 它们之间有着明显的对应. 这种情况是泡利不相容原理的一个结果: 两个自旋指向同一方向的电子不可能都占据最低能级, 假如自旋是相反指向, 就没有这样的限制.

它的值不变. 这种性质是一个实验事实.

35　钠与锂都是碱金属, 它们的谱项图相当类似, 而与氢和铊的谱项图有着显著区别. 考察大量的谱项图将会发现一种值得注意的事实: 化学上类似的元素有类似的谱项图. 图 35A 即为一例. 其理由在于元素的光谱和化学性质二者皆由原子中电子的组态所决定, 特别是为最外层的电子组态所决定.

著名的元素周期表 (如图 35A 所示) 可以利用原子的壳

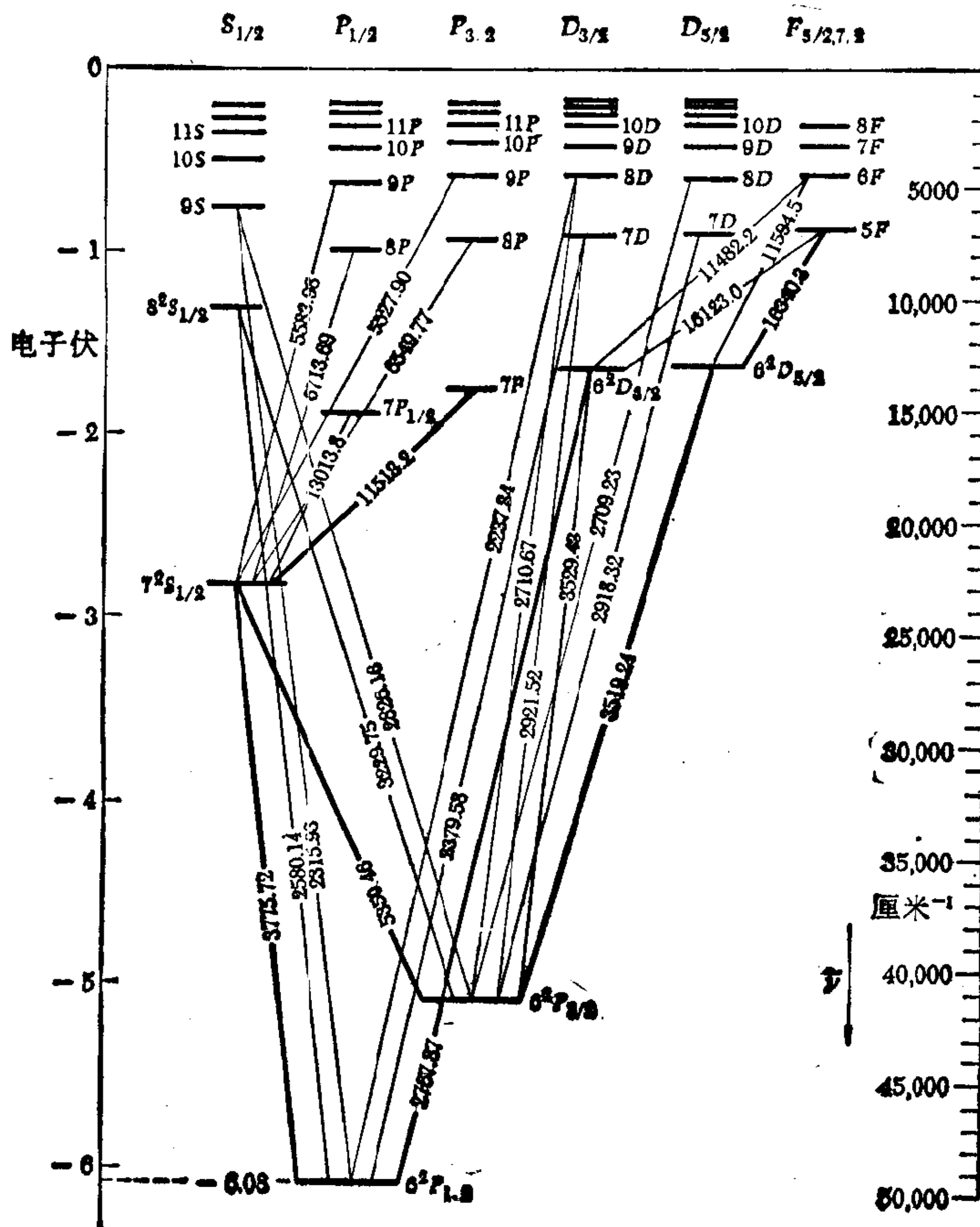


图 34A　中性铊原子的谱项图．斜线上的数字是所观察到的跃迁的波长(单位为埃)．(依据 Grotrian)

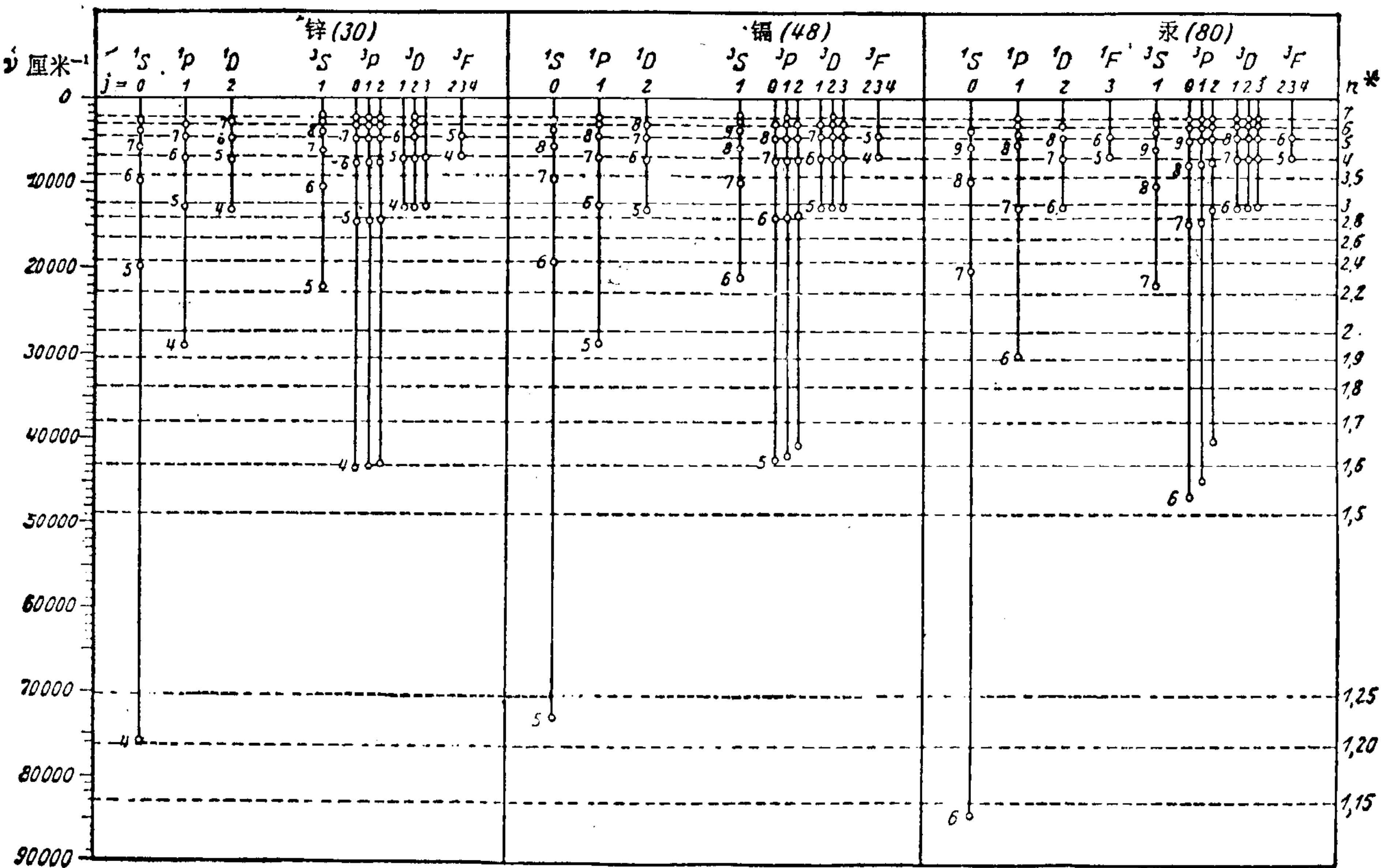


图 35.4　锌，镉与汞的谱项图，列在一起显示出这样的事实：化学上类似的元素有着类似的谱项图。

图 35*B* 元素的周期表．在化学符号上的是原子序数 Z，符号下的数字是原子量（相当稳定的元素的）．

注意镧系列（稀土系列）包括 15 个化学上十分类似的元素．所有这些原子在最外层有同样的电子组态．当我们顺着系列前进时，内层逐步被电子填满，因而就产生了这个系列，在这幅图景的基础上，玻尔预言了当时尚未发现的原子序数为 72 的元素即铪，在化学上将类似于锆而不是类似于稀土系列．后来的确在锆矿里发现了铪，这是理论上的一个突出成就．锕系元素组成了类似的系列．

1 H 1.0080																	2 He 4.003
3 Li 6.940	4 Be 9.013											5 B 10.82	6 C 12.011	7 N 14.008	8 O 16.000	9 F 19.00	10 Ne 20.183
11 Na 22.991	12 Mg 24.32											13 Al 26.98	14 Si 28.09	15 P 30.975	16 S 32.066	17 Cl 35.457	18 Ar 39.944
19 K 39.100	20 Ca 40.08	21 Sc 44.96	22 Ti 47.90	23 V 50.95	24 Cr 52.01	25 Mn 54.94	26 Fe 55.85	27 Co 58.94	28 Ni 58.71	29 Cu 63.54	30 Zn 65.38	31 Ga 69.72	32 Ge 72.60	33 As 74.91	34 Se 78.96	35 Br 79.916	36 Kr 83.80
37 Rb 85.48	38 Sr 87.63	39 Y 88.92	40 Zr 91.22	41 Nb 92.91	42 Mo 95.95	43 Tc	44 Ru 101.1	45 Rh 102.91	46 Pd 106.4	47 Ag 107.880	48 Cd 112.41	49 In 114.82	50 Sn 118.70	51 Sb 121.76	52 Te 127.61	53 I 126.91	54 Xe 131.30
55 Cs 132.91	56 Ba 137.36	57–71 La 系	72 Hf 178.50	73 Ta 180.95	74 W 183.86	75 Re 186.22	76 Os 190.2	77 Ir 192.2	78 Pt 195.09	79 Au 197.0	80 Hg 200.61	81 Tl 204.39	82 Pb 207.21	83 Bi 208.99	84 Po	85 At	86 Rn
87 Fr	88 Ra 226.03	89–103 Ac 系	(104)	(105)	(106)	(107)	(108)										

La 系	57 La 138.92	58 Ce 140.13	59 Pr 140.92	60 Nd 144.27	61 Pm	62 Sm 150.35	63 Eu 152.0	64 Gd 157.26	65 Tb 158.93	66 Dy 162.51	67 Ho 164.94	68 Er 167.27	69 Tm 168.94	70 Yb 173.04	71 Lu 174.99
Ac 系	89 Ac 227.04	90 Th 232.05	91 Pa 231.05	92 U 238.04	93 Np	94 Pu	95 Am	96 Cm	97 Bk	98 Cf	99 Es	100 Fm	101 Md	102 No	103 Lw

元素	原子序数	壳层 K	L		M			N		
		次壳层 1s	2s	2p	3s	3p	3d	4s	4p	4d
H	1	1								
He	2	2								
Li	3	2	1							
Be	4	2	2							
B	5	2	2	1						
C	6	2	2	2						
N	7	2	2	3						
O	8	2	2	4						
F	9	2	2	5						
Ne	10	2	2	6						
Na	11	2	2	6	1					
Mg	12	2	2	6	2					
Al	13	2	2	6	2	1				
Si	14	2	2	6	2	2				
P	15	2	2	6	2	3				
S	16	2	2	6	2	4				
Cl	17	2	2	6	2	5				
A	18	2	2	6	2	6				
K	19	2	2	6	2	6		1		
Ca	20	2	2	6	2	6		2		
Sc	21	2	2	6	2	6	1	2		
Ti	22	2	2	6	2	6	2	2		

图 35C 轻原子的壳层结构．用字母 K, L, M, N, ⋯表示的主要壳层划分为图中所示的支壳层．不同的周期用细水平线指明．用灰色表示的是完全的惰性气体组态，在前三个周期中，壳层以令人满意的规则方式依次填充，但从钾开始在里壳层尚未完全填满前，就已开始填入较外层．这个现象也出现在周期表的后面，它已在理论上得到颇好的解释．

一个 s 支壳层可容纳 2 个电子，p 壳层则可容纳 6 个电子，d 壳层则为 10 个电子．

层结构来理解. 在这个长方形的表格中，元素以一定方式排列，即按照原子序数 Z 的增加而排列，并使得有相似化学性质的元素处于同一行. 原子里的电子数等于 Z，随着我们顺着 Z 增加的方向前进，电子以规则的形式逐步充填"壳层"，而化学性质就取决于壳层被充填的情况. 例如，在一定的壳层全被充满时，表中就出现惰性气体. 在一层中可以容纳的电子数由泡利不相容原理决定，因此这个原理对化学有着决定的重要性. 当然，上述情况在泡利的伟大发现之前，人们已经置信不疑了.

按照上述线索去解释周期表的细节，那是件令人入迷的工作，但我们在本书中不欲作此. 这个研究最好是结合光谱和能级的系统研究一起进行. 而在一门导论性课本中这就有些太多了. 为了促进读者的爱好起见，我们在图 35C 列出部分原子的电子组态表.

36 当门捷列也夫在 1869 年第一次提出周期表时，人们既不知道电子，也不知道原子核. 因此门捷列也夫不是按电荷数 Z，而是按照原子量的递增次序来排列元素. 幸运的是，这个次序是正确的，只有很少的几个例外. 氩-钾就是这样的例外：氩的原子量大于钾，然而这两个元素的化学性质(氩是惰性气体而钾是碱金属)无疑表明氩必须在前. 从化学的观点上看周期表中元素的次序是十分清楚的，因而在这样的基础上就有可能对每个元素给以一个原子序数 Z.

在这里我们应当提及，门捷列也夫曾经有远见地在他的表中留下了某些空位以便填上当时尚未发现的元素[1].

37 认识到原子序数实际上量度了原子核的电荷，因此它等于电子的数目，这一点在原子理论上就向前迈出了重要的一

1) 关于门捷列也夫工作的评述及周期表的历史，请见 *The World of the Atom*, Vol. I. H. Boore and L. Motz (Basic Books, Inc., New York, 1966).

步．H. G. J. 莫塞莱在1913年左右做的工作对于解决这个问题特别重要．他系统地测量了大量元素的X射线的波长，因而能够说明(在不同元素中)相似谱线的波长以一种非常简单的方式取决于原子序数[1]．让我们简单地考察一下这个问题．

当一个原子样品受到大能量电子的轰击(能量可以达到100千电子伏)时，发现短波电磁辐射以X射线的形式被发射出来．此外还发现这种辐射的光谱由一些表征相关元素特性的锐线迭加在连续背景上(见第四章，图23A的一条实验曲线)．按照我们在第二章第27节所讨论的精神，我们假设在特征谱线的发射中必须涉及最内层的电子．入射电子可以从最内层(称作K层)打出一个电子，而外层里的某一个电子将跟着"掉"进它空出的"穴"．结合能之差将以X射线光子的形式出现。

在第二章第27节中，我们指出过，最内层电子的结合能应当近似地为

$$B_k = Z^2 R_\infty \tag{37a}$$

这里$R_\infty = \frac{1}{2}\alpha^2 mC^2$，是里德伯常数．我们尚未曾介绍过在下一壳层的结合能应为多少的理论，但是让我们假定它正比于B_k，不过要小些．因此，如果一个电子从其次一个外壳层掉入最内层时，我们预期发射光子的波长λ应为

$$\lambda = C/Z^2\bar{R}_\infty \tag{37b}$$

这里C是个略微与Z有关的常数．如果这些概念正确的话，$\ln(\lambda)$对$\ln(Z)$的函数图就应是条直线．这样一种关系有如图37A，正如我们所见到的，实验上确定的波长的确相当精确

---

1) H. G. Mosley, "The High-Frequency Spectra of the Elements", *Philosophical Magazine* **26**, 1024(1913), and **27**, 703 (1914).

地落在一条直线上．常数C约等于4/3，正是玻尔的理论所预言的．

由于填入空穴的电子可以来自一系列不同的壳层，而且由于空穴可能产生于若干壳层之一，我们预期有几条特征谱线．事实上所发现的也是如此．在图37A中我们只画出这些线中的一条，所涉及的壳层是所有原子中的同样壳层．

正如我们所见，原子核的电荷可通过这样的X射线测量法来确定，而莫塞莱的工作就导致对于周期表含义的新理解．

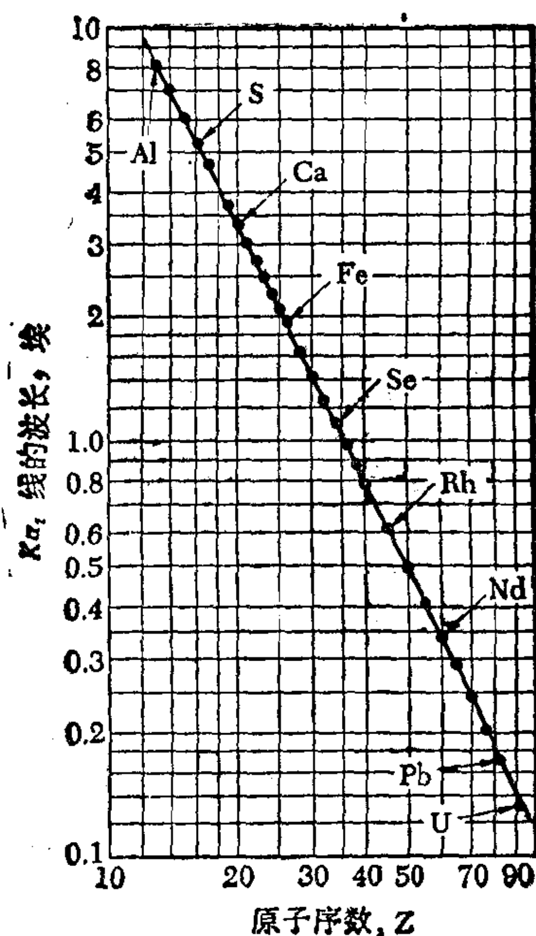


图37A ln(λ)与ln(Z)的关系图．这里λ是原子序数为Z的元素的X射线光谱中所谓$K\alpha_2$线的波长．在本图的精确度下，实验数据全都落在一条直线上．对几乎所有元素都有数据，虽然出现在此图上的只是专门挑选出来的几种原子．有关本图的简单理论请见本文．

38 下面让我们来讨论原子核的某些方面．在图 38*A* 的能级图中表示了硼同位素 $_5B^{11}$ 的核能级，这是由实验加以确定的．在这个图里我们指定基态的能量是零．基态的总角动量 $j=3/2$．特别宽的能级用绫纹表示出，而纹宽则大略地表示了能级的宽度．

这个原子核的离解极限是 8.667 兆电子伏：在这之上核将分为一个 α 粒子与锂同位素 $_3Li^7$．在主要的能级图的右边表示这个离解模式在大约 11 兆电子伏能量之上．硼核可以以两种方式来离解，或者是变为一个中子和硼同位素 $_5B^{10}$，或者变成一个质子和铍同位素 $_4Be^{10}$，这些离解模式也在同位素 $_5B^{11}$ 的能级图的右方表示出来．然而，请注意同位素 $_5B^{11}$ 在离解能量 8.667 兆电子伏之上有一系列能级．在这个能量之下核只能发射出 γ 射线，但在此之上核也能发射出实物粒子（在 $_5B^{11}$ 里所观察到的 γ 射线跃迁用竖线表示）．

正象这个例子所表明的，在解释“连续能谱”时，我们可得小心些．在离解极限之上也同样可能存在能级．离解能只是这样一种能量，在那时体系可以分成两个实物粒子．在这个界限之下体系仍可“离解”，但只是变为一个光子和一个实物粒子．我们假如想在与实物粒子同样的基础上处理光子，我们就可断言说，在离解极限以上的能级（常被称作“虚能级”）原则上与离解极限之下的能级并无差别：基态之上的所有能级都是不稳定的，实际上即使基态也可能是不稳定的，例如一个放射性原子核的基态．在我们图 38*A* 的例子中，基态是稳定的：同位素 $_5B^{11}$ 存在于自然界所发现的硼中．

39 如果我们把某一个核中所有的质子变为中子以及中子变为质子，就可以变为另一个核，则这两个原子核可称为组成了一对镜象核．

正如我们在第二章第 37 节所说过的，核物理中占统治地

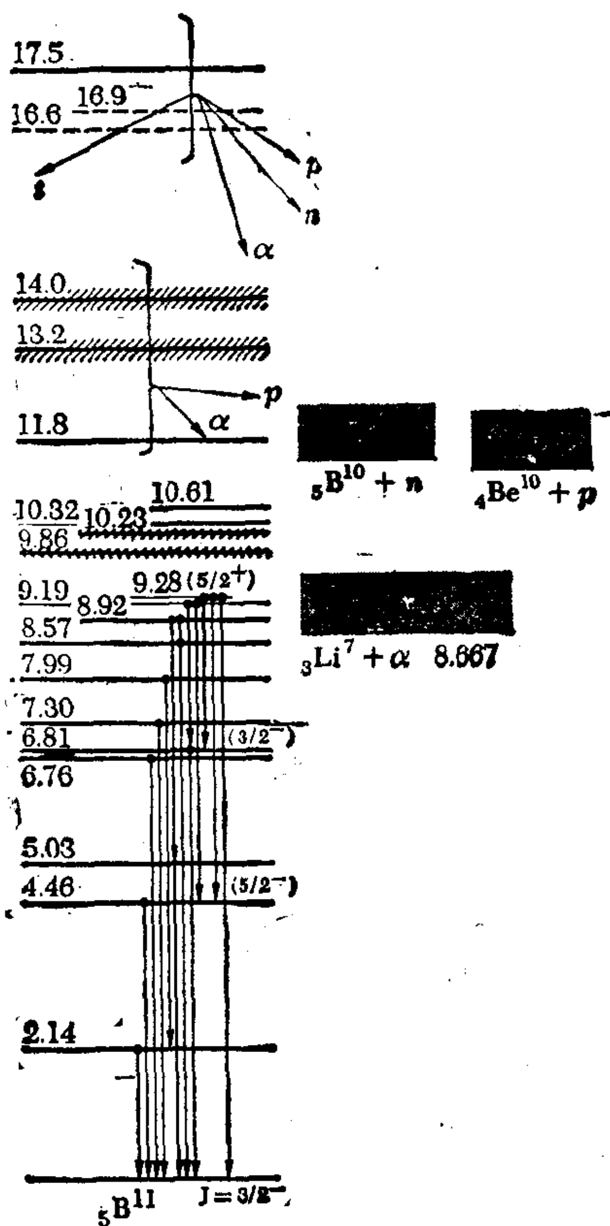


图 38*A* 硼核 $_5B^{11}$ 的能级示意图. 本图是 F. Ajzenberg and T. Lauritsen "Energy Levels of Light Nuclei," *Reviews of Modern Physics*. **27**, 77 (1955) 的一张图的简化，建议读者阅看原文.

位的强相互作用被认为在这种变换下是不变的. 质子间的力与中子间的力是相同的. 如果这种信念正确，并如果这里除强相互作用外没有其他的相互作用，那么在两个镜象核里的能级系统必定是全同的.

在图 39*A* 与图 39*B* 中，我们画出了两对镜象核的实验中

所发现的能级图．正如所见，在成对的镜象核的能级间有可能建立起对应关系．

然而，对应能级的能量是不相等的，这正如图上所示的那样．其理由还存在着电磁力，而电磁力在中子-质子交换中并非不变．

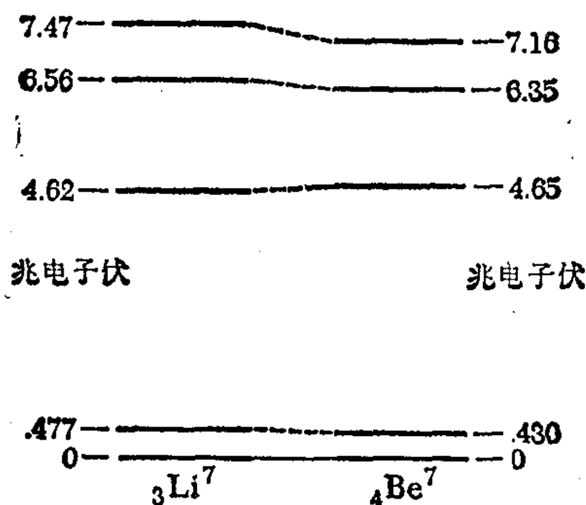


图 39*A* 质量数为 7 的锂与铍的同位素形成了一对镜象核：如果锂原子核中的中子换成质子，质子换成中子，我们就得到铍原子核．镜象核有类似的但不全同的能级系统．其差别是一种电磁效应．

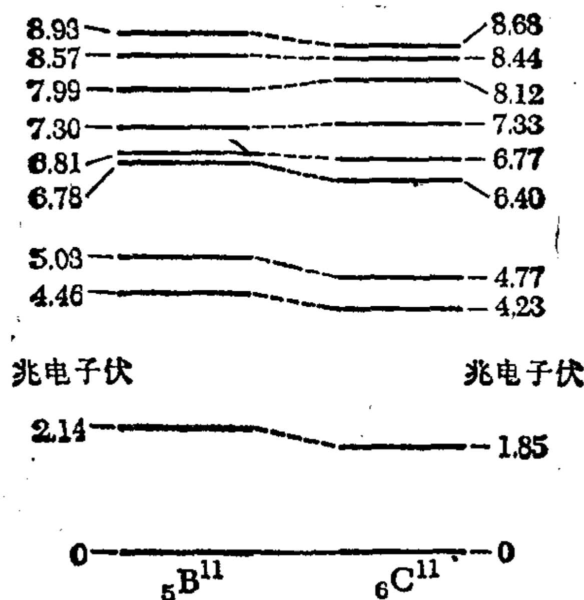


图 39*B* 质量数为 11 的硼与碳的同位素形成另一对镜象核．

40 图 40*A* 的能级图解释了放射性原子核所发射的 α 粒子何以不总是以单一确定的能量出现．图中表示了铋同位素 $_{83}Bi^{212}$ 通过 α 衰变变为铊同位素 $_{81}Tl^{208}$，衰变发生在从母核的基态转向子核的若干受激态之一，或子核的基态．在画出能级图时，母核的基态高于子核的基态约 6.2 兆电子伏．这个

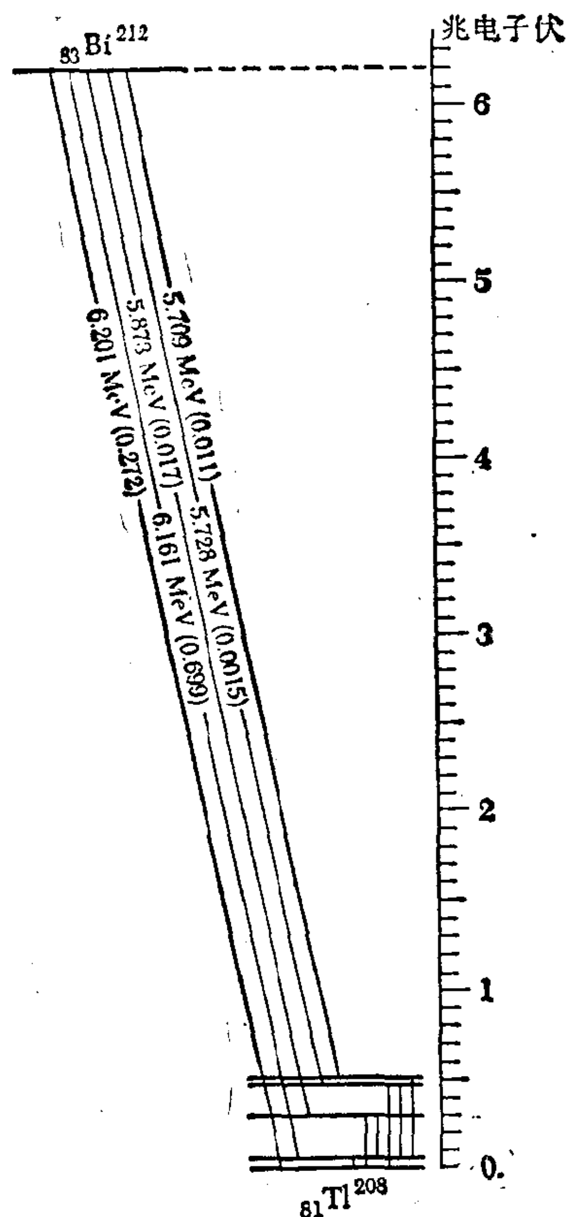


图 40*A* 在铋同位素 $_{83}Bi^{212}$ 的 α 衰变中，衰变后子核可以在基态，也可在四个受激态中的任何一个，因此 α 粒子会以 5 种不同的能量发射出。然后子核通过 γ 辐射，从受激态衰变。

能量是 α 粒子发射时可能携带的最大能量．很清楚，如果衰变到子核的受激态，那么 α 粒子将带有较小的能量．就图中所表示的能级系统而言，α 粒子发射出时可能具有五种确定的不同能量之一．斜线就表示了这些衰变．括号内的数字是不同的衰变模式的分支比．

如果衰变后子核处于一个受激态，它将发射 γ 射线，从而最后变到基态，图上用竖线表示．

对许多其他的 α 放射性的核，衰变总是直接到达子核的基态，因为没有恰当的受激态可资利用．这样 α 粒子将以一种确定的能量出现，而此时将没有与 α 衰变相联系的 γ 射线．

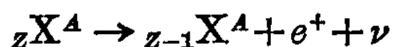
41 如果在某个过程中，原子核发射出一个电子或一个正电子，那么我们就说这个过程是 β 衰变．中子的 β 衰变是这一类过程中最简单的，已是由实验很好确定的现象．自由中子的平均寿命为 16 分钟．由于中子与质子的质量差是 $(m_n - m_p) = 1.3$ 兆电子伏，我们可以画出类似于图 41A 所示的能级图，斜线表示跃迁．如果只发射出一个电子，它就总应带有同样的能量（约为 1.3 兆电子伏），正如在 α 衰变的情况中一样．实验上发现，事实上电子发射出时可以带有静止能量 0.5 兆电子伏与可资用能量 1.3 兆电子伏之间的任意值．对此的解释是，还发射出别的粒子，在这种情况下同时发出的是无质量的反中微子，而可资用的能量就分给电子和反中微子了．于是 β 衰变的反应公式可写为

电子发射：



$$_{Z}X^{A} \rightarrow {}_{Z+1}X^{A} + e^{-} + \bar{\nu}$$

正电子发射：



$$_{Z}X^{A} \rightarrow {}_{Z-1}X^{A} + e^{+} + \nu$$

这里 X 表示了放射性同位素的化学符号；$e^{\pm}$ 分别表示正电子和电子；ν 表示了中微子而 $\bar{\nu}$ 表示反中微子．

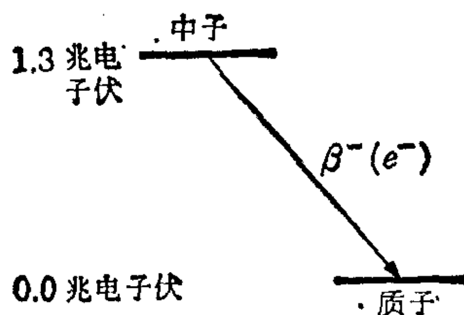


图 41*A* 表示中子的衰变的谱项图. 中子的质量是 939.55 兆电子伏，而质子的质量是 938.25 兆电子伏. 其差别 1.30 兆电子伏中的一部分，即 0.50 兆电子伏，表现为电子的静质量，而其余部分则表现为电子、反中微子及质子的动能，后二者是衰变的结果. 质子所带的能量是极小的，因此大多数可资用的能量由电子和反中微子分占.

42 图 42*A* 的能级图表示了钴同位素 $_{27}Co^{60}$ 所发射的 β-γ-级联的来源. 这个同位素首先 β 衰变到镍同位素 $_{28}Ni^{60}$ 的一个受激态，后者处于基态之上 2.4 兆电子伏. 发射电子的最大动能是 0.3 兆电子伏. 电子的能量可以为零和这个最大能量值之间的任意能量，过程中这部分的反应公式可写为



$$_{27}Co^{60} \to {}_{28}Ni^{60*} + e^- + \bar{\nu}$$

这里(*)号表示这个镍同位素处在一个受激态中. 随后，它从这种状态发射出 γ 射线经过另一个在基态之上 1.3 兆电子伏的受激态而衰变到基态(实际上，这是即刻发生的). 因此这个 β 衰变过程总是伴随着两条 γ 射线，其能量分别为 1.1 兆电子伏与 1.3 兆电子伏.

钴核的半衰期是 5.3 年，而这个级联过程便为我们提供了一个相当长寿命的 γ 射线源了.

β 放射性的核常常有极长的半衰期，正如 α 发射体那样. 在 β 发射体的情况下，理由在于导致 β 衰变的相互作用从本性上就是很微弱的. 这种作用通称为弱相互作用，粗略地估计约为强相互作用的 10^{-14}. 因此，比电磁相互作用也弱得多. 弱相互作用是许多基本粒子(相当慢的)衰变的原因，倘若

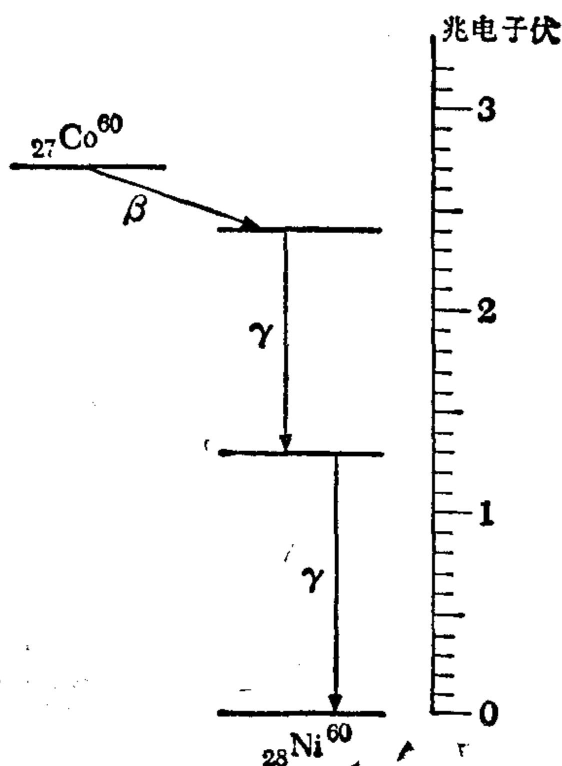


图 42Δ　钴同位素 $_{27}Co^{60}$ 的 β-γ-级联辐射的谱项图. 这个同位素首先 β 衰变到镍同位素 $_{28}Ni^{60}$ 的一个受激态上，它位于基态上 2.4 兆电子伏. 电子的最大动能是 0.3 兆电子伏. 镍同位素的受激态迅速相继地发射两次 γ 射线而衰变.

没有弱相互作用，这些粒子就可能是稳定的. 这种粒子的例子可举出：带电 π 介子，中子，μ 介子，K 介子和 λ 超子.

四、谱线的多普勒增宽与碰撞增宽效应

43 本章的前面几节中，我们讨论过原子发射的谱线的自然线宽 $\Delta\omega$ 与跃迁中所涉及的态的平均寿命之间的关系. 在低能态为基态的特殊情况下，我们发现：

$$\Delta\omega=\frac{1}{\tau} \tag{43a}$$

这里 τ 是高能态的平均寿命.

在第 26 节中我们引用了原子的典型 τ 值. 我们估计相

对线宽 $\Delta\omega/\omega$ 约为 10^{-7}. 当然，这只是非常粗略的数量级上的估计.

但在自然界中所观察到的原子谱线一般远远宽于上述估计值. 我们在第 14—26 节的理论是应用到初始是静止的孤立原子,但实际上所研究的原子既不能孤立起来,也不是静止的. 为了研究附加增宽的起因，让我们假设所研究的是一种处于温度 T 与压强 P 之下的原子气体所发射的光. 设原子量为 A. 气体中的原子将以随机方式到处运动，不停地彼此碰撞.

44 由于无规则的热运动,某些原子将跑向观察者,另些则跑离开去. 结果，由许多原子发射的光线叠加起来的谱线将由于多普勒效应而增宽. 对一个朝向观察者运动的原子，如其速度为 v, 则多普勒频移就是 $\delta\omega/\omega=v/c$; 为估计多普勒增宽的总量 $\left(\frac{\Delta\omega}{\omega}\right)_D$, 我们在多普勒频移公式中代入原子的平均速度 v_0. 实际上 v_0 是沿着观察方向的平均速度. 我们可以将该方向取为沿着 3-轴. 在第二章第 17 节中曾说过原子的平均动能与温度 T 有以下关系

$$E_{\text{kin}}=\frac{1}{2}M(v_{01}^2+v_{02}^2+v_{03}^2)=\frac{3}{2}kT \tag{44a}$$

这里 $M\approx AM_p$, 是原子的质量 (M_p 是质子的质量). 在三个不同的坐标方向上的平均速度很明显是相等的,而我们得到

$$v_0=v_{03}=\sqrt{\frac{kT}{AM_p}} \tag{44b}$$

于是多普勒增宽就是

$$\left(\frac{\Delta\omega}{\omega}\right)_D\sim\frac{1}{c}\sqrt{\frac{kT}{AM_p}}$$

$$=(0.52\times10^{-5})\sqrt{\frac{1}{A}\left(\frac{T}{293^\circ\text{K}}\right)} \tag{44c}$$

45 原子间的碰撞也要导致谱线的增宽. 为了估计这种效应我们将假定,对任何单个原子,在两次相继碰撞之间的时间间隔为 τ_0. 其倒数 $1/\tau_0$ 就是气体的碰撞率. 此外我们还假定每次碰撞完全地中断了发射过程. 时间 τ_0 于是就是原子的有效平均寿命,与关系式(43a)相类似我们可假设相应的谱线增宽是:

$$(\Delta\omega)_0 \sim \frac{1}{\tau_0} \tag{45a}$$

现在我们必须估计碰撞频率 $1/\tau_0$. 将原子看成半径为 r 的小球,让我们集中注意到一个刚刚经受过碰撞的特定原子. 设其速度是 v. 我们希望找出在它将受到下一次碰撞以前所经过的平均时间 τ_0. 为对此时间作出数量级上的估计, 可以允许假定所有其他原子都在静止之中. 当然, 对于精确的 τ_0 我们就须也考虑其他原子的运动. 在一个短的时间间隔 dt 内这个特定原子通过 vdt 的距离. 考虑一个半径为 $2r$, 以原子的轨迹为中心轴的圆柱体,柱体高为 vdt. 假定没有其他原子处在圆柱体内, 则在 dt 时间间隔内就不会有碰撞. 在这个时间间隔中发生碰撞的几率等于在圆柱体内找到其他原子的几率. 圆柱体的体积是 $4\pi r^2 vdt$, 而若 n 是气体里单位体积中原子的平均数, 那么在此圆柱体内的原子的平均数就是 $4\pi r^2 nvdt$. 假定这个数与1相比甚小. 它也将是在圆柱体内发现一个原子的几率, 也就是在 dt 时间内发生碰撞的几率. 为估计 τ_0 我们引进条件,

$$4\pi r^2 nv\tau_0 \sim 1 \quad 或 \quad \frac{1}{\tau_0} \sim 4\pi r^2 nv \tag{45b}$$

它表示一个原子在时间 τ_0 内扫出的半径为 $2r$ 的圆柱体内发现的原子的平均数的数量级约是1.

任何一摩尔气体包括 $N_0 \approx 6\times10^{23}$ 个分子 (在我们这里

这些分子就是原子)在温度为273°K，一个大气压的条件下，1摩尔占体积22.4升. 换言之，在这样的温度和压强下，每单位体积的原子数是

$$n_0=\frac{N_0}{22.4\text{升}}\cong 2.7\times 10^{19}\text{原子}/(\text{厘米})^3 \qquad (45c)$$

在任何其他压强 P 和温度 T 下，每单位体积的原子数为

$$n=n_0\left(\frac{P}{1\text{大气压}}\right)\left(\frac{T}{273°\mathrm{K}}\right)^{-1} \qquad (45d)$$

(这个结果得自气体的状态方程).

作为对于半径的合理估计我们可以取玻尔半径，$r\cong 0.5\times 10^{-8}$厘米，从

$$\frac{Mv^2}{2}=\frac{3}{2}kT \qquad (45e)$$

我们可以得到典型的速度 v，式中 $M\cong AM_p$ 是原子的质量. 给合上述的所有方程，我们最后得到

$$(\Delta\omega)_C\sim\frac{1}{\tau_0}\sim(2\times 10^9\text{秒}^{-1})$$

$$\times\left(\frac{P}{1\text{大气压}}\right)\times\sqrt{\frac{1}{A}\left(\frac{273°\mathrm{K}}{T}\right)} \qquad (45f)$$

46 如果我们现在将(45f)所给出的碰撞增宽与(44c)所给出的多普勒增宽跟由于孤立原子受激态的有限寿命而引起的增宽相比较，我们可以注意到最后提到的一种类型的增宽一般而言远远小于前二种. 碰撞增宽在压强减小时随之减少，在低压时多普勒增宽是主要的，因而是谱线有一定宽度的根本理由. 自然线宽只能在非常特殊的条件下才能见到.

我们不打算将碰撞增宽与多普勒增宽继续讨论下去. 这些现象在实际上固然十分重要，但对原子发射与吸收光的基本问题则无关. 作者认为，在本课程中有必要多少对它们作

一些讨论，不然会给读者就留下印象以为所观察到的谱线宽度总是自然线宽了.

五、提高课题：关于电磁跃迁的理论[1]

47 让我们考虑两个重要问题.（在原子，或核中）一个受激态对于粒子的发射是稳定的，而对于光子发射是不稳定的，则它的平均寿命要远长于所发射光子频率的倒数；这是为什么呢？电偶极辐射为什么是原子物理中最为显著的辐射模式呢？

让我们尝试依据于"半经典"的电磁理论来讨论这些问题．也即是说，我们的论证在精神上是半经典和半量子力学的.

这样的简化思考的处理方式的理由是，因为它是有成效的．我们能够以合理的方式回答上述两个问题.

48 第一个问题的答案是："因为精细结构常数 α 非常之小．"让我们来看看这是什么意思.

首先，我们回顾一下在第二章的第 29 节及第 30 节所达到的结论，即发射电磁波波长一般说远大于发射体（原子或核）的尺寸．这种状况有着重要的物理结果，它也简化了辐射现象的数学讨论．让我们先假定原子或原子核处于受激态时其行为有如一个振动的电偶极子．设 ω 是振动频率，这也是发射光的频率．设 a 表示发射体的尺寸，由于这个振子带有一个或几个基本电荷，我们可以假定电偶极矩数量级为 ea. 至于振子远小于波长这点可由条件

$$\frac{a\omega}{c}\ll 1 \tag{48a}$$

1）初读时可略去。

表示出.

在本套书的第三卷中，我们已知道这样一个电偶极子辐射能量的速率是

$$W=\frac{1}{3c^3}\omega^4(ea)^2 \tag{48b}$$

这个公式给出了所发射出的*功率*. 由于我们知道我们的原子(或原子核)将只会发射出单个光子，因而就对发射体发射出总能量为 $\hbar\omega$ 所需的时间 τ 感兴趣. 这个时间为

$$\frac{1}{\tau}=\frac{W}{\hbar\omega}=\frac{\omega}{3}\left(\frac{e^2}{\hbar c}\right)\left(\frac{a\omega}{c}\right)^2 \tag{48c}$$

或者作为一个数量级上的估计

$$\frac{1}{\tau}\sim\omega\alpha\left(\frac{a\omega}{c}\right)^2 \tag{48d}$$

我们将 τ 解释为受激态的平均寿命. 这就是受激态通过发射一个光子而衰变所需的时间，让我们考虑无量纲的量

$$\omega\tau\sim\frac{1}{\alpha}\left(\frac{a\omega}{c}\right)^{-2} \tag{48e}$$

这个量正比于体系衰变前在时间 τ 内能以完成的振动次数. 很明显，受激态越稳定，量 $\omega\tau$ 就越大，正象我们所见到的，$\omega\tau$ 很大有两个理由：它正比于“大”的量 $\frac{1}{\alpha}\approx137$，并且反比于量 $(a\omega/c)$ 的平方，而如我们所说过的，$(a\omega/c)$ 一般讲是小量.

49 在原子的情况中我们可以取 a 为玻尔半径，$a_0=\frac{1}{\alpha}\left(\frac{\hbar}{mc}\right)$. 对于一次光学跃迁，频率的数量级为 $\omega\sim\frac{\alpha^2mc^2}{\hbar}$，于是我们就得到

$$\omega\tau\sim\alpha^{-3},\quad \tau\sim\left(\frac{\hbar}{mc^2}\right)\alpha^{-5} \tag{49a}$$

这表示 τ 和 $\omega\tau$ 与精细结构常数的关系. 在光学波段里，此公

式预言平均寿命的范围从 10^{-7} 秒到 10^{-9} 秒，这符合于观察值.

为了对一个能够通过电偶极跃迁衰变的核的受激态的寿命给于粗略估计，我们可取 $a=10^{-13}$ 厘米. 能量为 200 千电子伏的 γ 射线波长约为 6×10^{-10} 厘米，我们就得到 $\tau\sim10^{-12}$ 秒. 需要强调指出，这个估计是极为粗糙的，但作为数量级上的大略估计它与实验观察相合，注意，按(48e)，寿命 τ 反比于发射频率的立方.

我们已回答了第 47 节所提出的两个问题中的第一个问题，现在已可以理解，只能够进行电磁衰变的受激态的寿命何以远大于所发射光的频率的倒数.

50 现在转到第二个问题，即关于原子中电偶极跃迁的主导作用的问题. 为了研究这个课题，我们必须从运动电荷的一种组态来考虑发射率，这样一种组态的电偶极矩总是为零.

图 50A 表示了一个发射出电四极辐射的射源. 两个箭头表示了两个以频率 ω 振动的电偶极，这些偶极大小相同，但方向相反，偶极间隔为 a，并且对于原点 O 对称地放置，原点是"原子"的中心. 我们在远离原子为 r 的 P 处观察辐射.

很清楚，这个射源的电偶极矩等于零. 磁偶极矩也同样为零，因为在射源中没有环流.

现在让我们来考虑在射源外很大距离 r 上沿着固定方向的电场. 电场处于图所在的平面上，而垂直于矢径 OP. 设 E_1 是只有偶极子 1 存在并置于原点 O 时，P 点的电场. 它就是

$$E_1=\frac{C(\theta)}{r}\exp\left[i\left(\frac{r}{c}-t\right)\omega\right], \tag{50a}$$

这里 $C(\theta)$ 是 θ 的函数，正比于电偶极矩. 它的精确形式在这里与我们无关.

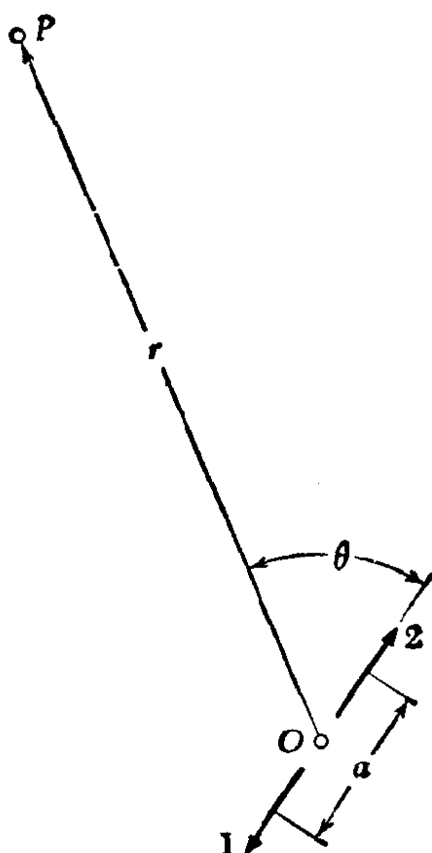


图 50*A* 电四极源的示意图．箭头表示两个以相同频率 ω 振动的电偶极子．它们大小相等，方向相反．这种组态的电偶极矩以及磁偶极矩都消失了．但电四极矩并没有消失．如 a 与波长 λ 相比甚小，那么体系辐射能量的速率与单个偶极子相比要小 $(a/\lambda)^2$ 这样一个因子．

假如现在两个电偶极子都存在着，有如图示的那样，那么由两个偶极子所产生的电场几乎就抵消了，但是，并不完全抵消，因为从 P 到偶极 1 的距离约是 $\left(r+\frac{a}{2}\cos\theta\right)$，而从 P 到偶极 2 的距离约为 $\left(r-\frac{a}{2}\cos\theta\right)$；结果由偶极子 1 所产生的电场在位相上与由偶极子 2 所产生的电场不同，因此，电场 E_2 是

$$E_2=\left\{\frac{C(\theta)}{r}\exp\left[i\left(\frac{r}{c}-t\right)\omega\right]\right\}\times\left[\exp\left(\frac{ia\omega\cos\theta}{2c}\right)-\exp\left(\frac{-ia\omega\cos\theta}{2c}\right)\right] \quad (50b)$$

51 我们现在来利用(48a)的假定，即 $(a\omega/c)\ll 1$：这个假定对于原子中的光学跃迁很显然是有效的，因为 a 不可能比典型的原子尺寸大很多．因此，我们可以展开在(50b)右端括号内的两个指数函数，忽略掉所有高于 a 的一次方的各项，就得到

$$E_2 \approx i\left(\frac{a\omega}{c}\right)(\cos\theta)E_1 \tag{51a}$$

这里 E_1 由(50a)给定，因此由图 50A 所示的电四极子所产生的电场 E_2 到处都至少比“形成四极子”的单个偶极子所产生的电场 E_1 小一个 $(a\omega/c)$ 的因子．由于辐射率正比于电场平方，我们可以断言典型的电四极子辐射率比典型的电偶极子辐射率小 $(a\omega/c)^2$ 这样一个因子．对应的寿命的关系就是：

$$\tau_{E2} \sim \left(\frac{a\omega}{c}\right)^2 \tau_{E1} \tag{51b}$$

这里 τ_{E1} 是电偶极子跃迁的平均寿命，而 τ_{E2} 是电四极子跃迁的平均寿命．

我们已经估计过在原子中 $\frac{a\omega}{c}$ 的数量级为 α，于是寿命的比值可从 10^{-4} 到 10^{-6}．

类似的考虑可应用于原子核，其中 a 是核的特征长度，而 ω 是发射频率．这时 $\frac{a\omega}{c}$ 也很小，比如说约为 10^{-3} 数量级或更小些．

52 图 52A 表示了一个电偶极矩消失但磁偶极矩不消失的辐射源的例子，小箭头仍表示(振动的)电偶极子，我们可以想象这样一个偶极子由沿着箭头方向来回振动的带电粒子所组成，这对应于顺着正方形的边流动的交变电流，而体系的磁偶极矩就正比于电流强度与该正方形面积的乘积．

很明显，这里我们可以用非常类似于第 50 和 51 节中的

论证，从而就可得出

$$\tau_{M1} \sim \left(\frac{a\omega}{c}\right)^{-2} \tau_{E1} \tag{52a}$$

这里 τ_{M1} 是磁偶极跃迁的平均寿命.

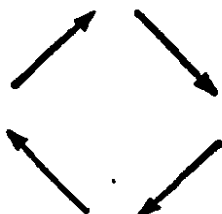


图 52A　若干振动的电偶极子的一种组态，此时电偶极矩消失了，而电四极矩亦消失了，但磁偶极矩并不消失．四个箭头表示了四个偶极子，它们大小相等，以相同频率振动．

53　将辐射区分为电偶极，磁偶极，电四极，磁四极，电八极等类型是按照辐射的对称特性来划分的．每个辐射类型的特征是一种特定的强度分布（作为方向的函数）及特殊的极化模式．当然，辐射的对称式样唯一地由射源的对称性质所决定，因而我们也可按照射源的性质来对辐射类型加以划分．一个电偶极发射电偶极辐射（缩写为 $E1$）．磁偶极发射磁偶极辐射（缩写为 $M1$），电四极发射电四极辐射（缩写为 $E2$），等等…….在表示核的电磁跃迁的能级图中我们常发现诸如 $E1$，$M3$，$E4$ 这样的符号，它们指的就是辐射的性质．

我们对于电四极和磁偶极辐射的讨论可以容易地推广到更高的多极子上去．为了产生一个电八极，我们使两个电四极彼此靠近，但取向相反，这样做的结果是电四极矩消失，容易理解这个体系的辐射率比单四极的辐射率要小 $\left(\frac{a\omega}{c}\right)^2$ 这样一个因子．每当我们在电多极的阶梯上上升一步，特征比率总要降低数量级为 $\left(\frac{a\omega}{c}\right)^2$ 的一个因子，这里 a 是体系的典型线度．对磁多极亦有类似情况．

于是，我们就能理解在原子中电偶极跃迁占统治地位的原因了，如果一个受激态可以沿几种不同的途径衰变，其中一个是 $E1$ 辐射，那末它将会以很高的几率通过 $E1$ 辐射而衰变．其他的辐射型式可能也存在，但不和 $E1$ 辐射相对应的谱线的强度要远小于 $E1$ 谱线的强度．

54 当我们在第 29—31 节中讨论了电偶极跃迁的选择定则时，我们说过这些定则是由角动量守恒原理推导出的．我们也说过，那条原理渊源于物理空间的各向同性．因此我们可以用似乎不同的方式来描写选择定则：*选择定则是由物理空间的各向同性推得的*．让我们略微探讨一下这个想法．

我们曾说过角动量量子数 j 量度了一个体系(比方说原子)的状态的角动量．在量子力学的框架内 j 有另外一种解释：它描写了状态的*旋转对称型式*．我们可以说 j 描写了当从所有方向看去时原子的表现．例如，设原子处于 $j=0$ 的状态，那么原子就在所有方向上有同样表现：$j=0$ 意味着状态是球对称的．如 $j=1$，那么状态就有一个与矢量相同的对称性．在电偶极跃迁中的辐射场即为*光子*的这种状态的一个例子：空间中整个场的型式在转动下必定保持与振源同样的对称性质．而振源是个电偶极矢量．我们已经说过一个电偶极光子携带一个单位的角动量，这就是对称型式和角动量之间的普遍联系的一个例子．电四极子的辐射类型用旋转对称量子数 $j=2$ 表征，相应地一个电四极光子携带有两个单位的角动量．因此电四极跃迁的选择定则不同于电偶极跃迁的法则：在电四极跃迁中原子的角动量的改变可以为两个单位．

55 回顾上述，所有支配电磁跃迁的选择定则可以从体系的旋转对称性守恒的原理推得．为说明这个深入的思想我们将证明一个特殊的选择定则，即对于所有(单光子)电磁跃迁来

说，从 $j_i=0$ 到 $j_f=0$ 的跃迁是被禁止的．另一种说法是一个处在球对称的受激态的原子（即 $j_i=0$）不可能通过发射一个光子衰变到另一个也是球对称的状态上去（即 $j_f=0$）．

我们的论证如下：在发射前原子处于球对称状态，它在各个方向上都具有相同的表现，在发射之后，现在由终态下的原子加上辐射电磁波所组成的体系也必须处在球对称状态．本来在空间中就没有优越方向，而如果物理空间是各向同性的，在发射后也不可能有任何优越方向．这就是我们所说的旋转对称性的守恒的含义．现在考虑发射后的情况．如果原子的终态对应于 $j_f=0$，是球对称的话，我们断言所发射的电磁波也必须球对称．它不可能因为角度不同而变化．这样一种电磁波并不存在，因而这种跃迁根本不可能发生．很清楚不可能存在任何球对称的电（或磁）偶极波．因为电偶极（或磁偶极）有确定的方向．也不可能有任何其他球对称的多极波，因为在一个给定时刻，和一个给定的空间位置，电场决定了垂直于矢径的一个方向，此点和此时的电矢量因此不可能在场的位形关于矢径作转动时保持不变，因此场的图式不可能是球对称的．

56 由偶极选择定则所禁止的跃迁，对于四极，或更高的多极跃迁来说，可能是允许的．假如考察本章中的原子能级图，我们就能看到几乎所有的受激态都可通过电偶极跃迁衰变到较低状态．核的能级结构常常是不同的，我们可以找到刚巧在基态之上的一种状态，它与基态差几个单位的 j 值．这样一种受激态不可能由于偶极辐射而衰变，结果就存在得比较长．如 j 值的差很大，而能量差很小，那么，由于发射的光子具有高阶的多极，受激态的寿命可以长达几分钟之久．这样一种状态就称为同值异能态．

问　题

1. 对某种原子观察到下述光谱线(本世纪早期),

$\tilde{\nu}_1=82258.27$, $\tilde{\nu}_5=15232.97$, $\tilde{\nu}_8=5331.52$

$\tilde{\nu}_2=97491.28$, $\tilde{\nu}_6=20564.57$, $\tilde{\nu}_9=7799.30$

$\tilde{\nu}_3=102822.84$, $\tilde{\nu}_7=23032.31$, $\tilde{\nu}_{10}=2469$

$\tilde{\nu}_4=105290.58$

这里列出的数字是波数,单位是厘米$^{-1}$.

(a) 尽可能多地找出例证来说明里兹组合原则,即说明有这样的情况:一个波数可以表示为两个其他的波数之差.

(b) 证明所有的谱线都可视为5个谱项的种种组合. 找出这些谱项来(可具有共同的任意附加常数),并画出谱项图以显示谱项以及对应于上述谱线的跃迁.

(c) 你能否找出有关这些谱项的一个简单公式? 在书的某处出现过这个谱项图吗?

(在你进行了这些分析之后,你可以瞧一瞧波长表以便确认是什么原子.)

2. 在对谐振萤光的一次研究中,用汞灯(在灯内的盛在石英容器中的汞蒸气中进行着放电过程)所发出的波长为2537埃的紫外光照射在一个石英容器C所装的物质上. 可以观察到下列事实:

(a) 假如容器C仅盛有汞蒸气而别无他物,那么C中的气体将非常强烈地散射入射光. 气体中的原子将会谐振. 被散射的辐射也具有波长2537埃.

(b) 如果C装有铊蒸气而别无他物,那么对入射光来说,C将是透明的,只有极少一点入射光被散射.

(c) 假定容器C装有铊和汞蒸气两者,那么C将会辐射汞线2537埃,它也能发射出一些铊的特征谱线即波长2768埃,3230埃,3529埃,3776埃及5350埃. 如果把一块玻璃板置放在C与汞灯之间,就没有任何一条上述的谱线被发射出.

(d) 在(c)所描写的条件下,可以发现铊线3776埃远宽于铊线2768埃,事实上,前者要比在对应于容器C的温度的多普勒增宽的基础上有

可能作出的解释还要宽得多，它也要比从充以铊蒸气的放电灯管中发射出的同样谱线宽得多。

试解释所有这些现象。作为提示，我们指出可参考本章的图 34A，即铊的谱项图。有趣的是可以注意到在实验中只观察到有较少的铊线。例如，谱线 2826 埃及 5584 埃就显然不存在。

3. 钠原子中 $3p_{1/2}$ 态（见本章图 32A）的寿命约为 10^{-8} 秒。试考虑一个充以氩气的容器，压强为 10 毫米汞柱，温度为 200°C。在容器内有一个很小的钠粒，并加热，因此使容器内有少量的钠蒸气。我们在发自钨丝而通过容器的灯光中观察到 5896 埃的吸收线。（加热的钨丝辐射的光具有连续光谱分布）试估计：

(a) 谱线的自然宽度；

(b) 谱线的多普勒增宽的大小；

(c) 谱线的碰撞增宽的大小。

将你的结果用波数表示出（也将问题中谱线的频率表示为波数，厘米$^{-1}$）。把这些宽度与（黄色）钠线 D_1 与 D_2 的精细结构间隔相比较。

(d) 在图 32A 的谱项图上，我们可以看到波长为 5688.22 埃的谱线。我们能否在上述的吸收实验里见到这条谱线？

容器中的氩气除去在容器里建立压强和一个平均温度外对整个过程并没有任何其他的效应。当我们希望考虑在吸收谱线上的碰撞效应时必须计及它的存在：因为容器中钠原子数远少于氩原子数，钠原子主要与氩原子相撞。

4. 让我们考虑原子所发射的谱线的形状。假设原子存在于气体形式的光源之中。利用分辨率很高的摄谱仪我们测量光强对频率的关系。对某些光源说，谱线可能会呈现出如图 57A 中那样的形状，而对另一些结构的光源，同样的谱线会呈现出如图 57B 那样的形状。其次我们可以注意到，作为一个通则只有在跃迁到基态时所产生的谱线才显示出 B 图的形状。你是否能解释这些现象；有些光源其发射谱线可以预期将是 A 图所示的那种类型，你是否能说明这些光源的物理特征？

5. 在问题 3 所描叙的实验条件下，以本章的公式(7a)为基础，估计在任何确定的时刻处于第一受激态的钠原子所占的比例（设 $T=$ 200°C）。

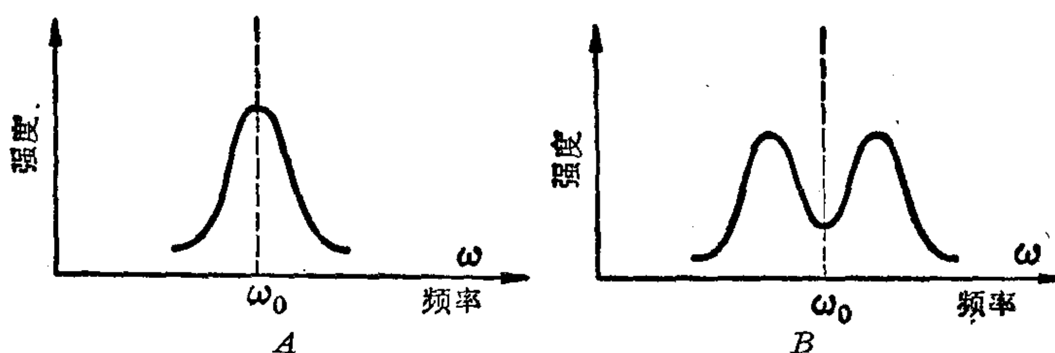


图 57*A*, *B* 这二个图与问题 4 有关，*A* 图表示了从气体放电管发出的谱线(在极高的分辨率下)的共同形状。

在一定条件下从类似的气体放电管发出的同样谱线可能要代之以 *B* 图所示的形状。

6. (a)由图 37*A* 中所提供的实验数据计算方程(37b)里的常数 C.

(b) 在 X 射线辐射的研究中人们发现为了使(频率为 ω 的)特征谱线之一出现，碰撞电子的能量 E 必须比 $\hbar\omega$ 略高一点. 对于图 37*A* 中所指的 $K\alpha$ 线，出现的条件约是 $E>\frac{4}{3}\hbar\omega$. 为什么此线没有在 E 刚大于 $\hbar\omega$ 时就显现?

7. 读者学习了玻尔关于原子的行星模型，有可能会形成有害的思维印象，作者不能对此承担任何责任，但作者也不希望走得太远以至完全禁止读者去考虑这个模型. 玻尔假定了氢原子里电子在一个圆形轨道上运动，使电子的角动量是 $\hbar$ 的正整数倍. 这个模型在很高的精确度下给出了所有能极的正确位置，这一点是一个值得注意的巧合. 由于这个模型有着相当大的历史价值，读者可能愿意按照玻尔的办法，画出图 1*B* 的谱项图并验明图 1*B* 中所出现的谱线. (照片上所注的波长是: 4861.3 埃, 4340.5 埃, 4101.7 埃, 3970.1 埃, 3889.1 埃, 及 3835.4 埃.)

8. 放射性核 $_{84}Po^{212}$ (以前曾称为 ThC′) 发射几种不同能量的 α 粒子. 在这种情况下的解释并不与本章的图 40*A* 里所提出的相同. 试找出可能的解释. 画出谱项图以表明你的观点和你所得到的知识. 正确地标明对应于所涉及的不同的原子核的状态.

9. 图 38*A* 是 F. Ajzenberg 及 T. Lauritsen 的一篇论文中一幅图的简化，该文请见 *Reviews of Modern Physics*, **27** (1955), p.107, Fig.

15. 试研究原图. 注意在标记为 $Li^7+\alpha$ 的谱线上可以看到一条有若干极大值的曲线. 这些值与核 B^{11} 的某些能级重合. 这条曲线表示了若干实际测量的结果. 试详尽解释曲线的意义，并讨论作为其根据的测量.

在原图的右方，我们还可看到标明为 $B^{11}+p-p'$ 的水平线，在这之上有一根标记上 15.6 的短水平线，它与 B^{11} 的某些能级用带箭头的线连了起来. 图上的这个特色也与某些测量结果有关. 讨论这些测量，解释箭头代表了什么.

10. 考虑这样一个实验：原子束平行于一个刻有狭缝的屏幕而运动. 缝垂直于原子束的方向. 为简单计我们假定原子束中的原子都有相同速度 v. 有些原子在其飞过狭缝前在某一点已达到受激态. 设 x 是缝和原子受激的点之间的距离. 原子可以通过辐射一个频率为 ω 的光子而从受激态衰变到基态. 设 τ 是受激态的平均寿命. 我们研究一下穿过缝所射出的光.

(a) 穿过缝而射出的光的强度与距离 x 的关系如何？并论证你的答案.

(b) 假设使穿缝射出的光射在一个光电管上，并假设我们确定了光电管停止记录的推迟势. 你预料：推迟势与距离 x 的关系将如何？试叙述并说明之. 你最终得到的答案是否正确是无关紧要的：要点在于你思考了这个问题和在你现有知识的基础上建立一个确切的预言.

11.[1] 研究图 50A 所示的振源所发射的电四极辐射的角分布（按强度），并把这样的角分布与对于单个电偶极我们应该观察到的角分布相比较，这是一个饶有趣味的事. 强度正比于电场的平方. 试证，对电偶极而言，辐射强度作为观察方向的函数，由下式表出

$$I_{E1}(\theta)=A\sin^2(\theta)$$

而对图 50A 所示的电四偶极而言，由下式给出

$$I_{E2}(\theta)=B\sin^2(2\theta)$$

这里 A 与 B 是常数. 强度与方位角无关. 这个例子表明可以通过特征强度图样而区分出不同类型的多极辐射.

---

1) 这个问题与第 50 节有关.

第四章　光　　子

一、光子的粒子性

1　在这一章和下一章里我们将探讨一些根本性的实体(例如光子，电子，质子，中子以及自然界中发现的其他基本粒子)的粒子性和波动性．我们将考察某些基本的实验事实，并试图对所观察的事物得出初步一致的图象．许多例子表明，某一实验的结果会使人想出新的实验：遇到这种情况时，我们将试着作出预测，然后研究实际上观察到的东西．我们的探讨是一种概念上的实验，但我们应当注意不要使我们自己过分拘泥于任何一个特殊的模型，我们来看一看实际情况的结果如何．

2　我们从研究光子开始，可能是适当的．光子是电磁场的"量子"：我们知道频率为ω的近乎单色的辐射以带有能量$E=\hbar\omega$的一个个波包的形式起作用．对此最直接的证据来自光电效应的研究，但正如我们下面将要看到的那样，也有另外的一些观察结果导致同样的结论．总而言之，这些观察表明关系式$E=\hbar\omega$在非常宽广的频率范围内必定成立．我们作一个(大胆的)外推，波包能量和频率之间的这一关系是完全普遍的，对于所有光子都成立．

3　我们提出下面的问题：假设有在某一方向以光速c传播的、频率为ω的电磁辐射波包．这一波包是否也带有动量呢？如果有的话，动量的数值是多少？如果波包——我们称为光子——具有某种粒子性，我们可以期望它确实具有动量，我们

就可以考虑能直接测量它的动量的实验.

在这一套丛书的第三卷中[1]，我们学过对于在十分确定的方向上传播的电磁波由关系式$p=E/c$将能量E和动量p联系起来，其中动量就是在传播方向上. 这是经典电磁理论所预言的. 我们可以合理地期望同样的关系式对电磁量子也成立.

4 从不同的观点来推导能量和动量之间的关系是有教益的. 因此让我们假装现在还不知道$p=E/c$, 但却相信关系式$E=\hbar\omega$是普遍有效的. 这特别是指这一关系式对每一惯性系都成立. 狭义相对论的原理说，假如我们可以找到对一个惯性系中所有光子成立的能量、动量、频率和传播方向之间的普遍关系式，那末这同样的关系式在各个惯性系中必定都成立. 因此，相对论不变性的要求对上述物理量之间可能的关系式引进了一个约束条件，我们论证的思想是应用这一约束条件寻求光子动量$\mathbf{p}$的表示式.

设光子在一个惯性系中沿正x轴的方向传播. 我们把光子当作能量为$E=\hbar\omega$, 而动量$\mathbf{p}$未知的粒子. 由于对称性的原因$\mathbf{p}$必定沿x轴的方向. 现在设想，相对于"不带撇的惯性系"以均匀的速度v沿x轴运动的另一惯性系——"带撇的惯性系"——中观察这同一情况. 在带撇的惯性系中，观察者看到频率为ω', 带有能量$E'=\hbar\omega'$以及动量$\mathbf{p}'$的光子. 因为$c>v$, 在带撇的惯性系中光子沿着正x轴的方向运动. 而且，我们在对称性的基础上断言，在两个惯性系中动量必定都指向光子运动方向. 所以我们可以略去动量的矢量记号，把它的x和x'分量简单地写成p和p', 其他的分量是零.

5 我们回想一下这套丛书第一卷中关于洛伦兹变换的两个

---

1) Berkeley Physics Course, Vol. III. *Waves*, Chap. 7.

结果[1]. 其中第一个是纵向多普勒频移的公式，它按照下式把频率 ω 和 ω' 联系起来:

$$\omega'=\omega\sqrt{\frac{c-v}{c+v}} \tag{5a}$$

第二个是粒子能量和动量的相对论变换定律. 根据这一定律能量 E' 由下式给出:

$$E'=\frac{E-vp}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \tag{5b}$$

如果现在应用我们的假设

$$E=\hbar\omega,\ E'=\hbar\omega' \tag{5c}$$

从(5b)消去 E 和 E'，然后应用(5a)，从所得出的方程中消去 ω'，我们得到:

$$\hbar\omega\sqrt{\frac{c-v}{c+v}}=\frac{\hbar\omega-vp}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$$

从这个方程可以直接解出 p，我们得到:

$$p=\frac{\hbar\omega}{c} \tag{5d}$$

或

$$p=\frac{E}{c} \tag{5e}$$

这些关系式当然在所有惯性系中都成立，因为"不带撇的惯性系"一点也没有什么特别的地方. 具体讲，它们应对"带撇的惯性系"也成立. 正如我们说过的，也可以在经典电磁理论中导出关系式(5e). 关系式(5d)肯定是量子力学的: 它说明频率 ω 的一个光量子总是带有动量 $\hbar\omega/c$. 当然，这一关系式直接从(5e)和(5c)得出，反过来(5c)可从(5d)和(5e)得出.

6 光子的静质量 m_{ph} 是零. 在第一卷中我们导出了静质量，

---

1) Berkeley Physics Course, Vol. I, *Mechanics*. 在第十一章中导出了多普勒频移的公式，在第十二章中导出了能量和动量变换定律.

能量和动量之间的普遍关系，把这个关系应用到光子这一特殊情况中即为：

$$(m_{ph}c^2)^2 = E^2 - (cp)^2 \tag{6a}$$

考虑到(5e)，这个方程的右边为零，从而得到 $m_{ph}=0$.

乍一看来，这一结果也许显得有点特别：因为光子具有某种粒子性，在它的静止参考系中观察时应该具有质量．然而，*不存在光子在其中静止的惯性系*，在每一个惯性系中电磁辐射都以速度 c 传播．因而静止的光子是一个没有意义的概念．

人们很可能会争论，认为不应当将永远不会静止的客体叫做“粒子”．然而，讨论“无质量粒子”已经成为既定的习惯，光子和中微子就是“无质量粒子”的例子，我们应当遵从这一习惯做法．毕竟怎样对“粒子”一词下定义纯粹是爱好问题．显然对光子、中微子和有质量的粒子同样看待是方便的．在另一方面，应该十分着重地强调指出，光子并不是弹子球，它只有某些性质和弹子球相同．

7 下面我们考虑一些想象的实验，我们想在这些实验中看一看光子的粒子图景和从经典电磁理论得到的某些结论是否一致．这样我们可以进一步使我们自己熟悉电磁辐射的波包具有粒子性这一想法．

这里需要一点解释．当我们在这里谈论“粒子性”时，我们指的是在经典物理学范围内假定粒子所具有的性质．实际上“粒子”一词当然是现今用作象光子，电子，质子，中子这样一些客体的共同名字．严格地说，“粒子性”因而就是这些客体共有的全部特性，特别是，它可以表现得象波动，这一点正是实在物理粒子的一种性质．不过，在我们讨论的现阶段，我们正在试图发现实在粒子的性质是什么，这一研究的一个方面是想看一看实在粒子在多大程度表现得有如想象中的“经典

粒子”.

8 考虑一个稳定光源,发射频率为ω的光子. 我们让这光线垂直地入射到一完善的反射镜, 此反射镜在光源的静止参考系中是静止的.

经典电磁理论预言,反射光的频率将仍是ω, 并且射向反射镜的能量通量和离开反射镜的能量通量是相同的.

而且,经典电磁理论预言,入射的辐射将对反射镜施以压强, 即辐射压强. 如果我们假设整个反射镜上辐射强度是均匀的,压强由下式给出:

$$P=W \tag{8a}$$

其中W是紧靠反射表面附近辐射场的能量密度.

现在假设Φ是入射辐射通量,即Φ是单位时间内通过垂直于入射方向的单位面积, 流向反射镜的能量. 如果我们同样地令Φ'表示反射辐射通量,必然$\Phi=\Phi'$. 在单位时间内辐射通过距离c,那末能量密度必然由下式给出:

$$W=\frac{\Phi}{c}+\frac{\Phi'}{c}=\frac{2\Phi}{c} \tag{8b}$$

其中第一项给出入射辐射的能量密度. 我们把(8a)和(8b)结

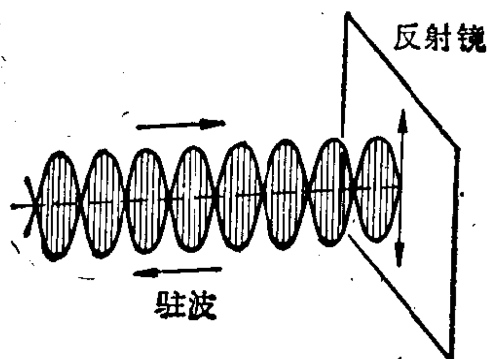


图 8A 按照波动图象,光从镜子(有完全导电的表面)反射. 在反射镜前面建立起驻波, 并且在表面中感应出电流. 波通过波的磁场和感应电流的相互作用施力于反射镜上. 对于垂直入射,辐射压强P由$P=W$给出,其中W是反射镜前的能量密度.

合起来，于是就得到联系辐射压强和通量的关系式：

$$P=\frac{2\Phi}{c} \tag{8c}$$

9 让我们从光子图象的观点来看看这个情形．在这一图象中，向着反射镜的通量为单位时间内有 N 个光子通过单位面积．每一个光子携带能量 $E=\hbar\omega$ 和动量 $p=\hbar\omega/c$．在和镜子碰撞之后，每一个光子的动量反转(把反射镜当作无限重，这是因为它保持不动)，因此每一个光子把数值为 $2p$ 的动量传送给反射镜．在这种图象中辐射压强起因于光子对反射镜的轰击．

辐射压强 P 等于单位时间内传送给反射镜单位面积上动量的数值，于是我们有：

$$P=2Np=\frac{2N\hbar\omega}{c} \tag{9a}$$

另一方面，能量通量简单地由下式给出：

$$\Phi=N\hbar\omega \tag{9b}$$

(因为每一光子以光速传播)能量密度由下式给出：

$$W=\frac{2N\hbar\omega}{c} \tag{9c}$$

如果我们把公式(9a)—(9c)结合起来，我们重新得到关

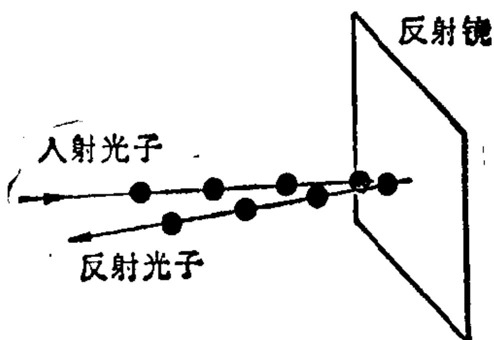


图 9A 按照粒子图象，光从镜子上的反射．当光子和反射镜碰撞时出现辐射压强．(在垂直入射的情况下)光子的动量倒转．辐射压强和能量密度之间的关系和在波动理论中相同．(参见图 8A)

系式 (8a)—(8c)，这表明在所考虑的情况中光子图象和波动图象是一致的。

10 接下来我们考虑下述情况：光源静止在实验室中．它发射频率为ω的光子，这些光子垂直入射到以很小的速度v离开光源运动着的完善的反射镜上．我们假定反射镜的质量M非常大．(我们令v很小并且M很大，从而可以非相对论性地讨论问题．)

从光子图象的观点来看，我们考虑一下当一个光子和反射镜碰撞时发生些什么．在碰撞之前，光子具有能量E和动量$p=E/c$，在碰撞之后，光子具有能量E'和动量$p'=E'/c$．能量和动量守恒条件是：

$$p+Mv=-p'+Mv' \text{(动量)} \tag{10a}$$

$$E+\frac{1}{2}Mv^2=E'+\frac{1}{2}Mv'^2 \text{(能量)} \tag{10b}$$

这里我们已经考虑到反射镜在碰撞以后会有(稍许)不同的速度v'这一事实，不过速度的方向保持不变．反射后的光子向反方向进行，因此在(10a)中有$-p'$一项．

令反射后光子的频率是$\omega'=E'/\hbar$．我们可以把方程(10a)和(10b)重写成下面的形式：

$$\frac{\hbar\omega}{c}+Mv=-\frac{\hbar\omega'}{c}+Mv' \text{(动量)} \tag{10c}$$

$$\hbar\omega+\frac{1}{2}Mv^2=\hbar\omega'+\frac{1}{2}Mv'^2 \text{(能量)} \tag{10d}$$

从这两个方程式中消去v'，我们得到：

$$\hbar(\omega-\omega')=\left(\frac{v}{c}\right)\hbar(\omega+\omega')+\frac{1}{2M}\left(\frac{\hbar}{c}\right)^2(\omega+\omega')^2 \tag{10e}$$

我们考虑无限重反射镜的极限情况，在这种情况中，去掉了(10e)右边的第二项．于是我们得到：

$$\omega'=\omega\left(1-\frac{v}{c}\right)\Big/\left(1+\frac{v}{c}\right) \qquad (10f)$$

因为我们假定 v/c 很小，我们可以把(10f)展开成 v/c 的级数并且只保留线性项，我们得到反射后频率的近似表示式：

$$\omega'\cong\omega\left(1-\frac{2v}{c}\right) \qquad (10g)$$

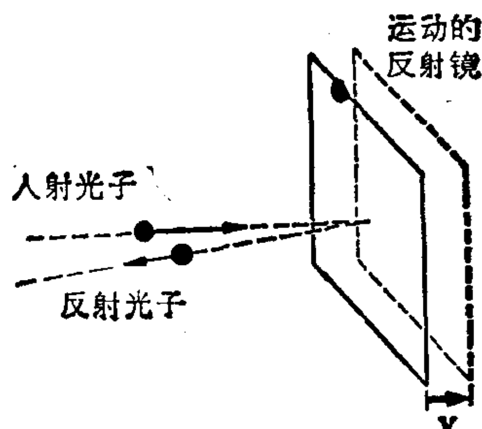


图 10A 支配弹性碰撞的定律预言：假如反射镜离开光源运动，反射后光子的能量 E' 小于入射光子的能量。从关系式 $E=\hbar\omega$ 和 $E'=\hbar\omega'$ 我们可以求出频率的移动。假设反射镜无限重，我们获得的结果与从波动图象得到的相同。(参见图 12A)

11 我们也考虑一下反射的辐射强度。为此目的，我们设想观察者位于固定在实验室并平行于镜子的平面处。设有单位时间内通过这个平面的单位面积有 N 个光子的通量流向镜子，设返回的通量为单位时间内通过单位面积 N' 个光子。我们假设光源的横向宽度很大，所有的光子严格地垂直于这个平面传播。我们断定：

$$N'=N\left(1-\frac{2v}{c}\right) \qquad (11a)$$

为了看出这一点，我们作下面的论证：令通过观察平面单位面积的入射光子在时间上是等间隔的。两个相继通过的光子间的时间间隔是 $1/N$。令给定的光子在 t 时刻返回：可

是，下一个光子必定要走过更大的距离，因为反射镜在那一段时间内运动了一个距离 v/N，这后一个光子将在时刻 $t+1/N+2(v/c)/N$ 返回．因此返回光子的时间间隔就是 $1/N'=(1/N)(1+2v/c)$，如 v/c 很小，这就导致近似表示式(11a)．

现在光子束的强度，即单位面积、单位时间的能量通量对入射束由 $\Phi=\hbar\omega N$ 给出，对反射束为 $\Phi'=\hbar\omega' N'$．于是我们得出结论，这两个强度由下面的(近似)公式联系起来．

$$\Phi'=\Phi\left(1-\frac{4v}{c}\right) \tag{11b}$$

我们已经得到两个有趣的结果：反射后光子的频率按照(10g)改变了，反射射束的强度 Φ' 与入射射束的强度 Φ 由(11a)联系起来．我们是不是能够从经典电磁理论得到同样的结果呢？[1)]

12 在波动理论的基础上，我们论证如下：对于静止在实验室中的观察者，反射光好象来自“镜子后面的光源”，即来自光源在镜中的象．这个镜中的象对于反射镜以速度 v 运动，而

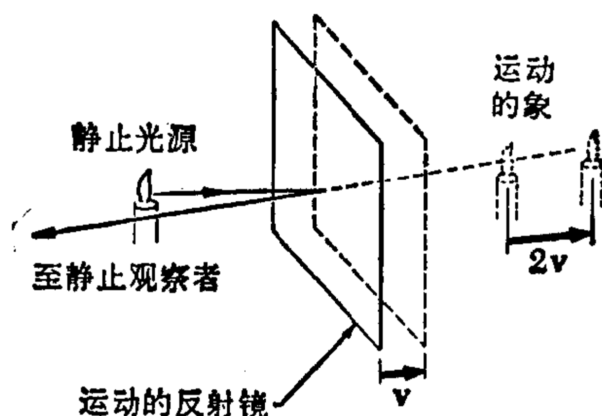


图 12A 从静止光源发出的光在运动的镜子上反射后看上去好像是从运动着的光源发出：像以两倍于反射镜的速度运动．因此，波动理论预言，反射后的光线有多普勒频移．(为简单起见，想像图上画的是一支单色腊烛．)

1）当然我们能够．这个工作并非真正必要的，但它是有教益的．讨论这一类问题的另一种方法是变换到镜子静止的参考系，然后再变换回去．

反射镜本身以速度 v 相对于静止的观察者运动. 因为 v 很小,我们可以应用非相对论性的速度相加定律,并且我们可以断言: 光源的象看上去好象以速度 $2v$ 离开观察者. 因此频率必定有多普勒移动,反射后的频率 ω' (在非相对论性近似中)就由 $\omega'=\omega(1-2v/c)$ 给出,这个式子和(10g)一致.

13 下面我们考虑强度. 在这一套丛书的第二卷里[1], 我们讨论了按照洛伦兹变换的电磁场变换定律. 令 E 和 B 是在光源的静止参考系中波的电场和磁场的振幅. 场 E 和 B 垂直于传播方向. 我们用 E' 和 B' 表示光源在其中以速度 v' 离开观察者运动的参考系中相应的振幅. 对于平面偏振波, 我们实际上有 $E=B$ 以及 $E'=B'$. 于是变换定律表明, 带撇的和不带撇的振幅由下式联系起来:

$$E'=E\sqrt{\frac{c-v'}{c+v}} \tag{13a}$$

在这个情况中,强度(即能量通量)正比于振幅的平方,从而我们有

$$\Phi'=\Phi\left(\frac{c-v'}{c+v}\right) \tag{13b}$$

其中 Φ 是光源静止参考系中的强度,Φ' 是光源在其中以速度 v' 离开观察者运动的参考系中的强度. 假如我们现在写下 $v'=2v$, 并把(13b)的右边展开为 v/c 的级数, 假设这个数量很小,作线性近似时重新得到表示式(11b).

我们看到从粒子图象得出的结论和从波动图象(即从经典电磁理论)导出的结果相同.

14 最后我们指出, 可以解释通过"观察平面"流向反射镜的净能流: 因为反射辐射比入射辐射有较低的强度, 所以有异

---

1) Berkeley Physics Course, Vol. II, *Electricity and Magnetism,* Chap. 6 and 7.

于零的净能流．能量到哪里去了呢？因为反射镜在运动着，辐射压强将对反射镜作功，这个功占净能流的一半．另一半成为在反射镜和观察平面间的空间中建立电磁场的条件：因为这个空间的体积稳定地增加但是能量密度保持常数，必须以不变的速率补充能量．在光子图象中我们宁可说在反射镜和观察平面之间渡越的光子数目由于距离的增加而均匀地增加．读者应仔细地作出上面指出的十分简单的计算，使自己确信能量流是平衡的．

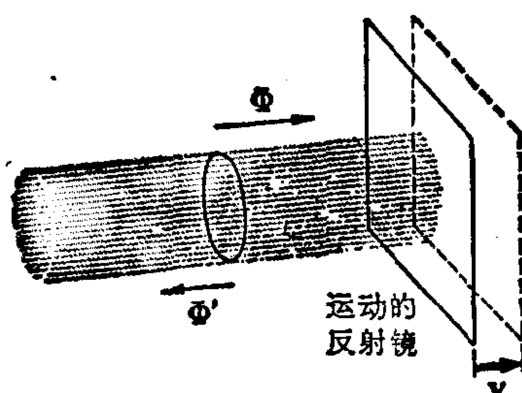


图 14.4　从离开光源和观察者运动的反射镜反射的光线强度，即单位面积单位时间的能量通量，小于入射强度．辐射压强对反射镜作功，并且充满辐射能的体积增加．

粒子图象和波动图象两者都正确地解释了能量平衡．

15　我们下面来讨论一个例子，这个例子告诉我们必须小心．频率为 ω_0 的完全单色光束（可以用激光作光源得到）垂直入射到沿着射束方向以频率 ω_m 振动的反射镜上．我们想求出反射光的频率．

在简单粒子图象的基础上，人们可以作出如下的推论：假如光子正巧在镜子以速度 v 离开光源的时刻击中镜子，那末根据我们早先的讨论，反射光子的频率将是 $\omega=\omega_0(1-2v/c)$．光子随机地到达反射镜，因此在反射光中，我们遇到的将是分布在 $\omega_0(1-2v/c)$ 到 $\omega_0(1+2v_0/c)$ 范围内的连续频率．原来

的近单色光的频率分布变宽了．在上面的公式里 v_0 是反射镜的最大速度．

16 在经典波动图象的基础上，我们得到一个不同的结论．反射光是两个周期过程的产物，因此我们期望在反射光束中观察到的频率是由两个频率 ω_0 和 ω_m 形成的组合频率．在经典电磁理论的基础上对这一问题的周密研究表明，在反射光线中所期望的频率形成一个不连续的集合，该集合的形式为 $\omega=\omega_0+n\omega_m$，其中 n 是任意整数（正的，负的或零）．对于反射镜的速度比 c 小得多的情况（这是物理上可实现的情况），与这些不同频率相联系的强度将在 n 的数值小时有最大值．

作者希望上面的结果使读者觉得是合理的．我们将不在这里研究普遍情况，但我们可以通过考虑一个特殊情况来增强对我们的表述的可信性．假设 ω_0 事实上是 ω_m 的整数倍．在这个情况中，导致反射光束的整个过程是严格的周期性的，周期为 $2\pi/\omega_m$．经过时间 $2\pi/\omega_m$ 后一切都自行重复．显然这意味着在反射光束中观察到的电场也必定是时间的周期函数，其周期为 $2\pi/\omega_m$．在反射光束中观察到的频率因而必定是频率 ω_m 的整数倍．这和频率为 $\omega=\omega_0+n\omega_m$ 的形式这一表述是一致的．与各种频率相联系的强度中，在频率 ω_0 邻近的那些频率的强度最大，这确实是似乎合理的．（为了看出这一点，考虑一下当振幅趋向于零的极限情况下必须发生些什么．）总之，显然我们不能期望观察到像简单粒子图象所预料的频率的连续谱．

经典波动理论所预言的频率与实际上被观察到的是一致的．曾经用本身振动的光源做过这一类的实验．这一类实验中的一个是鲁培（Ruby）和波立夫（Bolef）所做的，其中的“光源”是放在振荡石英晶体表面上发射 γ 射线的 Fe^{57} 原子核．如图 16A 所示，在所预言的频率中有好几个在这个实验中都

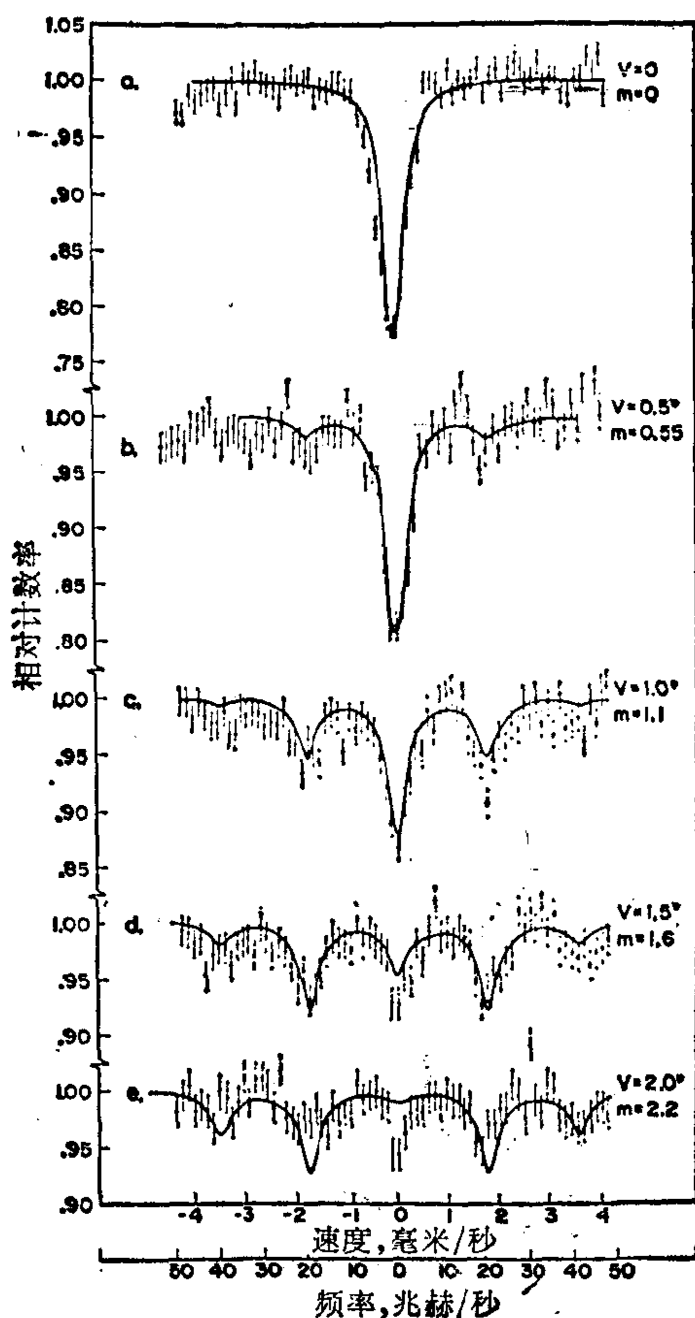


图 16A　表示从受激 Fe^{57} 原子核的振动源发射的 γ 射线频率谱的曲线图. 不同的曲线对应于不同的振荡幅度，振动频率都是 20 兆赫/秒. 曲线的凹处表示发射的光谱线. 正如我们看到的，在中心频率和在离中心频率为 ±20 兆赫/秒，以及 ±40 兆赫/秒的位置得到了谱线.

曲线实际上表示 γ 射线通过匀速运动着的，含有处于基态的 Fe^{57} 原子核的吸收器的透射率，对吸收器的速度作图. 光源静止时我们在速度为零处得到强的吸收. 光源振荡时，对多普勒频移发射线和 Fe^{57} 的共振线相符时的那些速度得到强的吸收.

此图取自 S. L. Ruby and D. I. Bolef, "Acoustically modulated γ rays from Fe^{57}" *Physical Review Letters* **5**, 5 (1960).

被观察到了.

17 如果我们注意到粒子理论在这种情况下是过于简单，就能不再认为波动理论的预测和粒子理论的预测之间表现出尖锐的对立. 我们曾假设反射是突然发生的，就像光子是点粒子，没有任何空间的广度. 这一假设是没有道理的：波列具有有限的长度，其长度反比于确定频率的精密度. 在第三章第23节中讨论的频率的不准确度$\Delta\omega_0$和发射过程的持续时间τ之间的关系的基础上，我们可以很容易地估计波列的长度. 我们曾断定：

$$\tau \cong \frac{1}{\Delta\omega_0} \tag{17a}$$

于是波列(在空间中的)长度L是：

$$L = c\tau \cong \frac{c}{\Delta\omega_0} \tag{17b}$$

并且我们看到，假如频率是十分确定的，那末把光子当作点粒子肯定是不正确的.

我们也可以像下面这样来叙述这个问题：假设$\omega_m \gg \Delta\omega_0$，

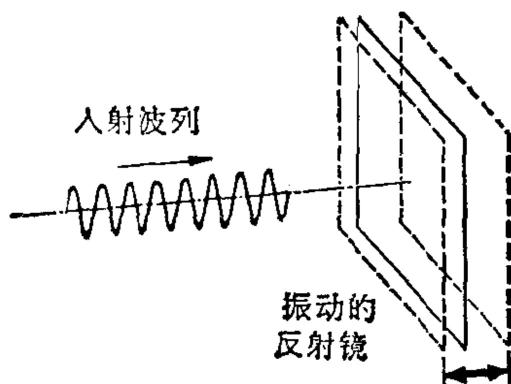


图17A 把光子和振动着的反射镜的相互作用描写为光子和反射镜在某个确定时刻碰撞是错误的：光子并不是点粒子. 在这个情况下波动图象更加合适. 波列长度，因而碰撞过程的持续时间反比于确定光子频率的精密度. 严格单色的光子是无限长的. 假定反射镜振动频率是ω_m，入射光的频率是ω_0，那末反射光中得到的频率就是$(\omega_0+n\omega_n)$这种形式，其中n是任意整数.

光子"消磨"在振动的镜子上的时间就长于镜子振动的周期，显然我们不能想像光子是在镜子具有确定的速度 v 的一瞬间从镜子反射．反射是在一个时间间隔内发生的，在这段时间间隔内镜子有足够的时间完成几次完全的振荡．

二、康普顿效应，韧致辐射；粒子对的产生和湮没

18 我们现在讨论关于光子的能量和动量的实验，即 A. H. 康普顿的实验，在这个实验中观察到光子和电子的碰撞．图 18A 示意地表示这种碰撞．

频率 ω 的光子和质量为 m 原来是静止的电子碰撞，碰撞以后在与入射线成 θ 角的方向上射出频率为 ω' 的光子．电子在碰撞中受到反冲，它以能量 E_e 在与入射线成角度 φ 的方向上射出．

只当整个过程在一个平面上发生时能量和动量才能都守恒，在这个平面上（譬如说就是图面）两个守恒定律为：

$$\hbar\omega+mc^2-\hbar\omega'=E_e(\text{能量}) \tag{18a}$$

$$\mathbf{p}-\mathbf{p}'=\mathbf{p}_e(\text{动量}) \tag{18b}$$

现在把第一个方程除以 c 再平方，然后减去第二个方程的平方，我们得到：

$$\frac{1}{c^2}(\hbar\omega+mc^2-\hbar\omega')^2-(\mathbf{p}-\mathbf{p}')^2$$

$$=\frac{E_e^2}{c^2}-p_e^2=m^2c^2 \tag{18c}$$

因为

$$p=\frac{\hbar\omega}{c};\quad p'=\frac{\hbar\omega'}{c}$$

以及

$$\mathbf{p}\cdot\mathbf{p}'=pp'\cos\theta \tag{18d}$$

我们可以从(18c)解出 ω'，从而得到

$$\omega' = \frac{\omega}{1 + (\hbar\omega/mc^2)(1 - \cos\theta)} \tag{18e}$$

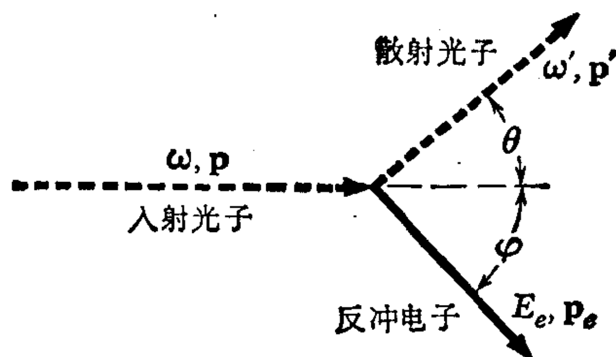


图 18A 康普顿散射的运动学，其中光子和原来静止着的电子碰撞. 能量和动量守恒定律表示散射光子的唯一频率 ω' 和动量 $\mathbf{p}'$ 作为散射角 θ 的函数.

19 如果我们引进波长 $\lambda = 2\pi c/\omega$, $\lambda' = 2\pi c/\omega'$, 我们可以把(18e)写成另一种形式:

$$\lambda' = \lambda + 2\pi(\hbar/mc)(1 - \cos\theta) \tag{19a}$$

量 $2\pi(\hbar/mc) = h/mc$ 称做粒子的*康普顿波长*，在这个情况中，电子的康普顿波长为:

$$h/mc = 2.43 \times 10^{-10}\ \text{厘米} = 2.43 \times 10^{-2}\ \text{埃}.$$

散射辐射的波长比入射辐射的波长要长，或者实际上等于说：散射辐射的频率小于入射频率. 这是必然的，因为有一些能量转移给电子了. 检查一下(18e)我们看到，如果量 $(\hbar\omega/mc^2) \cong (\hbar\omega)/(0.5\,\text{Mev})$ 小，频率变化的比例就非常小：因此必须采用硬 X 射线的能量才能得出相当的效应. 检查一下 (19a) 我们会得出同样的结论：只要康普顿波长比入射波长小得多，波长改变的比例就很小.

20 我们刚才讨论的散射现象是 A. H. 康普顿于 1922 年从实验上观察到的[1]. 据说他是受巴克拉(Barkla)早先的观察

1) A. H. Compton, "The Spectrum of Scattered X-rays," *Physical Review* **22**, 409 (1923). 至于康普顿的理论分析见 "A Quantum Theory of the Scattering of X-ray by Light Elements." *The Physical Review* **21**, 483 (1923).

所启发才导致他的实验的. 巴克拉观察到当硬X射线以很大的角度从固体材料上散射时，散射射线包含两个成分；一个成分具有和入射的辐射同样的性质，但另一成分是不同的，其表现是，插入介质对这一辐射的吸收率是不同的. 在波动图象的基础上，第一个成分的产生是很容易理解的. 入射的电磁波，即入射X射线使束缚在原子中的电子以相同于波的频率ω振动，这些振荡着的电子于是在所有方向上发出频率为ω的电磁辐射. 在这个过程中原子的状态只是暂时地受到扰动. 而并不发出电子. 我们可以想像，会引起这种类型散射的多半是紧密束缚着的电子.

然而，原子中有一些电子受到的束缚是十分松弛的. 结合能量约为10—100电子伏. 可以想像得到，这些电子能在散射过程中被发射出来. 在康普顿的实验中，从装有钼靶的大约在50,000伏电压下工作的X射线管中射出的X射线从石墨上散射到各种各样的角度. 入射辐射，是所谓的钼K辐射，其波长为0.7埃，相当于大约20,000电子伏的能量. 这个能量比碳原子最外层电子的结合能大得多，实际上它比所有电子的结合能都大. 在这种情况下，我们可以认为散射过程和在电子一点也不受束缚的情况下发生是完全一样的. 于是就可以应用第18节的分析. 事实上，康普顿发现散射辐射的波长包含了波长为λ'的第二成分，这个波长按照公式(19a)依赖于散射角度. (见图20A)

在康普顿和他人后来所作的实验中，也探测到了反冲电子，这就可能表明反冲电子和散射光子是相互联系着的，并且在过程中能量和动量都守恒[1].

1) A. H. Compton and A. W. Simon, "Directed Quanta of Scattered X-Rays," *Physical Review* **26**, 289(1925). 也可参看 C. T. R. Wilson, "Investigations on X-Rays and β-Rays by the Cloud Method," *Proceedings of the Royal Society* (London) **104**, 1 (1923).

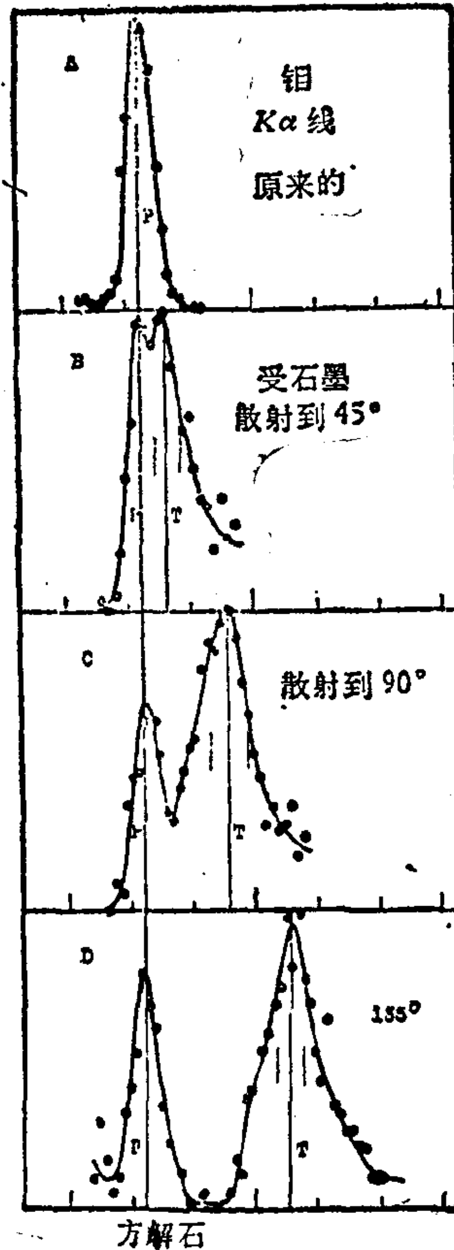


图20*A* 取自康普顿的论文中的曲线图[*Phys. Rev.* **22,** 409 (1923)]，表示三个不同的散射角上散射辐射的光谱. 最上面的图表示波长为0.71埃的入射辐射的谱线. 横坐标正比于波长，纵坐标是强度的量度. 下面三张图中左边的峰值表示散射辐射中和入射辐射波长相同的部分. 右边的峰值表示频率移动了的康普顿散射辐射. 按照康普顿公式，频率移动随散射角的增大而增大.

21 我们现在来评价关于康普顿效应的各种观察结果的意义. 首先，我们要注意经典电磁辐射的波包也会在电子上散射，所以对这种散射现象的解释并不需要量子力学. 然而，散射辐射的频率和散射角之间的特殊关系式(18e)确实与普朗克常数有关，并且在某种意义上给光子图象以有力的支持. 我们应当注意，我们导出公式(18e)时，假定了整个光子受到散射，而不是一个光子的三分之一或者五分之一受到散射：如果只有五分之一的光子被散射那末守恒定律就会给出相当不同的结果. 因此康普顿效应的重要性就在于这个观察结果进一步证实了关系式 $E=\hbar\omega$ 的普适性. 在康普顿实验中光子不能"分裂"，频率为 ω 的光子总是带着能量 $\hbar\omega$ 和动量 $\hbar\omega/c$.

在用光电池做的光电实验中(在可见光或紫外光区域)我们只能在很有限的频率范围内验证关系式 $E=\hbar\omega$. 康普顿效应的研究把这一范围扩展到硬X射线的区域. 当然，如果我们坚定不移地相信狭义相对论(我们确实是如此，就象我们在本章开头已论证的)，我们就会作出这个关系式是完全普遍适用的结论. 不过，在新的频率范围内直接检验这一关系式的任何实验都是值得做的：我们检验了我们一些概念的一贯性，并且还检验了狭义相对论.

今天对关系式 $E=\hbar\omega$ 的普适性已经存在着压倒一切的有力支持. 我们可以说它已成为当代物理学的不可缺少的组成部分. 为进一步研究这一关系式的含义，我们来考虑另外两个现象：在X射线管中X射线的发射以及正负电子对的湮没.

22 在图22A中简略描绘的X射线管中，从炽热的阴极(用灯丝加热)发射的电子在灯丝和正极之间的电势降 V_0 中被加速. 当电子打在正极(靶)时，它们被迫停止. 在经典电磁理论的基础上我们可以预期，这一减速将伴有电磁辐射的发射.

这种辐射的存在首先被 W. C. 伦琴在 1895 年探测到[1]. 发出的射线被称做 X 射线或伦琴射线.

关于这种射线的真实性质起初是有些争论的，但是在本世纪初已日益清楚，X 射线实际上是电磁辐射. 通过 1904 年有独创性的双散射实验，C. G. 巴克拉 (Barkla) 能证明 X 射线是横向偏振的. 最确定的证据是在 1912 年得到的. 当时 W. 弗里德里希 (Friedrich) 和 P. 尼宾 (Knipping) 根据 M. 冯劳埃(von Laue)的建议，证明了 X 射线在晶体上受到散射，正如在第一章中已经提到过的[2].

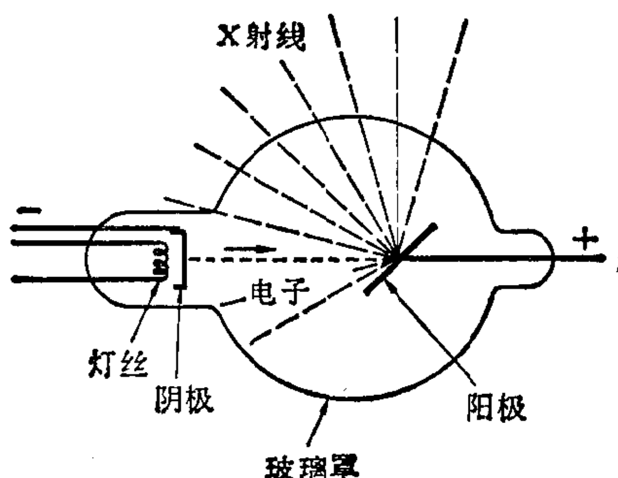


图 22A 说明 X 射线管作用的十分简略的图. 从被灯丝加热的阴极发射的电子向阳极加速. 当电子打到阳极时发射 X 射线. 辐射的一部分是阳极材料的特征辐射，一部分是韧致辐射.

23 使 X 射线光谱研究成为可能的一些技术发展了以后，就

---

1) W. C. Röntgen, "On a New Kind of Rays," *Science* **3** 227 (1896); "*A New Form of Radiation*" *Science* **3**, 726(1896).

2) C. G. Barkla, "Polarized Röntgen Radiation," *Phil. Trans. Roy. Soc.* **204**, 467 (1905). C. G. Barkla, "Polarization in Secondary Röntgen Radiation," *Proc. Roy. Soc.* (London). **77**, 247 (1906). (后面一篇论文报导了双散射实验.)

W. Friedrich, P. Knipping and M. von Laue, *Annalen der Physik* **41**, 971 (1913).

可以在多种不同的实验条件下测量发射射线的强度，作为波长的函数．在同样的电压 V_0 下，对于三种不同的物质，强度对波长的典型曲线表示在图 23A 中．我们看到迭加在连续的本底上有几个尖锐的“峰”就是强度的极大值．已经发现这些峰值的位置是靶的材料的特性．另一方面，各种材料在同样的加速电势 V_0 下的连续本底都有相同的形状．对各种实

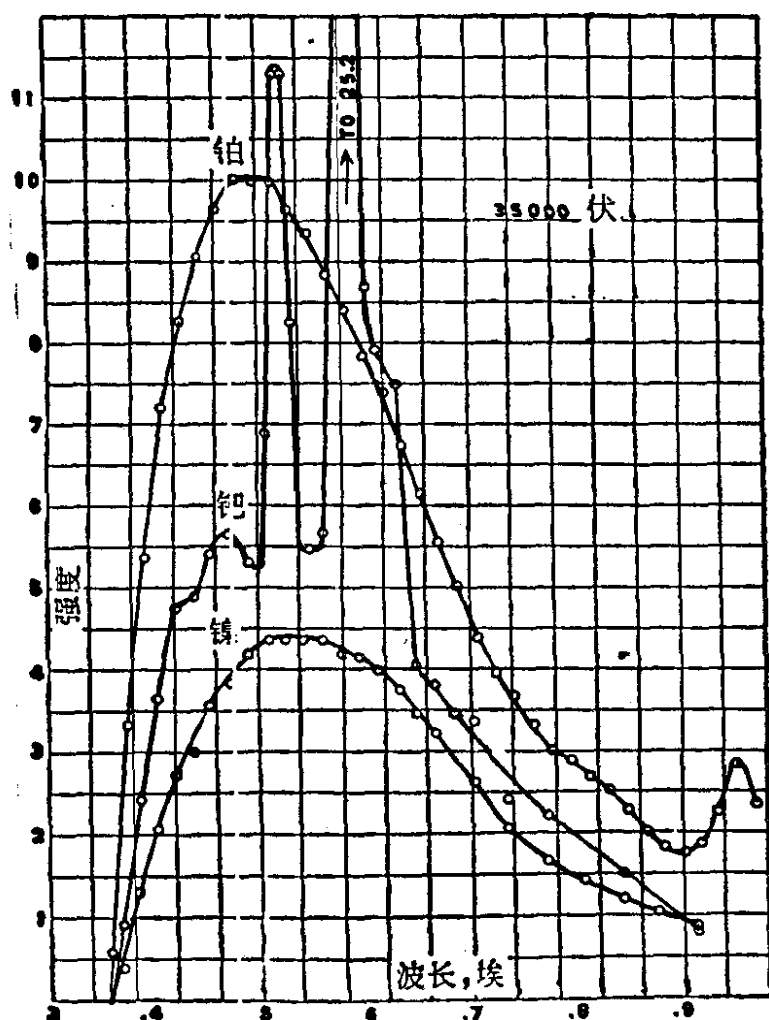


图 23A　表示发射 X 射线的强度对波长的曲线图，用了三种不同的材料，但有同样的加速电势 $V_0=3500$ 伏．尖锐的峰相当于各该材料的特征辐射．连续本底是由于韧致辐射．

图取自 C. T. Ulrey, “An Experimental Investigation of the Energy in the Continuous X-Rays Spectra of Certain Elements,” *Physical Review* **11,** 401 (1918).

验材料的研究导致了下面的结论，有两种不同的机理对发射X射线起作用．尖锐的峰类似于受到碰撞的原子所发射的光线：这种辐射称为该材料的特征辐射，它是受到高能的入射电子碰撞而被激发的原子所发射的．另一方面，连续本底是在靶中被减速的电子所发射的．它被称做轫致辐射，其意义是使电子停止而引起的辐射．

通过实验还进一步发现对于一定的加速电势 V_0，有一个确定的最小波长 $\lambda_{\min}$，波长比它更短的辐射都不出现，这最小波长 $\lambda_{\min}$ 决定于电势 V_0 而与制造靶的材料无关．我们可以从图 23*A* 看到．

24 我们来说明一下，怎样从理论上来理解上述情况．

首先我们要注意，按照经典电磁理论，匀速运动的电子不能辐射电磁波．在光子理论的基础上我们可以得出同样的结论，论点如下：考虑在任何可能的发射之前电子静止的参考系，在这个参考系中总能量是 mc^2．如果能发射一个或更多的光子，这些光子就会带走能量，发射后的最终总能量就会大于 mc^2，这就违背了能量守恒．因此不应发生这种发射．

不过，当电子穿过靶中很强的原子核电场时，情况就不同了．电子就有可能把一些能量和动量传递给原子核，能量和动量方程式可以平衡．我们来看一看这个结果如何．质量为 M 的原子核原来静止着（在实验室参考系中），质量为 m、初始动量为 $\mathbf{p}_i$ 的电子撞击到原子核上．碰撞以后电子具有动量 $\mathbf{p}_f$，原子核具有动量为 $\mathbf{p}_n$．此外，发射了动量 $\mathbf{p}$ 和频率 $\omega = pc/\hbar$ 的光子，守恒方程式写成：

$$\mathbf{p}_i = \mathbf{p}_f + \mathbf{p}_n + \mathbf{p}\text{（动量）} \tag{24a}$$

$$E + Mc^2 = E_f + E_n + \hbar\omega\text{（能量）} \tag{24b}$$

其中 E_i 和 E_f 分别是电子的初始和最终能量，E_n 是原子核的最终能量．

这些方程式合起来给了我们四个守恒方程．不过标志终了状态的有九个变量，即 $\mathbf{p}_f$，$\mathbf{p}_n$ 和 $\mathbf{p}$ 三个矢量的九个分量．对这些矢量的允许范围作详细研究是颇为复杂的，我们将不企图进行这样的研究．可以证明，对于任何给定方向上出射的光子，其能量可以从零到某个极大值．这一极大值实际上发生于电子和原子核两者在碰撞后都有相同的速度，譬如说 $\mathbf{v}$ 之时：如果我们在质心坐标系中考虑这个问题，就会立刻明了它必定如此．在电子和原子核的最终速度确实相等的情况，守恒方程为：

$$\mathbf{p}_i-\mathbf{p}=\frac{(M+m)\mathbf{v}}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \tag{24c}$$

$$E_i+Mc^2-cp=\frac{(M+m)c^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \tag{24d}$$

从第二个方程的平方减去第一个方程乘以 c 后的平方，给出：

$$\hbar\omega=pc=\frac{E_i-mc^2}{1+(E_i-p_ic\cos\theta)/(Mc^2)} \tag{24e}$$

其中 θ 是出射光子和入射电子之间的夹角．于是上面的公式给出在角度 θ 上光子的最大能量．我们注意到，这个式子近似地等于入射电子的动能 $(E-mc^2)$，它又等于 eV_0．(24e) 右边分母上的第二项对 X 射线管来说是非常之小，因为对于质量数为 A 的原子核，常数 $Mc^2\sim940A$ 兆电子伏，它比 E_i 大，E_i 的范围可以从 1 千电子伏到 100 千电子伏．

25 在假定原子核为无限重的极限情况下，我们得到最小波长的表示式：

$$\lambda_{\min}=\frac{2\pi c}{\omega}=\frac{ch}{eV_0} \tag{25a}$$

当然，我们可以直接得出结论：发射光子的能量不可能超过入射电子的动能，对于无限重的原子核，最大能量必定发

生于电子在碰撞中变为完全静止时.

这个最小波长称做**量子极限**. 它的存在是量子现象的一种表现形式: 经典理论预言,将发射出任意短的波长.

已经十分精密地测量了作为 V_0 的函数的量子极限[1], 从这样的测量得到了常数 e/ch(以及 e/h)的精确数值.

26 最后让我们考虑正负电子对的湮没. C. D. 安德森于 1932 年在宇宙射线中观察到正电子 (见图 26*A*). 现在知道

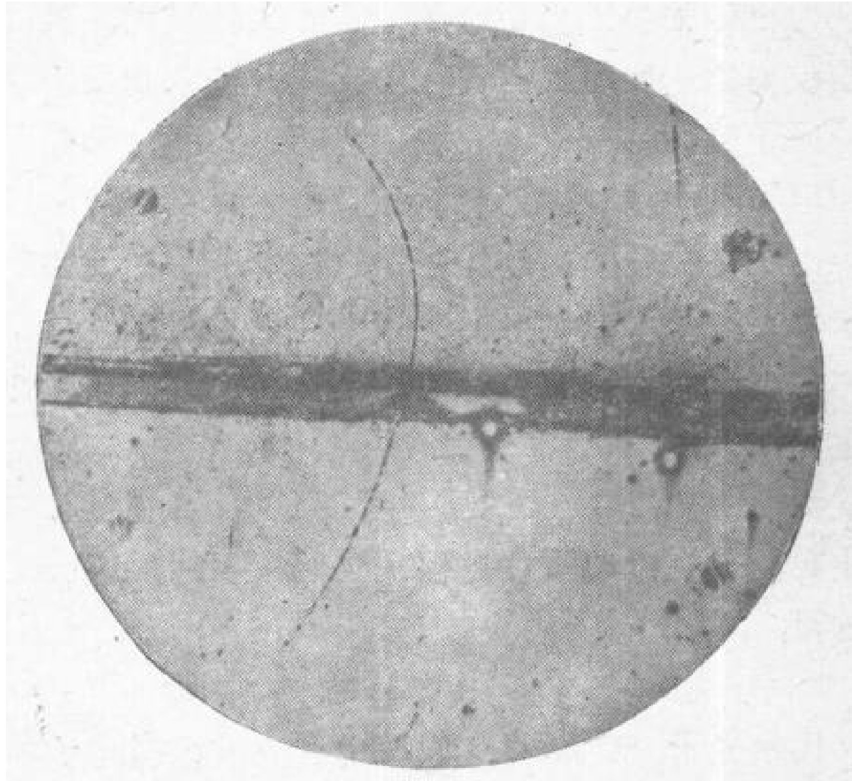


图 26*A* 把安德森发现的正电子介绍给全世界的云室照相图.(取自 C. D. Anderson, "The Positive Electron," *Physical Review* **43**, 491(1933)]能量为 63 兆电子伏的正电子通过水平的铅板(厚 6 毫米), 出射能量为 23 兆电子伏. 由于云室放在垂直于图面的磁场中,因而径迹是弯曲的. 靠近云室边缘图片的质量很差, 因此难以看出靠近边缘径迹很弱的部分. 这些径迹表明正电子确实穿过了云室.

有关这一张图片的一些有趣的问题请参看这一章末的问题 11.

---

1) J. A. Bearden, F. T. Johnson and H. M. Watts, "A New Evaluation of h/e by X-rays," *The Physical Review* **81**, 70 (1951).

正电子在许多不稳定粒子的衰变中产生，例如在放射性磷同位素P^{30}的衰变中．当高能γ射线通过物质时也观察到正电子，正象我们在第一章中所讲过的那样，这一现象的图象是，在原子核的电场中γ射线可以产生正负电子对．这一过程被称做正负电子对的电磁产生．

当一个正电子和一个负电子碰撞或相互作用，这一对粒子可能湮没，这就是说这两个粒子都消失并且它们的能量完全转变为电磁辐射．当正电子撞击一大块物质时就能观察到这种湮没现象．按照我们现在的图象，进入物质的正电子在和物质原子碰撞时首先就失去了它的绝大部分动能（虽然有一些正电子可能在减慢之前就和负电子直接碰撞而湮没）．变慢的正电子在物质中扩散，终于被原子中的电子俘获．在适当的条件下一个正电子可以和一个负电子组成一个类氢“原子”，称做电子偶素．变慢了的正电子和负电子相互作用而终于发生湮没．

就我们所知，正电子的质量等于负电子的质量．

27 让我们现在考虑湮没过程．我们用下列反应公式来表示这一过程：

$$e^{+}+e^{-}=n\gamma$$

其中γ代表光子（γ量子）．假设当反应发生时电子和正电子实际上静止着（在实验室参考系中），还进一步假设反应发生在自由空间，即是远离所有其他粒子．

首先我们注意到，至少要有两个γ光子：$n\geqslant 2$，否则，能量和动量就不守恒．（如果电子和正电子原来是静止的，初始动量为零；如果只发出一个光子，最终的总动量就不会是零．）因此让我们假定发射了两个光子．既然初始动量是零，那末最终（总的）动量也必定是零，因此两个光子的动量大小相等方向相反，这意味着它们的能量相等，因之它们的频率也

相等．我们用ω表示频率，那末能量守恒意味着：

$$2\hbar\omega = 2mc^2 \quad 或 \quad \lambda = \frac{2\pi c}{\omega} = \frac{h}{mc} \tag{27a}$$

由此可见发射光子的波长等于电子的康普顿波长$h/mc = 0.0243$埃；与这个波长相当的电子静能量为$mc^2 = 0.511$兆电子伏[1]．

对于被减速并被物质俘获的正电子，我们可以假定上面的预计是正当的：物质中有其他粒子存在可能会有影响，但这种影响一定很小，因为原子的结合能比电子的静能小得多．

所以我们可以寻找在湮没过程中形成的两个γ光子．它们应当向相反的两个方向发射，并且它们的波长应当是电子的康普顿波长．实验已经证明这些预言的每一细节都正确：确实发生湮没成两个γ光子[2]．此外还发现也发生湮没成三个γ射线光子的情形．

28 有一点我们应当弄清楚．我们论证了正负电子对在空的空间中不能湮没成一个光子，因为这样能量和动量就不守恒．从此得出，单个光子突然变成正负电子对这一逆过程也必定不可能．另一方面，我们曾说过，当很高能量光子穿过大块物质时会产生正负电子对．这一表面的矛盾的解答是，这一过程可能而且确实发生在原子核场中．有一定数量的能量和动量转交给原子核，这样就可能使守恒方程平衡．

我们上面讨论的湮没过程的逆过程是两个光子碰撞会产生电子对的过程．从来没有实际上观察到过这一过程，原因是我们不可能产生足够强的高能光子束来使这一过程发生的

---

1) 注意，有时，$\hbar/mc = 0.00386$埃，也叫做康普顿波长．

2) 例如参看 O. Klemperer, "On the Annihilation Radiation of the Positron," *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, **30**, 347 (1934).

速率能够观察到. 我们坚信只要我们能够产生这样的光子束，我们就能够看到这个现象. 在原子核场中电子对产生的逆过程是在原子核场中正负电子对湮没成一个光子的过程，同时原子核吸收掉守恒方程平衡所必须的能量和动量. 这一过程确实发生了，但在一般情况下产生两个光子的湮没过程的可能性更大因而占优势.

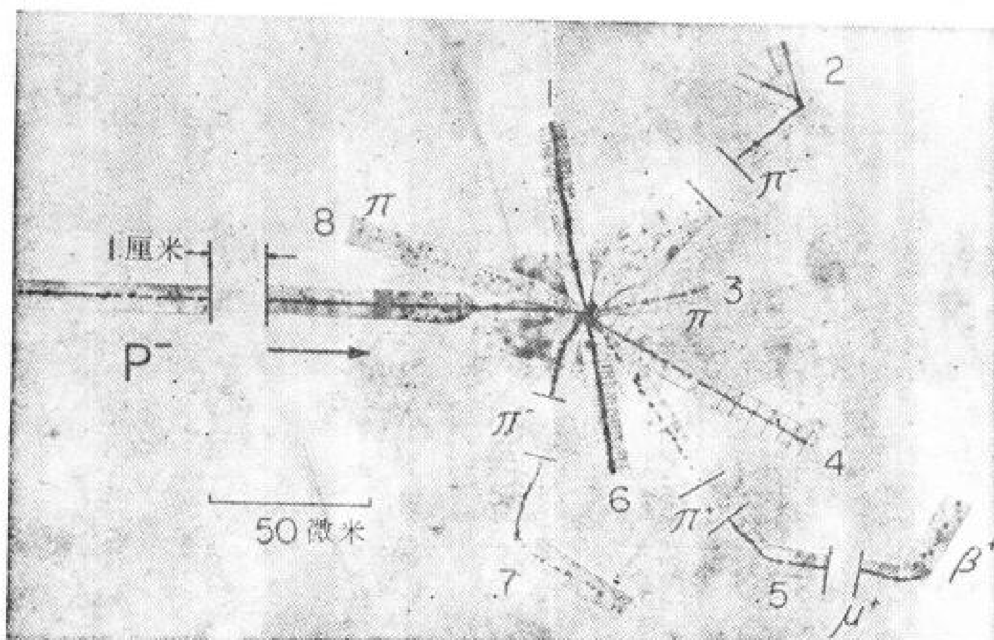


图 28A 照相乳胶中的湮没星. 注意这是一张复合图，已经把乳胶的不同部分拼拢来，以跟踪不同粒子的径迹. 比例尺表示在下角，其中 1 微米 $=10^{-3}$ 毫米. 注意，为了使图有适当的大小，有四个径迹被略去了一部分.

左边的水平径迹表示入射的反质子. 在它穿过乳胶时失去能量(因此慢了下来). 它终于被乳胶中的一个原子核俘获(可能是碳原子核)并和这个原子核中一个核子一起湮没. 在这一过程中产生了几个 π 介子(径迹 2、3、5、7 和 8)，并且原子核分裂成碎片. 径迹 1 和 3 可能是质子，径迹 6 是较重的碎片，可能是 H^3 原子核所造成. 看得见的(带电) 粒子的总动能加上 π 介子的静能估计大约为 1.3 千兆电子伏. 注意径迹 5 表示正 π 介子衰变为中微子(不可见)和正 μ 介子，后者接着衰变为正电子和两个中微子.

这张照片发表在 E. Segrè "Antinucleons," *Annual Review of Nuclear Science* **8**, 127 (1958)，该文评论了有关反核子早期的工作.

29 因为我们讨论的主题是正电子，所以我们稍微考虑一下有关粒子和反粒子的问题．在量子电动力学的现代理论中，电子和正电子起着完全对称的作用．这是我们的基本粒子理论的共同特点：我们深信对于每一种粒子存在着相应的反粒子(某些粒子，象中性 π 介子，它们本身就是它们自己的反粒子)，并且我们深信如果把粒子掉换成反粒子，世界(在某种意义上)是对称的[1]．反粒子具有与粒子相同的质量，但是电荷符号相反．实验上已经发现反质子和反中子都存在[2]，从理论的立场来看我们觉得很高兴；它使我们有可能坚持自然界是对称的理论．

粒子和它们的反粒子可以彼此湮没成(譬如说)光子，这是它们的基本性质．然而，常常会发生湮没成其他粒子的情形．例如，质子-反质子体系趋向于湮没成介子，这一过程比湮没成光子的可能性更大．

30 读者可能很想知道，如果粒子和反粒子在世界上确实起着几乎完全对称的作用，反粒子为什么不更加明显呢？为什么不"更经常地遇到"正电子呢？并且它们为什么不更早些被发现呢？正如我们所知道的那样，我们的世界看来根本不是处在对称状态中．我们的世界是由质子、中子、电子和氢原子等等组成的．但不是由反质子、反中子、正电子或反氢原子组成的．缺乏这种对称性的理由是：对称状态不可能抗拒湮没而稳定存在，物质和反物质不可能在密切混合物中和平共存．

---

1) 从最近完成的一些实验看来，弱相互作用在粒子换成反粒子以后并非不变的．这表明强相互作用和电磁相互作用可能遵守上述的对称原理，弱相互作用则否．因为强相互作用和电磁相互作用是世界上主要的相互作用．这样，说对称原理近乎(但不是完全)正确或许是合适的．

2) 关于反质子的发现参看：O. Chamberlain, E. Segrè, C. Wiegand and T. Ypsilantis, "Observation of Antiprotons," *The Physical Review* **100**, 947 (1955)．

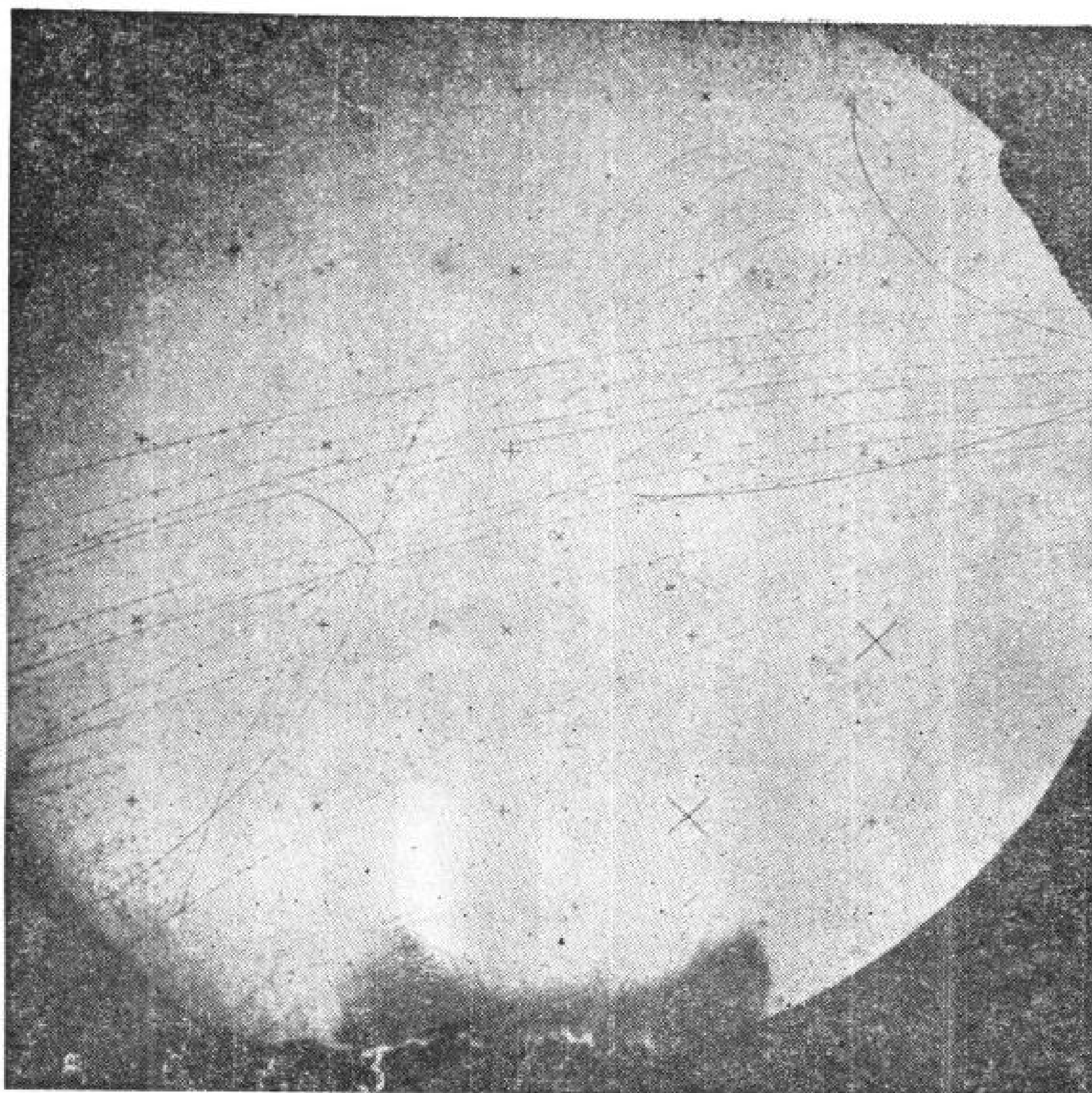


图 29*A*　表示一个反质子和一个质子的电荷交换散射的气泡室照相，接着是质子和第一个事件中产生的反中子的湮没反应．要确认径迹请参看图 29*B*．事件发生在放在垂直于图面的磁场中的液态氢气泡室中．(读者应确定磁场矢量指向哪个方向.) 中性粒子不留下可见的径迹，但是由于磁场的作用带电粒子留下的径迹是弯曲的．在上面的情况中，正粒子按顺时针方向偏转，而负粒子按相反方向偏转．

碰巧这张照相还显示了另一个有兴趣的事件，即一个正 π 介子衰变成一个正 μ 介子和一个中微子，接着 μ 介子衰变成正电子，一个中微子和一个反中微子．中微子(和反中微子)是中性的，不留下可见的径迹。

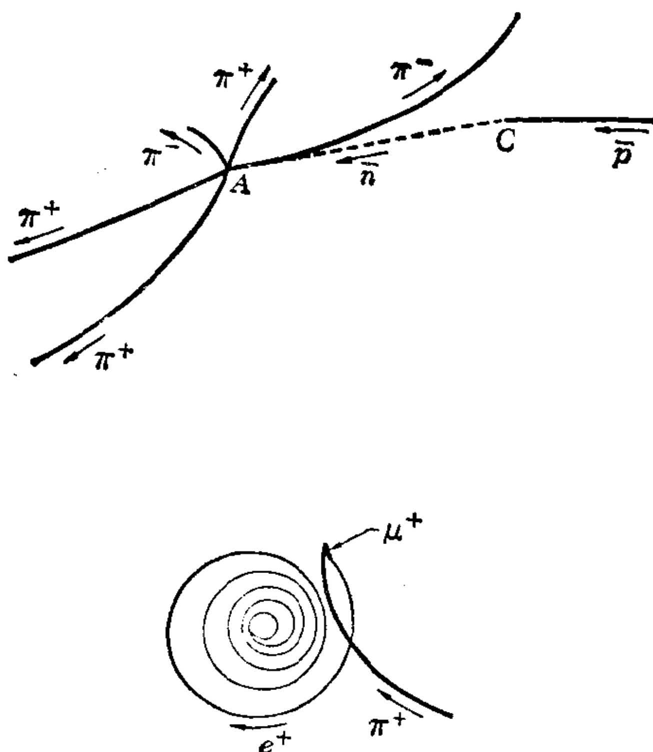


图 29B　这两张图标明了图 29A 的气泡室照片中看到的径迹. 在上图中，入射的一个反质子和在 C 点的质子碰撞. 在这个反应中产生一个中子和一个反中子. 在图上用虚线表示出反中子的不可见径迹. 在 A 点这个反中子与一个质子发生湮没反应. 在这一反应中产生五个带电 π 介子. 入射的反质子是从右到左穿过气泡室的粒子束中许多负粒子中的一个. 这些粒子可能全都是反质子.

下面的图表示在正 π 介子顺序衰变中所包含的带电粒子的径迹. 螺旋形的径迹应归于正电子. 当它通过液态氢时失去能量，因此径迹的曲率半径减小. 它的最终命运是与液体中的一个电子在相互湮没反应中消失.

只要地球存在，它必定或全由物质构成，或全由反物质构成. 它无论如何不可能作为混合物而存在.

世界状态的这种缺少对称性究竟是否能推广到整个宇宙是一个很有兴趣的问题. 也许碰巧会有反物质构成的星系：因为星系之间的平均距离约为三百万光年，湮没不容易发生. 这个问题现在还无法回答，虽然人们可能倾向于认为反物质星系并不存在. 还不知道星系是怎样形成的，但是如果我们

假设星系是通过“尘埃”的某种凝聚过程形成的，那就很难理解物质和反物质怎样会进行分凝使得某些星系由物质构成而另一些由反物质构成．如果我们否定反星系的思想．那么，尽管有物理上的基本定律看来是几乎完全对称这个事实，为什么世界状态是如此之不对称，由一种物质占了优势，却仍旧是一个谜．

三、光子会“分裂”吗？

31 到目前为止，我们的讨论提出了一个很有趣并且是十分基本的问题：是不是可能把频率为 ω 的光子分裂为两部分，使每一部分携带有 $\hbar\omega$ 的一部分能量，而每一部分的频率仍旧是 ω？

我们知道经典电磁理论十分准确地描述了多种关于光的实验．我们也曾经说过，“光子”的能量和动量之间的关系是可以按照经典电磁理论导出的．那么不能说光子只不过是服从经典电磁理论的辐射的波包或波列吗？我们现在已经明确地提出了一个具有根本重要性的问题．如果光子能在上面所说的意义上被分裂，那末我们在这一章里试图建立的整个概念结构就会动摇．

为了回答我们的问题，我们必须求助于实验．为了看一看我们应当进行哪一种实验，我们现在将完全采用经典的观点，然后作出一些预言，我们可以在实际的实验中检验这些预言以判断经典图象是否正确．

32 可以按下述方式产生电磁辐射的经典波列．我们用发射机和天线作为辐射源，发射机可以随意打开或关闭．我们使以频率 ω 工作的发射机在一定时间间隔内打开，于是天线发射出有限持续时间的波列，这一波列是近乎单色的经典“光

子”. 我们可以想象激发的原子就象这种天线.

我们再次强调指出，我们试图比较在实际实验中表现出来的物理光子的行为和经典波列的行为. 这一讨论包含把实际上在自然界中出现的客体(即光子)和(正象我们将要看到的)在自然界中根本不出现的某种东西,即严格遵守经典电动力学定律的电磁波列进行比较. 因此我们比较的是事实和空想; 为了避免事实和空想的混淆，我们把实在的东西叫做光子，把这里想象的东西叫做波列. 为了使我们自己确信这里的波列并不是实在的东西，我们必须在波列图象的基础上作出一些明确的预言,然后就能用实验来检验它们.

33 我们考虑碰撞激发的汞原子所发射的光线. 发射的光是蓝色的,频率为 ω. 不难理解,发射波列应该总是具有同样的频率 ω; 这一频率一定相应于原子振荡的某个自然频率. 然而，在经典理论的基础上难以理解的是为什么波列携带的能量总是 $\hbar\omega$. 我们可以指望这些碰撞的激烈程度有所不同: 可用于光发射的能量有时多有时少. 甚至更难理解的是为什么两个完全不同的原子，譬如说钠原子和汞原子，它们发射不同频率 ω_{Na} 和 ω_{Hg} 的光,就一定发射出总能量分别为 $\hbar\omega_{Na}$ 和 $\hbar\omega_{Hg}$ 的波列. 从经典立场来看，作为普适的比例常数 $\hbar$ 的出现是十分不可思议的.

如果我们想一下在第三章中讨论过的全部所有的这许多实验事实,那就十分清楚在经典基础上无法理解这些现象. 然而,让我们暂时忘记掉我们已经知道的发射和吸收的过程,而把注意力集中于研究“孤立的”光子. 我们考虑已经从某个光源发出的波列，并用适合于实验范围的光电池来研究这些波列.

34 换言之，我们研究光电效应. 我们把光电池中的减速电势调到 V_0. 假定 W 是光敏表面的功函数，我们能检测到波

列(即光电池的记录器"卡嗒发声")的条件是它携带的能量超过下列数值:

$$E_{\min}=eV_0+W \tag{34a}$$

我们调节 V_0 以使

$$\hbar\omega>E_{\min}>\frac{2}{3}\hbar\omega \tag{34b}$$

其中 ω 是光的频率.(我们随意选取 2/3 作为大于1/2而小于1的一个数.)所以,如果我们把发射的波列的全部能量都集中到光电池中,记录器就会卡嗒发声.然而,如果只有这个能量的一半到达光电池,记录器就不会卡嗒出声,因为这时电子分得的能量无论如何不能克服减速电势.

35 经典图象使人想起了一个明显的实验,在这个实验中我们利用例如象图 35A 中所示的装置使波列分裂.从强度非常弱的光源发出的光落到一个*射束分离器*上,譬如说半镀银镜上,或者落到一个适当的射束分离棱镜上.我们可以这样来安排,使得透射束的强度等于反射束的强度,因此这些光束中每一束的强度都等于从光源发出通过狭缝的光束强度的一半.换言之,这是一个可能实现的实验,并且我们确实发现透射和反射光线的强度就象上面所说的那样.从经典物理学我们很容易理解这些事实:到达镜子的每一波列都分解成两部分.

现在来考虑一束波列到达镜子时发生些什么.根据经典模型我们指望它以下述方式被分裂成两个部分,即透射波列携带的能量是入射波列能量的一半.因此光电池2根本不会卡嗒发声!

*以经典理论为基础的这一预言与经验是截然相反的.*通过的光仍旧是频率为 ω 的蓝色光,而且只要 $\hbar\omega>E_{\min}$,光电池2的记录器就肯定会卡嗒发声.这表明透射光的能量以波

包 $\hbar\omega$ 的形式起作用. 插入镜子后的确发生的是计数速率只有没有镜子时的一半.

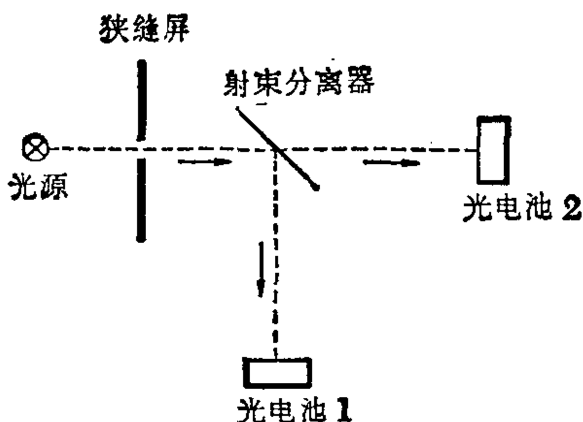


图 35A 说明第 35 节中的讨论的示意图. 从光源来的光束被射束分离器(可以是半镀银的镜子)将从光源来的光束分成两部分. 单个光子分裂了吗?

36 用图 35A 所示的实验装置或者用其他类似的装置都不能使光子分裂, 其证据究竟有多少说服力呢? 这证据是极好的. 事实上分裂光子的实验一直在进行. 每一个光学仪器只要其中有光电池或照相片,都可看作是试图分裂光子的仪器,但是都没有成功. 这一类型观察中最简单的是在离开光源不同距离 r 处观察光电效应. 如果原子象天线, 那末它就应该以球面波的形式发射光线. 发射的光强度正比于 $1/r^2$, 按照经典图象通过距离 r 处单位面积的一个波列所携带的能量数值正比于 $1/r^2$. 所以,由于光电池具有某一确定的截面积,似乎只要把光电池放在足够远的距离上, 就能使波列中可在光电池上起作用的那部分能量要多小就多小. 如果减速电势不变,当距离超出一定极限后,光电池应完全停止记录. 这肯定绝不是我们所观察到的情况: 所有发生的情况都是光电池计数速率按 $1/r^2$ 减少. 或许最显著的例子是观察从非常远的星球射来的光线的光电效应. 波列在几千年前就发出了, 并已分散到很大的空间范围中. 波列所携带的能量中只有很少

一部分能够通过望远镜到达光电池．然而发现给予光电池中电子的能量还是 $\hbar\omega$，就象光源是靠近光电池的灯一样．

37 按照下述思路解释这些事实的任何企图都是站不住脚的：这思路是，我们可能会遇到积累效应，许许多多"部分光子"每一个只给光敏表面上的电子以少量能量，这样在积累了足够的能量以后终于把电子发射出来了．如果是这样来解释，那末积累效应将在减速电势使 $E_{\min}>100\hbar\omega$ 时也会起作用．这肯定不是我们观察到的情况，如果减速电势太大，光电池就不会有记录．

38 因此，有关光电效应的实验事实导致了不可避免的结论，近乎单色的光子不可能分裂成频率相同而各自只带有原来光子能量的一部分的两个光子．在这方面来说，光子的行为不象经典波列．这一结论还进一步得到这一章前面所讨论过的康普顿效应，X 射线的发射，粒子对的产生和湮没等实验结果的支持．在对这些现象的理论分析中，我们作了明确的假设，就是关系式 $E=\hbar\omega$ 总是成立，即"部分的光子"不存在．在这个基础上，我们的确能够理解许多实验事实．

所以，经典概念中一定有些东西错了，我们想看一看到底哪些概念是要加以改造的．我们应当小心不要在这个时刻作出任何轻率的结论．相反，我们还要来考虑另一些实验事实，这些实验事实也关系着光子是否可以"分裂"这个问题．迄今为止我们所作的讨论告诉我们，按照这个词的一个确定的意义上，光子是不可分的．这并不排斥在另外的意义上光子被"分裂"的可能性．

39 考虑双缝衍射实验，如图 39A 所示．不透光的屏上有两个狭缝 U 和 L 垂直于纸面．光源 S 以频率 ω 十分确定的光（光子）照明狭缝．为简单起见，我们假设光缝大小相同并且缝宽比波长小得多．我们还进一步假设狭缝之间的距离 $2a$

与波长 $\lambda=2\pi c/\omega$ 差不多.

我们在离开屏 r 处测量衍射光强度作为观察角 θ 的函数，r 比光缝间距离大得多. 要测量强度，我们可以想像用一个光电池：那么光强正比于用光电池所观察到的计数速率.

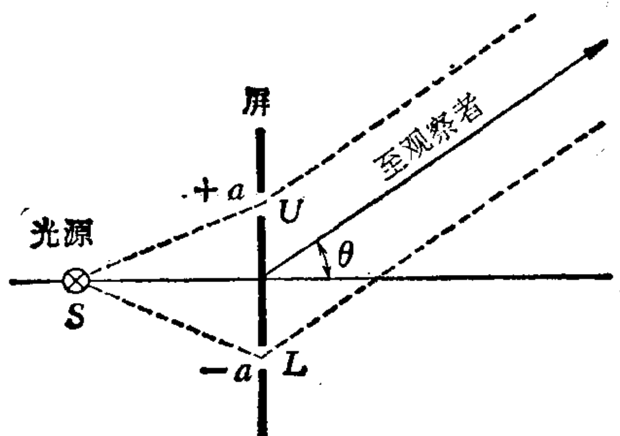


图 39A 描写我们的双缝衍射讨论的十分简略的图. 单个光子是不是只通过一个狭缝，或者像经典波列图象所指出的那样能通过两个狭缝？当入射光强度减弱时双缝干涉图案是不是会改变呢？

40 我们现在来看一看关于屏右边光强分布，经典电磁理论怎么讲. 狭缝宽度比波长小得多的假设意味着如果关闭任一个狭缝，衍射辐射的角分布就是角度 θ 的平滑函数. 令 A_0 表示只有一个狭缝情况下衍射波的强度，这一个狭缝无论是图 39A 中所示的上面的那一个还是下面的那一个都可以. 当然 $A_0=A_0(r,\ \theta)$ 是 r 和 θ 的函数. 应用复数表示，我们可以写成：

$$A_0=f(r,\ \theta)e^{-i\omega t} \tag{40a}$$

其中 $f(r,\ \theta)$ 描写振幅的空间分布.

用图 39A 所示的实验装置在离开屏很远处观察到的衍射波是从两个狭缝来的两列波之和. 它们的振幅是相等的，但是从下面的狭缝来的波相对于上面的狭缝来的波在位相上落后 $(4\pi a/\lambda)\sin\theta$. 于是组合波振幅就是：

$$A=f(r,\ \theta)e^{-i\omega t}\Big[\exp\Big(\frac{i\omega a}{c}\sin\theta\Big)+\exp\Big(-\frac{i\omega a}{c}\sin\theta\Big)\Big]$$
$$=2A_0\cos\Big(\frac{2\pi a}{\lambda}\sin\theta\Big) \tag{40b}$$

衍射辐射的强度正比于振幅绝对值平方，从而得到：

$$I(r,\ \theta)=|A|^2=4I_0(r,\ \theta)\cos^2\Big(\frac{2\pi a}{\lambda}\sin\theta\Big) \tag{40c}$$

其中

$$I_0(r,\ \theta)=|A_0|^2 \tag{40d}$$

是只有一个狭缝时所观察到的强度．因而双缝实验中的强度等于单缝实验强度和因子 $4\cos^2[(2\pi a/\lambda)\sin\theta]$ 的乘积，这一项描写了从两个狭缝来的波的干涉效应．我们注意到由于这种干涉，如果 $4a/\lambda>1$，我们会在某些方向观察到强度为零．在另外的某些方向上，强度将为单缝实验中的四倍．我们这里对关系式(40c)所描写的干涉效应特别感兴趣．强度 I 和 I_0 应以这种方式联系起来是我们的经典预言的精髓．

41 鉴于我们已经知道光子不可能"分裂"，我们可能很想作出结论：包含在方程(40c)中的经典预言必定错了．我们可以论证如下．由于光子不能分裂，每一个光子必定只穿过狭缝中的一个．假定某个光子穿过在上面的狭缝．在这个情况中，下面的狭缝的存在不会影响这个光子的衍射．穿过上面狭缝的所有光子的强度图样一定由 $I_0(r,\ \theta)$ 给出．对于穿过下面狭缝的光子也是一样．我们可以得出结论：两个狭缝都打开时强度 I^* 由下式给出：

$$I^*(r,\ \theta)=2I_0(r,\ \theta) \tag{41a}$$

我们已经用 I^* 表示所预言的强度以表明我们是抛弃了导致方程(40c)的预言的经典概念才得出这一预言．现在读者应当注意到，我们并没有说过前面关于光子分裂的讨论一定会使我们得到(41a)的结论：我们只想探讨这个可能性．

42 实验证据结论性地支持了波动理论的预言(40c). 我们可以把简单的双缝衍射实验当作一大批干涉实验的典型，这些衍射实验中我们可指出用衍射光栅的测量和晶体的X射线衍射实验. 方程(41a)说明被两个狭缝衍射的波互不干涉，假如这个预言对于双缝衍射实验是正确的，就应该说：无论用衍射光栅还是晶体都不能看到任何干涉效应.

在我们把(41a)当作绝对错误的预言而抛弃之前，我们应该关心的是：实际情况或许是由于几个光子之间某种"相互作用"而产生了方程(40c)所描写的干涉现象？用足够强的光源会有几个光子同时渡越，即几个光子同时通过光缝. 我们可能很想知道干涉效应是否可能是"多光子现象". 按照这一思路我们进一步提出问题，是否预言(40c)对于足够强的光源是正确的，而对于每一次实际上只输送一个光子的极弱光源，预言(41a)是正确的. 换言之，如光源的强度减弱，衍射图样的性质是从方程(40c)所描写的样子变成方程(41a)所描写的样子吗？

这个问题的回答是否，没有丝毫证据表明辐射强度减弱到零时衍射图样性质会有所改变. 所有衍射和干涉实验的结果都毫无疑问支持作为预言(40c)基础的思想.

43 直接有关这个问题的实验是在1909年由G. I. 泰勒完成的[1]. 泰勒拍摄了用极微弱的光源照明的缝衣针影子中的衍射花样. 这些实验中有一个曝光时间为2000小时或大约三个月. 在这个情况中，强度是如此之低以致在任何一个时刻仪器中实际上只能有很少的几个光子. 然而，产生的衍射图样就和用强光源一样清楚和线条分明. 对泰勒实验的严格理论分析需要一点技巧(其中之一是因为他对实际上所做的实

1) G. I. Taylor, "Interference Fringes with Feeble Light." *Proc. Cambridge Phil. Soc.* **15**, 114(1909).

验的描述不够详细). 我们在这里不打算讨论它. 不过,我们可以有把握地断言,光的强度的确是如此之低,如果当通过的光子数目减少时衍射图样的性质真的会改变, 那末这个效应该在这个实验中显示出来. 正如我们已经说过的, 并没有任何这种效应的丝毫迹象,

我们要强调指出, 我们相信衍射图样的出现并不是由于大量光子之间某种"相互作用"的结果,并不是只以泰勒的有点枯燥的实验为根据的. 它是根据大量的其他干涉实验. 我们发现,不论出现的辐射强度如何,在波动图象的基础上都可以正确地描写这些实验.

44 我们现在试着提出一种简单的理论. 按照这种理论, 我们可以解释我们到目前为止所讨论过的实验结果. 我们的理论如下:

I. 从光源发出的频率近似为ω的近乎单色的辐射,可以看作是由分立的"辐射波包"所组成,我们把这种波包叫作光子.

II. 经典电磁理论的麦克斯韦方程正确地描述了各个光子在空间的传播. 为了这一描述的目的可以把每一个光子看作由两个矢量场$\mathbf{E}(r, t)$和$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$所定义的经典波列. 而这两个矢量满足麦克斯韦方程和由已知的物理状态所决定的适当边界条件. 具体讲,光子将被障碍物衍射,并且衍射波可以在经典理论范围内描绘. 一个波入射到半镀银镜或带有两个狭缝的屏就确实会"分裂"成两个波,这两个波可以像经典理论所预言的那样互相干涉.

III. 把振幅$\mathbf{E}$和$\mathbf{B}$的平方和解释为代表与光子相联系的空间能量密度是不正确的. 这一经典概念是错误的. 代替这个概念的是: 凡是取决于波振幅的二次式的每一个量, 都要解释为正比于发生某种事件的几率. 例如,振幅$\mathbf{E}$与$\mathbf{B}$的

平方和在某个有限空间区域内的积分并不等于这个区域内光子携带的能量，而是正比于这一空间区域内能观察到光子的几率，如果我们试图用光电池来“捕捉”光子的话．与此类似，用经典方法计算出来的通过屏上小孔的辐射通量要重新解释为正比于我们把光电池安放在紧靠小孔后面将检测到光子的几率．

IV．如果在空间任何地点（用光电池）探测到了一个光子，交给探测器的能量总是等于 $\hbar\omega$．因为探测到光子的几率正比于振幅 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{B}$ 的平方和，我们可以断定经典能量密度在一个区域内的积分等于一个光子所具有的能量与在这个区域内找到光子的几率的乘积．所以，假如光源在一段长时间内保持稳定以致发射大量光子，那末在某个区域内能观察到的平均能量确实等于这一区域内用经典方法计算得到的能量．

45 我们现在已经不遵守经典电磁理论的概念．我们所引进的新概念是对取决于电磁场振幅的二次式的量的几率解释．我们可以继续用麦克斯韦方程来研究光子在空间的传播，但是我们对用经典方法算出的能量密度和辐射能通量都作出新的解释．这些数量将被解释为有大量光子时我们将观察到的平均量．因此可以说，在只测量这些平均值而不企图去观察个别光子的实验中，经典理论将表现为正确的．在另一方面，如果我们用光电池真正地去观察个别光子，那末经典理论的局限性就立即显示出来了．

46 我们现在来看一看在具体情况下我们怎样用新的概念来描写观察到的事实．我们考虑第 36 节讨论过的情况，在那里我们观察离开位于原点的稳定光源不同距离上的光电效应．假定光源是近似地单色的，还假定它平均每秒发射 N 个频率为 ω 的光子．光电池放在离开光源的某个固定距离上．光电

池联到记录器上，从而我们可以数出光电池探测到的光子数目.

现在考虑光源发出的一个典型的光子. 可以把这个光子看作持续时间有限的波列向空间各个方向扩展，带有总能量 $\hbar\omega$. 我们经典地计算这一波列带给光电池的总能量通量 E_0. 这一能量是发射的总能量的一部分 $q=E_0/\hbar\omega$. 然而，按照我们对取决于波振幅的二次式的物理量的新解释，q 实际上等于光子进入光电池的几率.（为简单起见，我们可以假设光电池有百分之百的计数效率，在这个情况下 q 等于当光源发射一个光子时计数器卡嗒作响的几率.）

对于光源发射的每一个光子，我们不能预言计数器实际上将卡嗒发声或不卡嗒发声. 但是我们可以说计数器卡嗒发声的几率是 q. 如果计数器卡嗒发声了，那末从光源传送给光电池的能量数值等于 $\hbar\omega$. 从而当光源保持稳定时从光源传送给光电池的平均功率等于 $W_{av}=qN\hbar\omega=NE_0$. 这一平均功率和经典的预言是一致的.

经典地算出的数量 E_0 自然正比于 $1/r^2$, 其中 r 是从光源到光电池的距离. 从而 $q=E_0/\hbar\omega$ 也正比于 $1/r^2$, 同时因为光电池的计数速率等于 qN, 我们看到计数速率反比于距离的平方，这和实际所观察到的相一致.

47 许多人感到在上面所描写的情况中有某些东西似是而非. 他们提出下面的论据. 假定距离 r 非常大，譬如说一个光年. 光子被发射以后它展开像球壳. 在波到达探测器的时候波所携带的能量已经展开到非常大的空间范围中了，譬如说某个半径为一个光年的球壳上. 那末如果光电池确实记录到光子的时候，所有这些能量怎么可能突然集中到光电池中呢？在球壳上“远端”内的能量到达光电池需要一年以上的时间，否则就要违反没有一个信号能传播得比光速更快这一

原理.

这个推理的谬误在于使用了电场和磁场表示的能量密度的经典表示式. 我们必须记住, 物理学中引进电磁场概念的整个目的是为了描写电荷之间的相互作用. 在这套丛书的第二卷中我们认识到, 这是一个方便的概念, 我们还认识到, (在典型的宏观情况中)想像分布于空间中的能量密度正比于场振幅的平方有时候是方便的. 然而, 在第二卷的讨论中并没有任何物理事实表明我们对这个概念必须拘泥于字面上的理解. 我们现在知道能量密度的经典表述是关于对大量光子观察得到的平均能量密度而不是描写与单个光子相联系的能量密度.

真正的问题在于: 能量从光源中的原子转移到探测器中电子是受什么定律支配的? 这就是我们正在研究的, 并且我们现在已经发现了这些定律的某些特点.

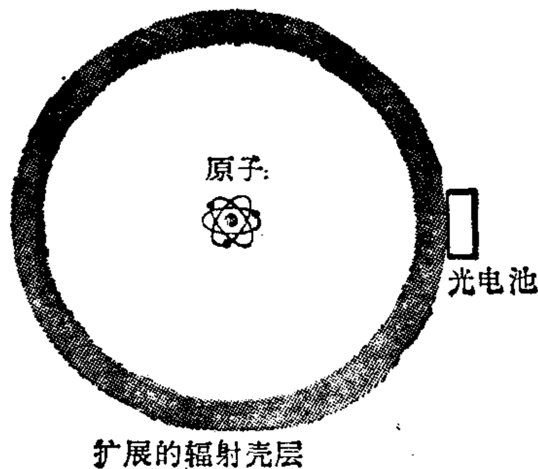


图 47A 图中央的原子在一年以前发射光线. 因此辐射球壳半径为一光年. 它正要到达右边的光电池. 如果光电池记录下来, 波的能量突然聚集到光电池中. 这怎么可能呢? 在球壳远端的能量怎么能小于两年的时间内到达光电池呢?

如果我们放弃能量密度正比于场振幅的平方这一经典概念, 这个"佯谬"就消失了. 按照量子力学, 能量从原子到光电池的转移是被几率的定律所支配, 场振幅的平方必须解释为几率密度.

48 我们现在回到第 39—42 节讨论的衍射实验. 假设我们在某个方向 θ 用光电池观察光子. 通过观察计数率作为 θ 的函数(同时保持光源稳定), 我们可以观察到干涉图样. 现在假设计数器恰好卡嗒出声. 问题: 这个光子是通过哪一个狭缝过来的呢? 答案: 它两个狭缝都通过, 部分通过狭缝 U, 部分通过狭缝 L.

这一答案是符合于第 44 节简单理论的精神. 如果所研究的客体是服从经典力学定律的弹子球, 那末这个解答就要使人震惊了. 然而, 因为我们涉及的是光子, 这个答案就没有什么惊人的地方了: 它和实际发生的过程完全一致.

问题: 我们是否可以把实验安排得使我们知道光子是通过哪一个狭缝过来的? 答案: 可以, 十分容易. 我们只要遮住狭缝 U, 那末我们就知道所有被检测到的光子必定都是通过狭缝 L 到来的. 当然, 如果我们这样做, 我们就看不到双缝衍射图样而只看到单缝图样. 读者要说, 这并没有回答真正的问题. 我们要借助一个巧妙的装置不用遮住任何一个狭缝来进行这一实验. 换言之, 我们要使双缝衍射图样严格保持它没有使用巧妙装置时原有的形式, 但却能够告诉我们每一个特定的被记录的光子是通过哪一个狭缝过来的. 我们能够这样做吗?

假定这样做是可能的. 在这个情况下, 我们只要先去掉光子通过狭缝 U 过来的计数. 然后根据剩下来的计数画出衍射图, 这些计数都是光子通过狭缝 L 的. 这个图是像什么样子呢? 它一定会象单缝衍射图样, 因为我们保证"没有什么通过狭缝 U 到来", 这个情况就和已将狭缝 U 关掉了一样了. 同样, 根据与通过狭缝 U 到来的光子相联系的所有计数得出的图样也必定是单缝图样. 于是所有的计数合在一起将导致如第 41 节中所预言的图样, 即图样不是实际上所观察到的双

缝图样．在观察到双缝图样的实验中我们不能说出任一特定光子是通过哪一个狭缝过来的．双缝衍射图样只可能是光子都部分地通过两个狭缝所造成的，因此要问光子通过哪一个狭缝就毫无意义了．

49 我们已经知道了有关光子行为的许多有趣的东西．第 44 节中提出的简单理论是表述电磁辐射的量子力学理论的第一步．自然，我们这一节中讨论的并不是量子电动力学的全部内容：在这方面要学的东西还多得多．特别是关于涉及许多光子的过程还有更多的东西可谈．然而，我们这一章的目的是要得出简单初步的量子力学表述，我们可以应用这个表述描写有关光子的最基本的实验事实，这我们已经做到了．我们理论的核心在于凡是取决于振幅的二次式的量都一定要用几率来解释，而和一个光子相联系的波振幅却可以按象在经典电磁理论中那样来讨论．在一种意义上光子可以“分裂”：就是波可以用半镀银镜或其他的装置分成两个或几个部分，就像在经典电磁理论中那样．然而，在另一种意义上，一个近乎单色的光子不能“分裂”，即我们不能用光电池探测到只带有能量 $\hbar\omega$ 的一部分的“部分光子”，这里的 ω 是光子的频率．这些概念和经典电磁理论的概念有明显的背离．然而，说经典理论完全被推翻了这是过分夸张了，我们只不过发现了经典理论的局限性．

我们要强调指出：关于我们讨论过的实验事实中，根本没有似是而非的或任何神秘的东西．自然，对于我们在自然界中发现的东西我们有时会感到困惑，其原因是我们带着成见来看待这些事实．我们已经有了关于事物应该是怎样的见解，于是当我们的预期未能得到满足时我们就会觉得不高兴．然而，我们应该学习按照事物本来的面貌来认识事物，并试图找出对被观察现象的简单而又前后一致的描述．

读者应当清楚地理解这一章中的理论性概念是从一些实验事实得出的. 我们决不可能从一组实验的结果按照纯粹逻辑导出另一组不同的实验中必然会发生什么现象. 我们可以猜测, 但这是另外一回事. 根本没有理由认为为什么事物一定是我们在这一章中所描写的那个样子. 如果竟出现"部分光子", 或者当光强减弱时衍射图样真会改变了它的特征, 那也是完全可能的.

50 作为本章的结束,我们极力主张读者考虑一下"光学工具箱的"无比的理论价值,它包括几个光电池和有关的电子计数线路,衍射光栅,一些单色光源和少数其他标准光学元件. 利用这样的工具箱我们可以学到很多有关基础物理学的知识. 由于它价格低廉而教育价值很高,在实验物理学的仪器中,光学工具箱是十分独特的.

问　　题

1. 质量为 M_i 的原子或原子核通过发射一个光子而衰变. 粒子最终质量为 M_f (在发射光子之后). 在原子原来在其中是静止的惯性系中观察发出的光子: 令光子的频率为 ω. 我们用 $\omega_0=(M_i-M_f)c^2/\hbar$ 来定义 ω_0.

a) 证明

$$\omega=\frac{(M_i+M_f)}{2M_i}\,\omega_0=\omega_0\left[1-\frac{\omega_0\hbar}{2M_ic^2}\right]$$

b) 对于钠发出的黄色光谱线, 计算 $(\omega_0-\omega)/\omega$. 同样对于铪的同位素 $_{72}\mathrm{Hf}^{177}$ 发射的 113 千电子伏的 γ 射线计算 $(\omega_0-\omega)/\omega$.

上面的公式描写发射光子时的*反冲效应*. 正如我们所知道的, 发射的光子频率 (在发射体静止的参考系中) 总是比 M_i 无限大时的频率 ω_0 来得小. 对于原子发射的光学光子,这个效应很小.

2. 考虑问题 1 中讨论的过程的逆过程. 质量为 M_f 的, 原来静止在实验室中的原子或原子核吸收频率为 ω 的光子. 原子 (或原子核) 的

最终质量为 M_i. 仍旧设 $\omega_0=(M_i-M_f)c^2/\hbar$. 推导 ω, ω_0, M_i 和 M_f 之间的关系. 注意,质量相对变化很小时频率 ω 非常接近于 ω_0.

3. 根据图 23A 的曲线所给出的数据确定 h/e, 算到曲线准确度所允许的准确度. (光速当作已知的.)

4. 考察图 20A 中的康普顿曲线. 横坐标大致正比于波长. 利用第三个图中的数据, 试预言第二和第四张图中的位移后的最大值, 并与实际的曲线比较.

5. 考察图 16A 中的曲线. 我们注意到横坐标是用两种不同的方式来表示的: 即作为速度和作为频率. 受激 Fe^{57} 原子核发射的 γ 射线的能量是 14.4 千电子伏. 知道了这些, 你能将图上所表示的速度和频率两个标度联系起来吗?

6. 如果我们考虑一下图 16A 中的曲线,我们注意到一个明显的特点: 在问题 2 中讨论的反冲效应并不存在. 这一现象以它发现者的名字命名为穆斯堡尔效应[1]. 你对这个效应能否想出任何解释? 在你想过以后,你可以去看一下文献: 这是一个有趣的现象.

7. 波长为 0.701 埃的 γ 射线在薄的铝箔上散射. 在与入射方向成 60° 角处观察到散射辐射. 你期望看到什么波长?

8. 假设正负电子对湮没成三个 γ 光子. 如果我们在正负电子对静止的参考系中观察一个 γ 光子 (假设当电子和正电子几乎在静止不动的状态中发生湮没), 该光子可能的能量是多少?

9. 光子垂直地入射到把折射率为 n 的均匀电介质与真空分割开来的平面边界上. 我们假设频率为 ω 的光子从真空入射.

(a) 在电介质中光子的能量、频率是多少?

(b) 是不是可以给电介质中的光子指定一个动量? 如果能够, 给出动量的表示式. 动量与波长的关系是怎样的, 在电介质中的波长是多少?

10. 带电粒子在真空中匀速运动不能发射电磁辐射(光子). 能量

---

1) R. L. Mössbauer, "Kernresonanzfluoreszenz von Gammastrahlung in Ir^{191}," *Zeitschrift für Physik* **151**, 124 (1958). 这篇文章的英译文和同一题材的另一些文献重印在 H. Frauenfelder 所编的 *The Mössbauer Effect* (W. A. Benjamin, Inc., New York, 1962) 一书中.

和动量守恒禁止这一过程．研究一下当带电粒子在电介质中以比光在介质中速度大的均匀速率运动时是否会发射光子．现在已经知道这是可能的，这种辐射叫做切伦科夫辐射．（我们这里只考虑能量和动量的平衡，而不考虑引起发射的详细"机理"．）发射的光子出现在相对于带电粒子运动方向成一定角度方位上．假定折射率是1.5，粒子是能量为5千兆电子伏的π介子，光子是在光学范围内的光子，求出这个角度．在高能物理学中普遍应用利用切伦科夫现象的带电粒子探测器．π介子的质量是140兆电子伏．

11．(a) 带电粒子在垂直于均匀磁场的平面中运动时，它的轨道将是一段圆弧．假设粒子带有一个元电荷，求证粒子的动量正比于Br，其中B是磁场的大小，r是轨道的半径．假如Br用高斯·厘米作单位，求出动量用兆电子伏/c作单位时的转换因数．（这里的c是光速．）

(b) 安德森在分析他的云室照片（见图26A）时，从已知的磁场和观察到的径迹曲率确定正电子的能量．把两部分轨道中的动量表示成$Br=2.1\times10^5$高斯·厘米以及$Br=7.5\times10^4$高斯·厘米．证明这相当于能量为63兆电子伏和23兆电子伏．

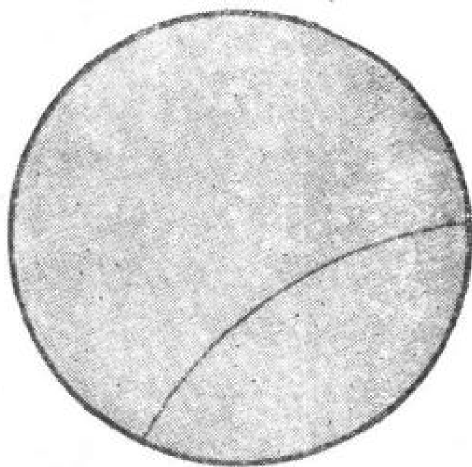


图51A　虚构的云室图片，表示指向图面外面的磁场中带电粒子的径迹．（这是问题11的参考图．）

这是正电子的径迹吗？如果是的话它是向哪一方向运动？或者这是向相反方向运动的电子径迹吗？

安德森怎么会知道他的图（见图26A）上出现的是正电子的径迹而不是电子的径迹？

(c) 电荷的符号与粒子运动的方向是否能够根据诸如图 51A 虚构的云室照相来确定？安德森怎样知道粒子是正电子而不是向相反方向进行的电子？(见图 26A)

(d) 在图 26A 中磁场垂直于图面，它是指向图的里边还是指向图的外边？

关于安德森排除他的照片显示质子径迹可能性的论证参看安德森的文章 [*Phys. Rev.* **43**, 491(1933)].

12. 我们考虑第 39—42 节中讨论过的双缝实验的一种改进.(参看图 51B.) 我们在狭缝前面，光源前面和观察者前面都放上偏振滤波器. 对于各种偏振滤波器的组合求出类似于方程(40c)的强度表达式. 假设光源本身发射非偏振光，并且狭缝对于偏振态不敏感. 考虑下面的情况：

P_S	P_U	P_L	P_O
无	无	水平	无
无	水平	垂直	无
圆	水平	垂直	圆
圆	水平	水平	圆
圆	水平	垂直	无

在上表中，"水平"表示只让水平方向偏振的光线通过的滤波器，"垂直"表示只让垂直偏振的光线通过的滤波器，"圆"表示只让左旋圆偏振光通过的滤波器.

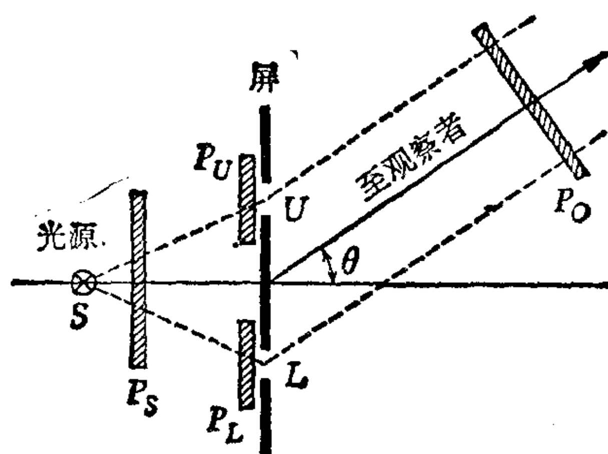


图 51*B*　图 39 的改进．偏振滤波器放在下列地点：P_S 放在光源前面，P_U 和 P_L 分别放在上面和下面的狭缝前面，P_O 放在观察者前面．

这个图是问题 12 的参考图．选择不同的滤波器我们将会看到什么样的条纹呢？

第五章 实物粒子

一、德布罗意波

1 在本章中我们将研究实物粒子的性质.实物粒子就是静止质量不为零的那些粒子,如电子,质子,中子,介子,分子,等等.

实物粒子具有波动性质是一个简单的实验事实. 如今这一事实不仅为主要受过物理科学教育的人们所知晓, 而且也为其他许多人所知晓. 但我们必须记住: 象电子这样的物体的波动性质曾一度被认为是非常意外的事. 其原因只不过是物理学家们已习惯于把电子当作经典微粒来考虑. 早期有关电子的实验似乎暗示了这一模型,而在1927年以前也没有人完成过任何使波性表现出来的明确的实验. 读者在中学物理课程[1]中很可能已经学过某些证实电子波性的实验,我们将在本章中进一步讨论这些实验.

对于光子,其波动性发现在先,而粒子性发现在后. 对于电子, 次序则倒过来. 由于事件的这一历史顺序[2], 一般公众常倾向于相信光由波组成, 而电子是微粒. 这是一幅不完全的图象. 光子和电子以及实际上所有的粒子, 在它们都具有某些粒子性和某些波动性这一意义上十分相似, 这一点将来无疑会越来越为人们普遍了解.

2 追溯物质波的预言和发现是有趣的,因为这是我们在物理学知识中的一个重大进步. 在本章第一部分中我们将遵循带

1) 例如见 PSSC "Physics" Part *IV*.

2) 作者相信发现的历史顺序可以由精细结构常数 α 很小这一点从理论上得到理解.

有历史性质的叙述方法，并请读者暂时忘却在中学里学过的有关物质波的知识．我们将想象自己在时间上回到1923年前后的时期．那时候，关于电子作为一个经典粒子的事实知道得相当多，但是关于它的波动性却一无所知．然而光子具有某些粒子性则已经知道了．

让我们来问一问：一个实物粒子，譬如说一个电子，是否可能具有波的某些性质．为弄清这一点，我们必须着手进行实验，但在这样做以前应先尝试一下理论上的想法，看一看我们可能预期些什么．

3 将波和粒子联系起来似乎是一件目的很不明确的事，而我们也确实不想声称我们能从逻辑上证明这样的波必定存在．然而我们可以指出有一些跟光学上类似的情况．试考虑一光学仪器，光路通过该仪器．我们知道，在原则上可以求解带有适当边界条件的麦克斯韦方程的办法来描述此仪器，而如果我们这样做了，我们就能描写波从光源到它的象的传播过程．但有一种讨论光学仪器的更简单的方法，即几何光学的方法．以讨论严格的波动方程为依据，可以证明此方法必产生一近似解．我们追踪光线通过光学仪器的路径，可把此线当作光子的轨道．光线和波的关系如何呢？光线在每一点都与波前垂直：在空间每个小区域中，波近似地象一平面波，而通过此区域的光线则垂直于此等位相平面．在此我们有了一个“粒子”和波之间的联系，我们正是试图利用这一光学类比来建立实物粒子的波动理论的．

L. V. 德布罗意(de Broglie)于1923年左右首先提出了这些思想方法[1]．

---

1) L. V. de Broglie, "Ondes et quanta", *Comptes Rendus* **177**, 507 (1923); "A tentative theory of light quanta," *Philosophical Magazine* **47**, 446 (1924); "Recherches sur la théorie des quanta," *Annales de Physique* **3**, 22 (1925).

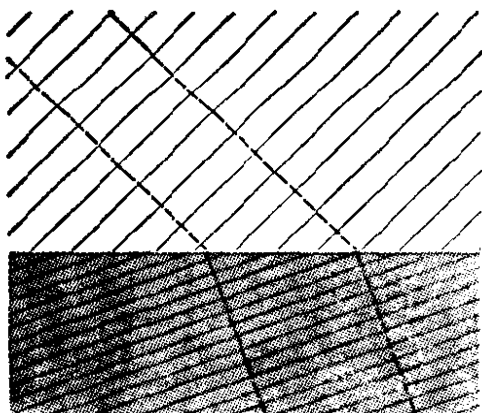


图 3A　平面波在两个不同折射率的均匀介质分界面上的折射．波前，即等相面，在这里是平面．图中用细实线表示它们．用虚线画出，与波前垂直的光线．我们可以认为它们代表光子的轨道．一组轨道与一族给定的波前对应，图上所示两个轨道为其中之特例．

实际上波也部分地被反射，虽然为了美观起见在图上并未画出．

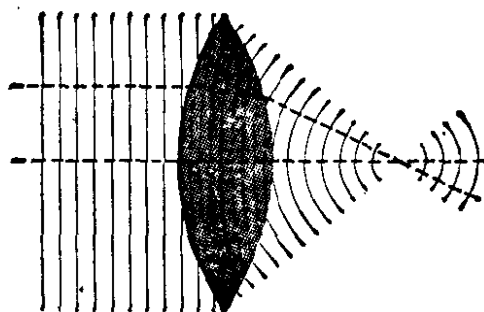


图 3B　此图与图 3A 类似，想用它来说明第 3 节中的讨论．图中表示平面波从左边入射到一透镜上，画出了波前，还画出了两条光线，即光子的轨道．注意它们在焦点相交．一组轨道再次与一组波前相对应．

仔细观察揭示此图有一些缺点．这不仅仅是由于制图术的不足，而是反映了完整的透镜并不存在这一事实．此图只在傍轴区域，即紧靠轴的附近才是严格正确的．

当然在各个分界面上将发生反射，这在图中未予画出．

4　现在让我们按照德布罗意的步骤：假定每一个运动粒子都有一波与之相联系．让粒子在没有任何外力的情况下运动，在这样的情况下运动是匀速的．设其能量为 E，动量为 $\mathbf{p}$，并设粒子的质量为 m．

如果有一波与这样运动着的粒子相联系，我们将预期此波必沿与粒子相同的方向运动．用复数波函数

$$\psi(\mathbf{x},\ t)=A\exp(i\mathbf{x}\cdot\mathbf{k}-i\omega t) \tag{4a}$$

来表示此波，其中 A 是波的恒定振幅，$\mathbf{k}$ 是波矢，ω 是频率．我们的问题是试图猜测出表征波的量 $\mathbf{k}$ 和 ω 与表征粒子的变量 $\mathbf{p}$，E 和 m 之间的关系．

用波函数 $\psi(\mathbf{x}, t)$ 描写的波是一个平面波：其等位相平面由 $(\mathbf{x}\cdot\mathbf{k}-\omega t)$ = 常数给出．这些平面，从而这个波，以相速度

$$\mathbf{v}_f=\frac{\omega\mathbf{k}}{k^2} \tag{4b}$$

传播．

开始时我们也许很想让相速度 $\mathbf{v}_f$ 与粒子速度 $\mathbf{v}=\mathbf{p}c^2/E$ 相等，但经重新考虑后，我们期望与粒子速度相等的应是群速度．群速度是信号或一定的能量在空间的传输速度，而我们可以适当地把粒子看作为一个能量的"包"．

5 在本教程第三卷[1]中我们曾导出了波包群速度 v 的表达式，即

$$\frac{1}{v}=\frac{dk}{d\omega}\ \text{或}\ v=\frac{d\omega}{dv}\ \frac{dv}{dk} \tag{5a}$$

我们曾论证群速度 v 就是粒子的速度．再进一步，就必须猜测频率 ω 如何依赖于 $\mathbf{p}$ 和 E．让我们猜测对光子成立的关系 $E=\hbar\omega$ 对实物粒子也成立．从而有

$$\hbar\omega=E=\frac{mc^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \tag{5b}$$

将此式代入(5a)第二式并加整理，得

$$\frac{dk}{dv}=\frac{1}{v}\ \frac{d\omega}{dv}=\left(\frac{m}{\hbar}\right)\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-3/2} \tag{5c}$$

将此式积分，假定当 $v=0$ 时 $k=0$，得

$$\hbar k=\frac{mv}{\sqrt{1-(v/c)^2}}=p \tag{5d}$$

或写成矢量形式，

$$\hbar\mathbf{k}=\mathbf{p} \tag{5e}$$

这就是德布罗意提出的关系．

6 在得出关系 $\hbar\mathbf{k}=\mathbf{p}$ 时我们作了等式(5b)左边所表示的多

1) Berkeley Physics Course, Vol. III, *Waves*, Chap. 6.

少有点令人怀疑的假定．我们会问是否有可能从一个稍不偏激的假定并辅以相对论性不变性的要求出发得到同样的结果．让我们来探讨这一可能性并同时使我们确信等式(5b)和(5d)与狭义相对论理论是一致的．

首先必须找出在洛伦兹变换中 $\mathbf{k}$ 和 ω 如何变换．假定在不带撇的参考系中用等式(4a)给定的波函数 $\psi(\mathbf{x}, t)$ 来描写波．同一个波在以速度 $\mathbf{v}$ 相对于不带撇的参考系运动的带撇参考系中用波函数

$$\psi'(\mathbf{x}', t') = A'\exp(i\mathbf{x}'\cdot\mathbf{k}' - i\omega't') \tag{6a}$$

来描写，式中 A' 是恒定振幅，它可以等于、也可以不等于 A．

让我们假定带撇的参考系是粒子的静止参考系．因而在此参考系中有 $\mathbf{k}'=0$, $\mathbf{p}'=0$, 及 $E'=mc^2$．让我们进一步假定关系(5b)在静止参考系中成立(但在任何其他参考系中也许不成立)，在这一假定下就有 $\omega'=mc^2/\hbar$.

7 在任一参考系中波的位相由项$(\mathbf{x}\cdot\mathbf{k}-\omega t)$给定，而我们假定此量是个不变量：如果在带撇的参考系中的点 $\mathbf{x}'$，时刻 t' 位相具有某一量值，则在不带撇的参考系中的相应点 $\mathbf{x}$ 和相应时刻 t，位相应有相同的值．我们指出波的周期性质来为这一假定辩护．如果在一个参考系中时空中的两个事件的位相相差 2π 的整数倍，那末在所有参考系中同一波的位相也必相差同一整数倍．由此得出在带撇和不带撇的参考系中位相至多只能相差一个常数，而可以将此常数并入比率 A/A' 中，在这种情况下位相是个不变量，就象我们所已假定的那样．有了这一假定，并因我们选择带撇的参考系作为粒子的静止参考系，就得到：

$$\mathbf{x}\cdot\mathbf{k}-\omega t = -\omega't' = -\left(\frac{mc^2}{\hbar}\right)t' \tag{7a}$$

量 t' 可以用 $\mathbf{x}$, t 和不带撇的参考系相对带撇的参考系

运动的速度 $-\mathbf{v}$ 来表示. 这些量之间的关系由本教程第一卷[1]讨论过的洛伦兹变换给出,即

$$t'=\frac{t-(\mathbf{x}\cdot\mathbf{v})/c^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \tag{7b}$$

若将此式代入(7a)可得

$$\mathbf{x}\cdot\mathbf{k}-\omega t=\frac{(mc^2/\hbar)((\mathbf{x}\cdot\mathbf{v})/c^2-t)}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \tag{7c}$$

既然这一关系必须对所有 $\mathbf{x}$ 和所有 t 都成立,从而得出

$$\omega=\frac{(mc^2/\hbar)}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \tag{7d}$$

$$\mathbf{k}=\frac{m\mathbf{v}/\hbar}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \tag{7e}$$

另一方面,粒子在不带撇的参考系中的速度恰为 $\mathbf{v}$,因为我们曾假定粒子在带撇的参考系中是静止的. 从而在不带撇的参考系中粒子的能量 E 和动量 $\mathbf{p}$ 由

$$E=\frac{mc^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}},\quad \mathbf{p}=\frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \tag{7f}$$

给出.

将等式(7d)到(7f)联立在一起,得到

$$E=\hbar\omega,\quad \mathbf{p}=\hbar\mathbf{k} \tag{7g}$$

于是我们重新得到了结果(5e), 并进一步看到在第5节中特地引进的等式(5b)确实是普遍正确的, 只要它在静止参考系中成立. 因此这条推理的思路告诉我们关系式(7g)与狭义相对论是一致的: 我们现在事实上已在相对论不变性基础上导出了这些关系.

8 这样,按德布罗意的步骤,就导致这样的假设,即可以有一个波与运动粒子相联系, 此波由波矢 $\mathbf{k}$ 所表征, 而 $\mathbf{k}$ 与粒子的动量 $\mathbf{p}$ 由关系 $\mathbf{p}=\hbar\mathbf{k}$ 相联系. 换句话说,物质波的波长将

1) Berkeley Physics Course, Vol. I, *Mechanics*, Chap. 11.

由下式给出：

$$\lambda=\frac{h}{p}=\frac{2\pi}{k} \tag{8a}$$

此式称为德布罗意方程，把波长 λ 称为粒子的德布罗意波长．注意，对光子这些关系也成立．

为了弄清德布罗意波长如何依赖于运动粒子的诸参数，让我们把关系(8a)写成另外的几种形式．形式

$$\lambda=\left(\frac{h}{mc}\right)\frac{\sqrt{1-(v/c)^2}}{v/c} \tag{8b}$$

告诉我们当速度 v 增加时 λ 减少．速度 v 固定时，波长 λ 与质量 m 成反比．

9 象以前一样，如果 E 表示粒子的总能量，我们可以写出

$$\lambda=\frac{hc}{\sqrt{E^2-m^2c^4}}=\frac{(hc/E)}{\sqrt{1-(mc^2/E)^2}} \tag{9a}$$

此式告诉我们，如 m 固定，当 E 增加时波长 λ 减少．如总能量 E 固定，波长 λ 随质量 m 而增大．一个无质量粒子具有最小的德布罗意波长(对于给定能量而言)，它由下式给出：

$$\lambda=\frac{hc}{E} \tag{9b}$$

既然这个表示式是由(9a)让 $(mc^2/E)=0$ 得出的，可见它在相对论性极限，即速度 v 很接近于 c 时，也近似地成立，或换句话说，当总能量比静止能量大得多的情况下也近似成立．

令 T 表示粒子的动能，在这种情况下

$$E=T+mc^2 \tag{9c}$$

将 E 的这一表示式代入(9a)得到

$$\lambda=\frac{hc}{\sqrt{T(T+2mc^2)}}=\frac{h}{\sqrt{2mT}}\,\frac{1}{\sqrt{1+T/(2mc^2)}} \tag{9d}$$

如静止质量 m 固定，当动能 T 增加时波长 λ 减少．如动能 T 固定，当 m 增大时波长 λ 也减少．

在极限情况下，当粒子的速度远比 c 小时，比值 T/mc^2 变得很小．在等式(9d)中令此比值等于零，从而得到波长 λ 在非相对论性近似下的表示式

$$\lambda \cong \frac{h}{\sqrt{2mT}} \cong \frac{h}{mv} \tag{9e}$$

当然此式也可直接从(8a)得到．

10 现在我们希望查明德布罗意关于物质波的假设是否为实验所证实．首先我们应使自己确信物质波的概念与我们关于宏观物理学的普通常识不相矛盾．

试考虑从宏观观点来说是小的质点．例如，假定粒子的质量 m 是 10^{-5} 克或 10 微克，并假定此质点以 $v=1$ 厘米/秒的速度运动．利用非相对论性的德布罗意波长表式(9e)，对于我们的情况得到 $\lambda \cong 6.6 \times 10^{-22}$ 厘米，这是小得可笑的波长．波长如此微小说明了为什么物质波，如果它们存在的话，在宏观物理中不是比较明显的：这种波长实在是太小了，我们根本观察不到．我们可借助于光学上的类比来清楚地理解这一点．波长与光学仪器的所有有关线度相比，它越是小得多，几何光学就越精确．在光学实验中为观察光的波动性必须这样来安排实验，使仪器的某些几何参量可与光的波长相比拟：只有这样我们才能观察到偏离几何光学的干涉和衍射现象．为探测物质波的存在，我们也同样必须这样来安排实验，使波长可与仪器的某些几何参量相比拟．具体地讲，我们应该试图寻找出一种能用来观察衍射现象的光栅．

11 考察公式(8b)就表明，如想要得大的波长我们应试着用质量最小的粒子，即电子，来做实验，再有，我们应保持尽可能小的速度．既然我们考虑速度很小的情况，就可应用非相对论的德布罗意波长的近似表式(9e)．如果我们对质量为 m，动能为 T 的电子重写此式，可得

$$\lambda=\frac{h}{\sqrt{2mT}}=\sqrt{\frac{150.4\ \text{电子伏}}{T}}\text{埃} \tag{11a}$$

这样，如果电子动能是150.4电子伏，波长就是1埃$=10^{-8}$厘米．此波长与晶体的点阵常数的数量级相同，从而，正象在X射线的情况中一样，我们可试用晶体点阵作为光栅．

按照这条思路去进行的实验首先于1927年由C. J. 戴维孙(Davisson)和L. H. 革末(Germer)合作完成，同时由G. P. 汤姆孙(Thomson)独立完成[1]．在戴维孙和革末的实验中，对电子从晶体表面的反射作了研究，而在汤姆孙的实验中，则对于电子通过晶体薄膜的透射作了研究．

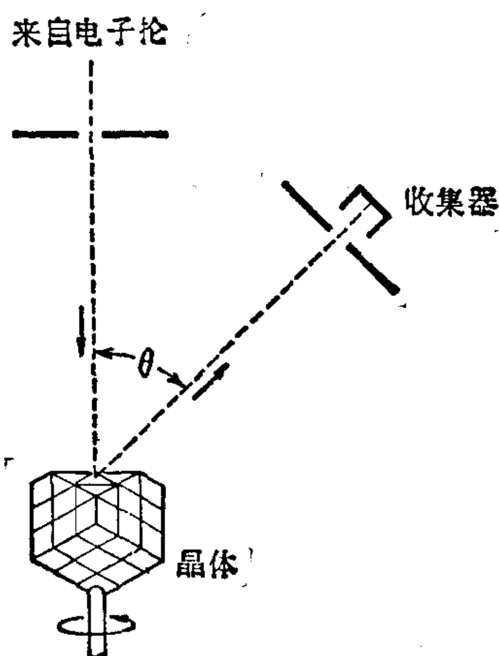


图12*A* 显示电子从一单晶体表面衍射的示意图．对于固定能量的入射电子，观察了弹性散射束的强度(作为角度θ的函数)．

12 让我们来稍稍详细地考虑一下戴维孙-革末实验．其实验装置的示意图见图12*A*．

我们将让戴维孙来描写他自己的实验的历史，引文采自他1937年在斯德哥尔摩所作的讲演．这段引文是有趣的，因为它揭示了在1927年，实验的论点并不象后来回顾起来那末明确这一事实．在作了关于德布罗意假设的初步讨论后，戴

1) C. J. Davisson and L. H. Germer, "Diffraction of electrons by a crystal of nickel", *Physical Review* **30**, 705 (1927).

G. P. Thomson, "Experiments on the diffraction of cathode rays", *Proceedings of the Royal Society* (London) **117A**, 600 (1928), and "The diffraction of cathode ray by thin films of platinum", *Nature* **120**, 802 (1927).

维孙接着说：

“在理论上无疑地，一束电子象一束光一样将显示波动性，当它们被适当的光栅散射时将显示衍射，然而没有一个第一流的理论家提到过这一有趣的推论．首先对它引起注意的是爱尔赛色(Elsasser)，他在1925年指出，衍射的实验演示将证实电子波的物理存在．发现电子衍射现象这一阶段的背景现在已经完成．

愉快地告诉你们，爱尔赛色的建议刚出现不久，导致显示电子衍射的实验就在纽约开始了——更令人高兴的是，此项工作是在德布罗意的论文复印本到达美国的后一天开始的．真实的过程并无多少判断上的敏锐可言，更多的是运气．此工作实际上开始于1919年的一次偶然发现，次级电子发射的能谱以原电子的能量为其上限，即使经过几百伏特加速的原电子也是如此；实际上，这就是说电子被金属弹性散射．

由此引出一项对于这些弹性散射电子的角分布的研究．这时，运气又来了；纯粹偶然地发现弹性散射的强度随散射晶体的取向而变．由此很自然地引出一项对于在预先定好取向的单晶体上的弹性散射的研究．这方面工作的初始阶段进行于1925年，即德布罗意的论文发表的翌年，亦即在波动力学巨大发展的前一年．因而纽约实验开始并不是对波动理论的检验．只是在1926年夏天，当我在英国和里查森(Richardson)、玻恩(Born)、法兰克(Franck)和其他人讨论了这次研究工作以后，它才具有这种特征．

对衍射束的探索开始于1926年秋天，但直到翌年初才有了一些发现——开始有一个，紧接着又很快接连发现了其余二十个结果．其中十九个可用来验证波长和动量之间的关系，而在所有情况下德布罗意公式 $\lambda=\dfrac{h}{p}$ 的正确性在测量准确度范围内都得到了证实．

我想简短地回顾一下实验的梗概．一束预先定好速度的电子对着镍晶体的(111)面射来，如图12A所示．一个用来只接收弹性散射电子及其邻近电子的收集器可以沿一环绕晶体的圆弧移动．晶体本身可绕入射束的轴线旋转．这样就可以测量晶面前方任意方向上的弹性散射强度，除了在原电子束周围10到15度以内的那些方向以外”．

13 **实验中电子束由电子枪产生，在电子枪中电子被加速到**

所需能量，约 50 电子伏．当然晶体是放在真空中的．电子垂直地射向特殊的晶面，技术上称为(111)面．在此平面上我们可以想象一个在晶体表面上具有规则间距的原子点阵．为了理解其中所涉及的原理，先考虑如图 13*A* 所示的简单一维模型．(稍后我们将考虑一般理论．) 入射波为该行上每个原子所衍射．在某些方向(在图面内)上来自所有原子的衍射波将彼此加强，而在其他一些方向上将趋于抵消．相长干涉(即衍射波相互加强)的条件是从不同原子到达观察点的路程差为波长的整数倍．如果设想观察点很远，由图 13*A* 容易看出相长干涉的条件是

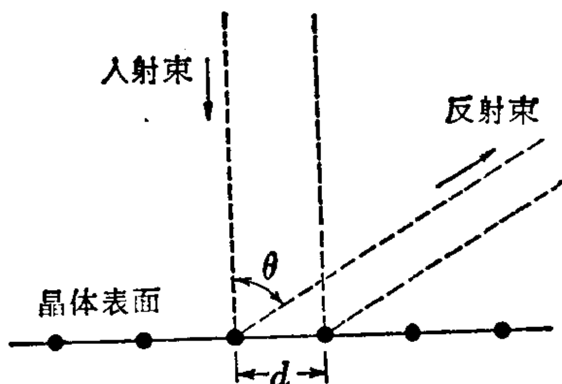


图 13*A* 说明 13 节的讨论．此图表示等间隔原子的线性排列．我们也可以把一个点理解为垂直于图面的一行原子．衍射极大发生在那些使 $d\sin\theta$ 为波长整数倍的方向上．

$$d\sin\theta = n\lambda \tag{13a}$$

其中 n 是一整数．这个关系只不过是说从两相邻原子到观察点的路程差是波长的整数倍．这样，我们在角度 θ 满足条件(13a)的那些方向上就期望得到衍射极大．我们把点阵间隔 d 当作已知，它可由其他方法(例如通过 X 射线衍射测量)决定．

我们的简单理论显然也适用于两维点阵的情况，如果我们想象图 13*A* 中的每一点实际上代表垂直于图面的一行原子的话．

在一典型的实验中数据如下：$d=2.15\times10^{-8}$ 厘米，$E=54$ 电子伏，在 $\theta=50°$ 时观察到极大．对 $n=1$，实验观察

到的 θ 给出波长为 1.65 埃，而由等式(11a)计算而得的波长为 1.67 埃．两者符合得很好．戴维孙还观察到更高级的极大，对应于 $n>1$，都与理论预言相一致．

14 汤姆孙的方法与X射线衍射工作中的所谓德拜(Debye)-谢乐(Scherrer)方法相类似．一束单向的单色X射线或电子入射束被包含有很大量杂乱取向的小微晶体的样品所散射．理论预言衍射波将沿着以入射方向为轴的圆锥面射出(见图 14*A*)．如果用照相法将被散射的射线记录在垂直于入射方向的底片上，就可得到一系列同心圆．圆形图样以一种特征方式依赖于晶体结构，若波长已知，就可以完全决定晶体点阵的几何结构．

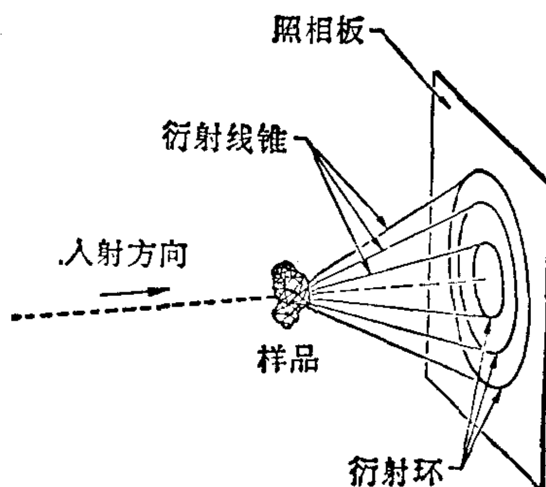


图 14*A* X射线或电子在杂乱取向小晶体的集体样品上的衍射．衍射线落在一组圆锥上，其花样依赖于晶体结构和入射的波长．

照片 14*B*—*C*，22*A* 和 22*C* 即用此法得到．在电子衍射中样品必须位于衍射设备的真空室中，因为电子会被空气或管中任何夹在中间的"窗"所强烈散射．X射线受到这种散射要少得多，因而样品可以放在X射线管外的空气中．

图 14*B* 和 14*C* 是用此法得到的两帧照片，第一帧用电子束得到，第二帧用X射线得到．在两种情况下样品都是白锡

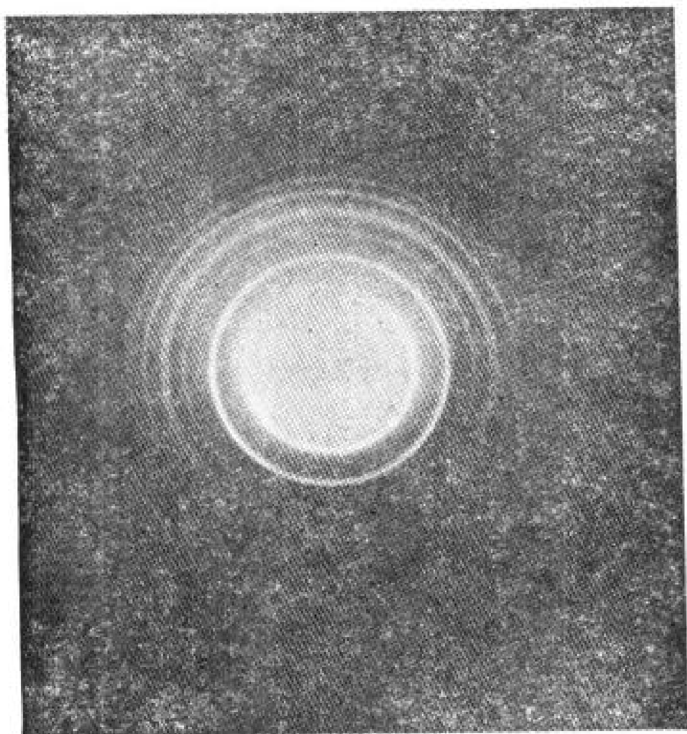


图 14B　用图 14A 所示方法得到的显示电子被白锡衍射的照片. 很小的锡晶体(线度约 300 埃)淀积在一氧化硅薄膜上. 薄膜作为样品放在电子显微镜中，电子显微镜在这里用作电子衍射装置. 样品被能量为 100 千电子伏的电子(这相当于波长约 0.04 埃)照明. 所见衍射环相应于照相板与图 14A 中的锥面的交线.

这个特征实验的目的是检验由蒸发过程形成的很小锡晶体的晶体结构.

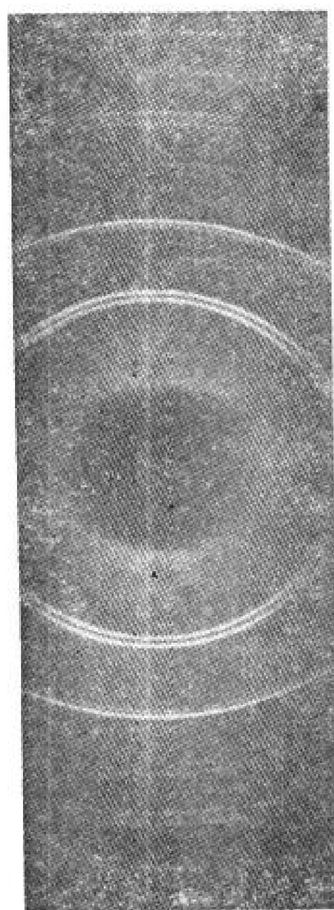


图 14C　用图 14A 所示方法得到的显示 X 射线被白锡衍射的照片. (这其实并非平的照相板，而是曝光时弯成圆弧状的一长条软片. 但这并不改变实验的本质.) 样品由少量细粉末状锡所构成，晶体平均线度约 1 微米. 所用波长约 1.5 埃.

应将此图与图 14B 仔细比较. 其相似性是引人注目的，因此电子和 X 射线以同样方式被锡晶体衍射是无疑的.

小晶体的集体. 圆环花样的相似性是十分显著的. 即使我们对于点阵中波的衍射的详细理论一无所知，只要看一下这两帧照片就会立刻使我们相信 X 射线和电子是以同样方式衍射的.

15　这样，戴维孙和革末的实验以及有关的汤姆孙的实验毫无疑问地表明物质波确实存在，并且它们的波长(至少对电

子来说)由德布罗意关系给出．1929年伊斯脱门(Estermann)和斯脱恩(Sternn)[1]证实氦原子和氢分子也按照德布罗意理论被衍射．他们的实验大大增强了我们对物质波普遍性的信念，因为它们涉及两种与电子十分不同的新的粒子．除了质量上的差别以外，氦原子与氢分子与电子不同之处还有：它们是明显的复合系统，而电子却(也许)是一个基本粒子．这样，这些实验显示了作为整体的原子和作为整体的分子都是波，现在我们也许会愿意相信在适当的实验条件下一架大钢琴也会表现得象一个波．

其后证明了很慢的中子在晶体点阵中出现了衍射，而且从这些观察结果出发，还发展出了一些技术，今天人们按常规方式使用这些技术来研究晶体和分子的结构[2]，作为X射线和电子衍射方法的补充．

二、周期性结构的衍射理论[3]

16 让我们来稍稍详细地考虑一下一维，二维或三维点阵的衍射．点阵是一种周期性结构，可把它想象为由一个晶胞的多次重复所构成．图16*A*—*C*说明了这一思想．对一维点阵，晶胞就是一个线段；对二维点阵是一平行四边形；对三维点阵则是一平行六面体．为简单起见，让我们想象原子(某种)位于晶胞的每个角上．从而点阵中所有原子的位置在线性点阵中由

$$\mathbf{x}=n_1\mathbf{e}_1 \tag{16a}$$

1) I. Estermann and O. Sternn, "Beugung von Molekularstrahlen", *Zeitschrift für Physik* **61**, 95 (1930).

2) D. P. Mitchell and P. N. Powers, "Bragg reflection of slow neutrons", *The Physical Review* **50**, 486 (1936). 亦见 E. O. Wollan and C. G. Shull, "Neutron diffraction and associated studies", *Nucleonics* **3**, 8 (1948).

3) 初读时可略去16～22节，但不要忘记看22节的照片．



图 16A　等间距原子的线性阵列

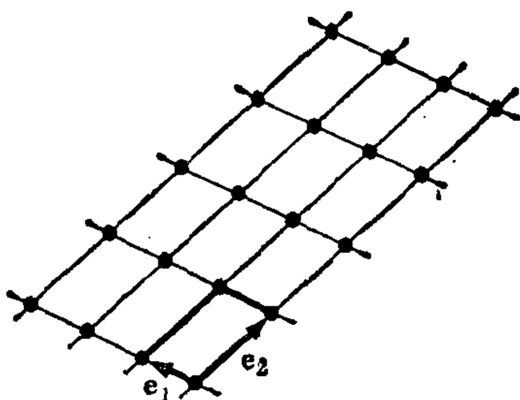


图 16B　二维点阵．晶胞由两个矢量 $\mathbf{e}_1$ 和 $\mathbf{e}_2$ 确定．在图中用粗线画出它的边．整个点阵由晶胞的一些重复构成．

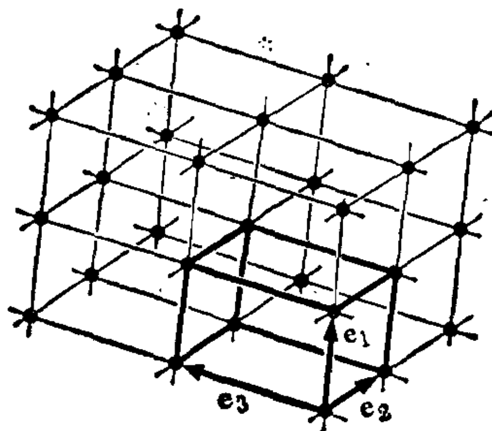


图 16C　三维点阵．也用粗线画出晶胞的边．任一阵点的位置矢是整数系数的矢量 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ 和 $\mathbf{e}_3$(这些矢量间不一定要垂直)的某种线性组合．

给出，在平面点阵中由

$$\mathbf{x}=n_1\mathbf{e}_1+n_2\mathbf{e}_2 \tag{16b}$$

给出，在三维点阵中则由

$$\mathbf{x}=n_1\mathbf{e}_1+n_2\mathbf{e}_2+n_3\mathbf{e}_3 \tag{16c}$$

给出．在这里，数 n_1, n_2, n_3 是整数，而矢量 $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ 和 $\mathbf{e}_3$ 确定了晶胞，如图 16A—C 所示．

在下文中我们将想象包含有限的但很大量的原子的点阵．为避免误解，让我们也明确声明，我们考虑的是嵌在三维空间中的一维，二维和三维阵列，而不是譬如说在二维世界中的二维点阵．

17　我们来考虑图 17A 所示的情况．一个波从位于点 $\mathbf{x}_i$ 的源发出．它被一列全同原子所衍射，而在点 $\mathbf{x}_0$ 观察衍射波或散射波．我们将假定阵列的中心(被一个原子所占据)在原点，而距离 $x_i=|\mathbf{x}_i|$ 和 $x_0=|\mathbf{x}_0|$ 比阵列的线度大得多．首先

考虑一维阵列的情况．十分相似的考虑适用于二维或三维散射阵列．

从源经过原点到观察者的路径长度为 $s_0=x_i+x_0$．让 $s(n_1)$ 代表从源经过其位置根据公式(16a)由整数 n_1 描写的原子到达观察者的路径长度．这样就有

$$s(n_1)=|\mathbf{x}_i-n_1\mathbf{e}_1|+|\mathbf{x}_0-n_1\mathbf{e}_1| \tag{17a}$$

来自不同原子的到达观察者的波互相干涉，合成波的振幅为来自每个原子的波的振幅之和．对于衍射极大，所有的波到达时必须彼此同相，否则来自不同原子的波将相消．与此相应的条件是对每个原子，即对每个整数 n_1，其程差 $s(n_1)-s_0$ 必须是波长 λ 的整数倍．

既然我们假定阵列的线度比它到达源和到观察者的距离

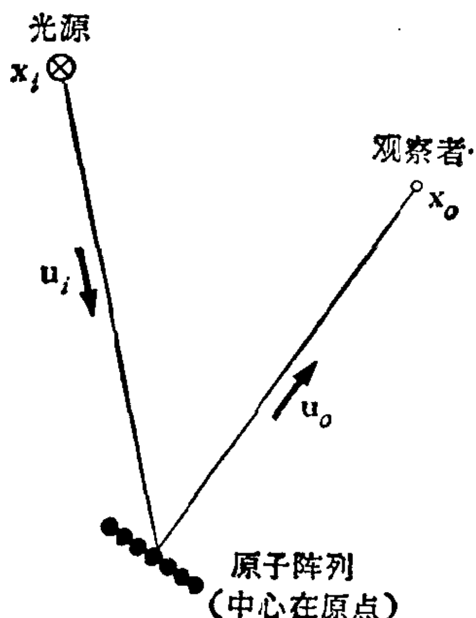


图 17*A* 线性阵列的衍射(为说明 17 节的讨论)．正文中假定从阵列到源及到观察者的距离远比阵列的线度为大．阵列本身包含有限但很大量的原子．

单位矢量 $\mathbf{u}_i$ 指向入射方向，而单位矢量 $\mathbf{u}_0$ 指向散射束方向．

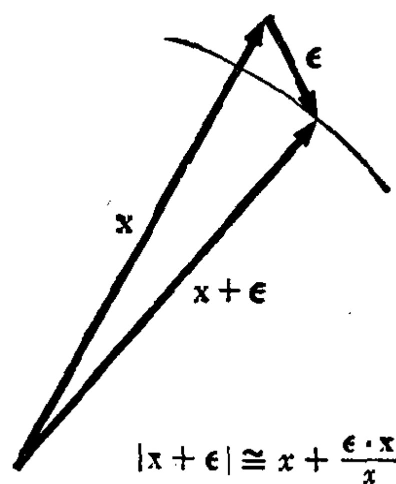


图 17*B* 说明一个重要近似式，它是物理学讨论中经常用的．如果矢量 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 的长度比矢量 $\mathbf{x}$ 小得多，则此矢量 $\mathbf{x}$ 几乎与矢量 $\mathbf{x}+\boldsymbol{\varepsilon}$ 平行．后一个矢量的长度近似地等于 $\mathbf{x}$ 的长度加上矢量 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 在 $\mathbf{x}$ 方向上的投影．

小得多，矢量 $n_1\mathbf{e}_1$ 就得比矢量 $\mathbf{x}_i$ 和 $\mathbf{x}_0$ 小得多．于是对于等式(17a)右边的两个距离就可写出近似表式，即

$$|\mathbf{x}_i - n_1\mathbf{e}_1| \cong x_i - n_1 \frac{|\mathbf{x}_i \cdot \mathbf{e}_1|}{x_i} \tag{17b}$$

$$|\mathbf{x}_0 - n_1\mathbf{e}_1| \cong x_0 - n_1 \frac{|\mathbf{x}_0 \cdot \mathbf{e}_1|}{x_0} \tag{17c}$$

从图 17*b* 立刻可看出此近似表示式的几何意义．

路程差为：

$$s(n_1) - s_0 \cong -n_1\mathbf{e}_1 \cdot \left(\frac{\mathbf{x}_i}{x_i} + \frac{\mathbf{x}_0}{x_0}\right) \tag{17d}$$

18 设 $\mathbf{u}_i$ 是入射束方向上的单位矢量，并设 $\mathbf{u}_0$ 是指向衍射束方向的单位矢量．于是有

$$\mathbf{u}_i = -\frac{\mathbf{x}_i}{x_i}, \quad \mathbf{u}_0 = \frac{\mathbf{x}_0}{x_0} \tag{18a}$$

如果让(17d)中的 x_i 和 x_0 趋向无穷大，得

$$s(n_1) - s_0 = n_1\mathbf{e}_1 \cdot (\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_0) \tag{18b}$$

从而衍射极大的条件成为

$$\frac{n_1\mathbf{e}_1 \cdot (\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_0)}{\lambda} = n_1' \tag{18c}$$

其中，在 n_1 为每个任意选取的整数时，n_1' 都必须是整数．显然其必要而充分的条件是

$$\frac{\mathbf{e}_1 \cdot (\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_0)}{\lambda} = m_1 \tag{18d}$$

这里 m_1 是整数．这一点是我们可以立刻断言的．当而且仅当来自相邻原子的波同相地到达时，来自任一对原子的波才会是同相地到达的，而这正是条件(18d)所表示的．

利用德布罗意关系我们可将(18d)重写成在物理上引起兴趣的如下形式．设 $\mathbf{p}_i$ 为入射动量，并设 $\mathbf{p}_0$ 是散射束中的动量．于是有

$$\frac{\mathbf{u}_i}{\lambda}=\frac{\mathbf{p}_i}{h},\quad \frac{\mathbf{u}_0}{\lambda}=\frac{\mathbf{p}_0}{h} \tag{18e}$$

而条件(18d)可以写成

$$\mathbf{e}_1(\mathbf{p}_i-\mathbf{p}_0)=\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{q}=m_1h \tag{18f}$$

这里 $\mathbf{q}=\mathbf{p}_i-\mathbf{p}_0$ 是转移给阵列的动量．因而对于一维阵列，衍射极大的条件为动量转移 $\mathbf{q}$ 和矢量 $\mathbf{e}_1$ 的标积必须是 h 的整数倍，即在阵列方向上的动量转移是"量子化的"．

19 在我们的讨论中已经暗中假定了散射过程是弹性的，其意义是散射粒子的能量(或频率)和入射能量(或频率)相同．这就意味着有另一条件，即入射动量的大小和散射动量的大小相等．从而衍射极大的位置由两个条件

$$\mathbf{e}_1\cdot(\mathbf{p}_i-\mathbf{p}_0)=\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{q}=m_1h \tag{19a}$$

和

$$|\mathbf{p}_i|=|\mathbf{p}_0| \tag{19b}$$

决定，其中 m_1 为任意整数．

对于无限阵列，散射动量必须严格满足条件(19a)和(19b)．对于有限阵列我们也在由上述条件所限定的方向以外观察到某些散射．衍射极大(作为角度的函数)的尖锐度依赖于阵列中原子的数目．我们假定(原子)数目很大，因此散射粒子出射在由(19a)和(19b)给定的十分确定的方向．这些等式确定了一组圆锥，各与每个整数 m_1 相应．当然，这些整数服从约束条件

$$|m_1|\leqslant 2|\mathbf{e}_1||\mathbf{p}_i|/h \tag{19c}$$

因为动量转移不可能超过入射动量的二倍．

20 我们很容易得到对于二维阵列衍射极大的相应条件．条件(19a)必须在每个点阵方向上成立，即对每条包含多于一个原子的直线上成立．特别是它必须对每个晶胞的边成立，从而我们有条件

$$\mathbf{e}_1\cdot(\mathbf{p}_i-\mathbf{p}_0)=m_1h,\quad \mathbf{e}_2\cdot(\mathbf{p}_i-\mathbf{p}_0)=m_2h \tag{20a}$$

$$|\mathbf{p}_i| = |\mathbf{p}_0| \tag{20b}$$

其中 m_1 和 m_2 为任意整数．我们又可以说在点阵平面上的动量转移是“量子化的”．为更清楚显示这一点，让我们在 $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ 平面上用条件

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1\cdot\mathbf{q}_1 = h, \quad \mathbf{e}_2\cdot\mathbf{q}_1 = 0 \\ \mathbf{e}_1\cdot\mathbf{q}_2 = 0, \quad \mathbf{e}_2\cdot\mathbf{q}_2 = h \end{aligned} \tag{20c}$$

来定义两个矢量 $\mathbf{q}_1$ 和 $\mathbf{q}_2$.

这些方程总是有唯一解．注意矢量 $\mathbf{q}_1$ 和 $\mathbf{q}_2$ 一般并不与矢量 $\mathbf{e}_1$ 和 $\mathbf{e}_2$ 同方向，除非点阵是矩形的.

这样，条件(20a)就成为

$$\mathbf{q} = \mathbf{p}_i - \mathbf{p}_0 = m_1\mathbf{q}_1 + m_2\mathbf{q}_2 + \mathbf{q}^* \tag{20d}$$

其中 m_1 和 m_2 为任意整数，而矢量 $\mathbf{q}^*$ 为垂直于点阵平面的任意矢量．在点阵平面上的动量转移是量子化的，但其垂直分量却不是．它的大小由条件(20b)决定，该式表示散射是弹

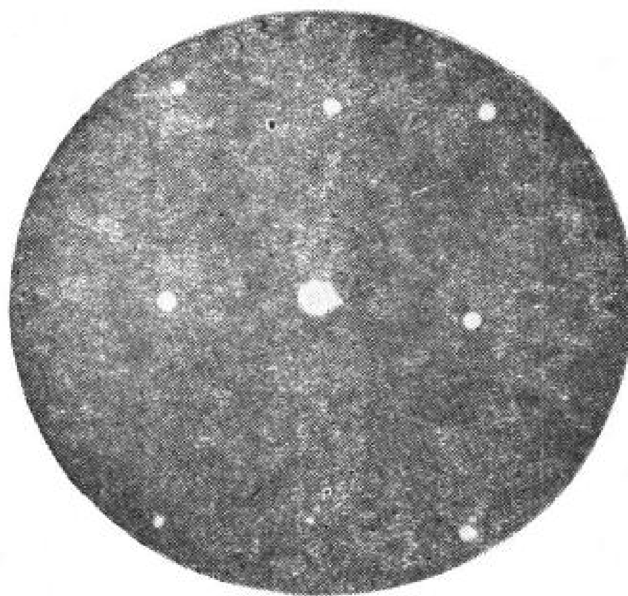


图 20A　本图表示从镍晶体面上向后散射的电子的衍射花样．电子垂直地入射到晶体表面上，其能量为 76 电子伏．这是我们的二维点阵衍射理论适用的典型情况.

性的．因此只要入射动量不是太小(即只要波长不是太大)，我们就能找到方程(20a)和(20b)的一些解．在这个情况下衍射束在许多轮廓鲜明的分立方向，而不是象一维阵列的情况那样沿着锥面射出．

在戴维孙和革末的实验中低能电子不显著地透过晶体．衍射是由在表面层的原子所引起，因而二维点阵理论适用．

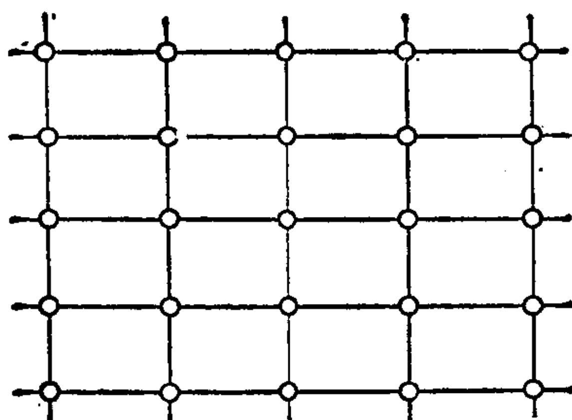


图 20*B* 本图表示晶体这个特定面的平面对称性．我们可以想象小圆圈代表表面层的镍原子．衍射花样显出同样的矩形对称．向读者提一个问题：图 20*A*，*B* 相互取向是否正确，抑或图 *B* 应是曾旋转过 90° 的?

21 对于三维阵列我们有

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_1\cdot(\mathbf{p}_i-\mathbf{p}_0)&=m_1h\\ \mathbf{e}_2\cdot(\mathbf{p}_i-\mathbf{p}_0)&=m_2h\\ \mathbf{e}_3\cdot(\mathbf{p}_i-\mathbf{p}_0)&=m_3h\end{aligned}\tag{21a}$$

$$|\mathbf{p}_i|=|\mathbf{p}_0|\tag{21b}$$

其中 m_1, m_2, m_3 为任意整数．与上节类似，让我们用下列条件定义三个矢量 $\mathbf{q}_1$, $\mathbf{q}_2$ 和 $\mathbf{q}_3$:

$$\begin{aligned}&\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{q}_1=h,\ \mathbf{e}_2\cdot\mathbf{q}_1=0,\ \mathbf{e}_3\cdot\mathbf{q}_1=0\\ &\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{q}_2=0,\ \mathbf{e}_2\cdot\mathbf{q}_2=h,\ \mathbf{e}_3\cdot\mathbf{q}_2=0\\ &\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{q}_3=0,\ \mathbf{e}_2\cdot\mathbf{q}_3=0,\ \mathbf{e}_3\cdot\mathbf{q}_3=h\end{aligned}\tag{21c}$$

这些方程总是有唯一解. 这样我们就可以把条件(21a)写成这种形式:

$$\mathbf{q}=\mathbf{p}_i-\mathbf{p}_0=m_1\mathbf{q}_1+m_2\mathbf{q}_2+m_3\mathbf{q}_3 \tag{21d}$$

动量转移 $\mathbf{q}$ 是这样"量子化"的, 即它必须是由点阵的几何结构决定的三条矢量 $\mathbf{q}_1$, $\mathbf{q}_2$ 和 $\mathbf{q}_3$ 的带整系数的线性组合. 如果对方程(21d)略加思索, 我们注意到动量转移的可能值在动量空间形成一个点阵. 这个点阵称为该晶体的*倒易点阵*.

对于任意的入射动量一般不可能使方程(21d)和(21b)都得到满足. 方程(21a)和(21b)在一起构成四个方程决定最终动量 $\mathbf{p}_0$ 的三个分量. 只有当晶体恰好取向适当时, 才存在一个解.

22 假定现在我们用一个包含大量混乱取向微晶体的样品做衍射实验. 于是总会有某些微晶体在样品中这样取向, 以至能满足(至少近似地)条件(21a)和(21b). 对这样的样品就有衍射极大的两个条件, 即

$$|\mathbf{p}_i-\mathbf{p}_0|=|m_1\mathbf{q}_1+m_2\mathbf{q}_2+m_3\mathbf{q}_3| \tag{22a}$$

$$|\mathbf{p}_i|=|\mathbf{p}_0| \tag{22b}$$

其中 m_1, m_2 和 m_3 为任意整数, 而 $\mathbf{q}_1$, $\mathbf{q}_2$ 和 $\mathbf{q}_3$ 为前节中对晶体的某些特殊取向讨论过的矢量. 上述方程的确是有解的, 因而我们见到衍射束沿着以入射方向为中心的一系列圆锥面射出.

图 14*A* 表示基于上述理论的衍射实验是如何完成的. 在X射线工作中样品经常是包含许多微晶体的少量粉末. 此即获得照片 14*C* 的方法. 软片条上的线条是圆锥[由条件(22a)和(22b)所规定]和软片条的交线.

我们很容易理解, 如果样品太小, 就是说它不包含足够多的晶体, 那末衍射束沿圆锥的分布将很不均匀. 我们在照相板上将看不见连续的圆环, 而是只看见一些分立的点. 这一

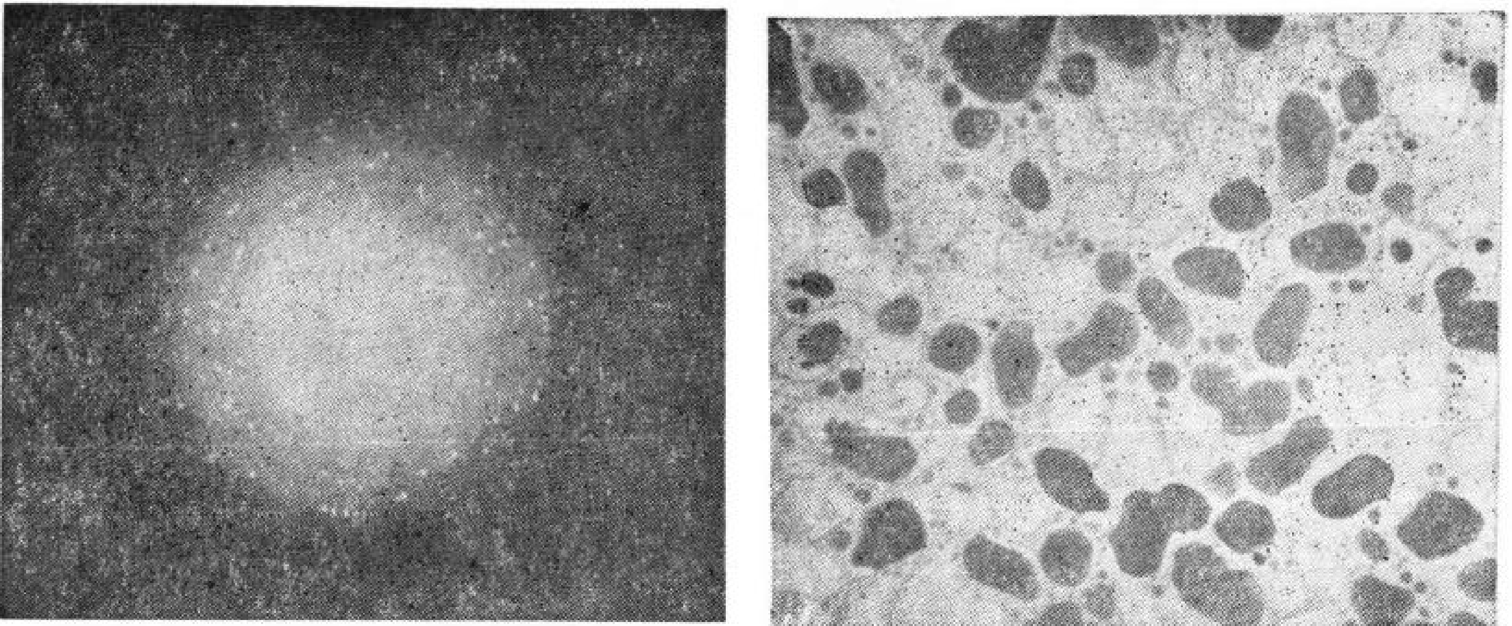
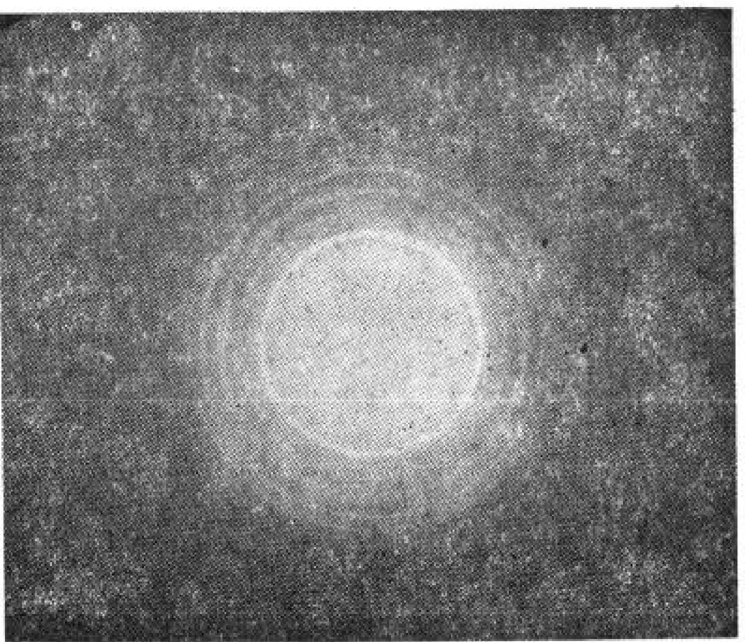


图 22A—B　左面的照片显示了用在图 14A 中说明的方法得到的电子衍射环．和照片 14B 中一样，样品由淀积在一氧化硅薄膜上的小白锡晶体所组成．右面的照片显示样品在电子显微镜下呈现的面貌(8 毫米相当 1000 埃)．黑点是晶体的象(其黑度依赖于他们的取向)．最淡的点是曾由晶体占据而在制备样品时消失的 SiO 中的坑．晶体的平均线度约 600 埃．

在拍摄衍射照片时将电子束限制在样品的较小范围内．考虑到 22 节的理论我们期待看见一些个别的点，如同照片所确实显示的，而不是形状完整的环．



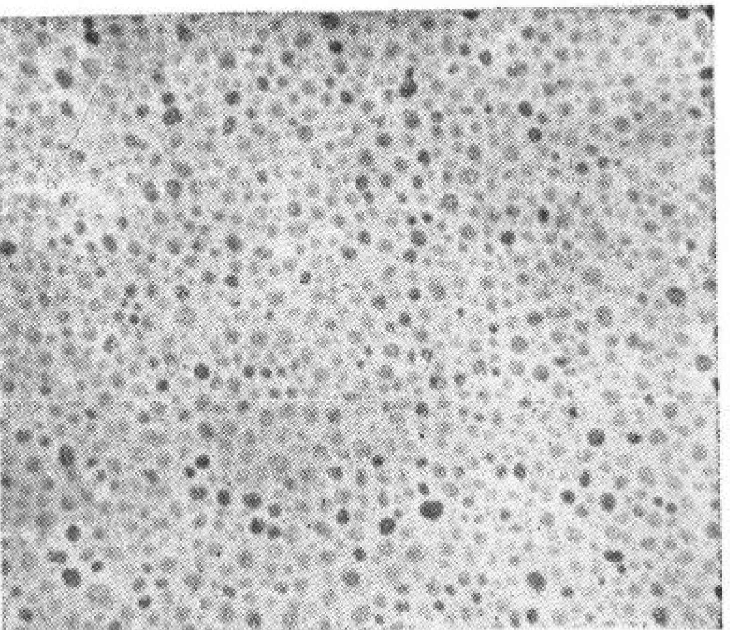


图 22*C*—*D*　此两帧照片是用照片 22*A*—*B* 同样的方法拍摄的. 此处样品由更小的晶体(平均线度约200 埃)组成,衍射花样由更大量的晶体产生. 环更完整了,尽管仍能看到个别的点. 应将照片 22*A* 和 22*C* 与照片 14*B* 比较, 在那里不再看到个别的点. 后一照片用横过薄膜的更大区域的电子束得到. 因此我们期待看到一更完整的环状花样,因为晶体的所有取向在样品中都得到了很好的体现.

图 14*B*,22*A* 和 22*C* 中,电子能量是 100 千电子伏,这相当于约 0.04 埃的波长.

效应很漂亮地在照片 $22A$ 和 $22C$ 中显示出来．这些照片(它应与照片 $14B$ 比较)显示了锡晶体对 100 千电子伏的电子的衍射．在这个情况下电子波完全透过了小晶体．用一架电子显微镜作为衍射装置．同一架电子显微镜拍摄的照片 $22B$ 和 $22D$ 显示了样品的面貌．

三、只有一个普朗克常数

23 上面的小标题也许会使读者惊奇．按照定义，当然只有一个普朗克常数．作者究竟想从这一平凡的事实中引出什么深刻的结论呢？

完全不平凡之点是，在物理学中我们根本不需要多于一个"普朗克型常数"．试考虑写成下列形式的德布罗意关系：

$$h=\lambda p \tag{23a}$$

其中 p 是粒子的动量，λ 是它的德布罗意波长．p 和 λ 都是可独立测量的量，而测量任意一对相应的变量 (p, λ) 我们就能决定普朗克常数 h．一个惊人的经验事实是不论观察何种粒子，我们总是得到同一个 h 值，情况如此确不平凡．

读者对此也许印象并不深刻．我们毕竟能在几个非常简单的概念的基础上导出这一关系．然而让我们考察一下我们的推导的前提．

24 在第 3—5 节的讨论中我们曾假定每个实物粒子都与一个波相联系，其方式为波的群速度等于粒子的速度．我们还进一步假定粒子-波的描述满足狭义相对论原理，这就是说，波的波矢和频率同粒子的能量和动量之间的关系在所有惯性系中必须相同．在这一基础上我们得出结论

$$E=\hbar\omega, \quad \mathbf{p}=\hbar\mathbf{k} \tag{24a}$$

其中 E 是能量，$\mathbf{p}$ 是动量，ω 是频率，$\mathbf{k}$ 是波矢，$\hbar$ 为由以静止能量 E_0 和"静止频率"ω_0 表征的关系

$$E_0 = mc^2 = \hbar\omega_0 \tag{24b}$$

所定义的常数.

我们怎么断定常数 $\hbar$ 实际上就是普朗克常数?是猜的.关系 $E=\hbar\omega$ 对光子成立，因此试图猜想它对实物粒子也成立.但关键之点正是:(24a)中的第一个关系式对所有的实物粒子真的都成立吗?

因而我们在第 3—5 节所真正导得的能量，动量，频率和波矢间的关系是

$$E = C\omega, \quad \mathbf{p} = C\mathbf{k} \tag{24c}$$

其中 C 是表征粒子特性的常数,此常数,举例来说,由

$$C = \frac{E_0}{\omega_0} \tag{24d}$$

定义.

但是没有理由认为 C 对所有粒子必须是同一常数. 我们的世界也许是各色各样的，我们也许从实验上会发现对光子 $C=\hbar$,对电子 $C=7\hbar$, 对质子 $C=17\hbar$, 更有甚者,我们也许会发现虽然电子和质子同德布罗意波相联系，却没有物质波与中子相联系!

25 幸运的是可得到的实验材料看来都排除了“普朗克型常数”C 对不同种类的粒子不相同这一可怕的可能性. 我们说“幸运的”,因为我们现代的漂亮的量子力学表述决定于 $C=\hbar$ 这一常数是不依赖于粒子种类的普适常数这一必不可少的假定. 如果情形不是这样，则基本粒子及其相互作用的理论势必完全改观.

对于各种粒子 $C=\hbar$ 这一假设在实验上究竟证实得怎么样?与戴维孙-革末实验或汤姆孙实验相类似的直接实验只对几种粒子做过. 这些实验很容易解释为对关系 $h=\lambda p$ 的测试，但它们自然只具有有限的精确度. 它们支持我们对关系

(24a)的普适性的信念，但我们对这些关系的信念的真正基础是量子力学的普遍成功．有大量的实验证据间接支持关系(24a)．这一证据的解释并不总是象电子在晶体上衍射的情况那样简单和明确，但总的来说是非常令人信服的．我们对关系(24a)严格正确的信念有些类似于我们对关系 $E_0=mc^2$ 也严格正确的信念．对后一关系的直接论证是相当有力的，但关于狭义相对论概念普遍有效的间接证据的总和，才是真正使我们信服的理由．在我们的实验材料中没有丝毫迹象显示关系(24a)或关系式 $E_0=mc^2$ 可能只是近似正确．我们假定它们严格正确，而且我们把它们看作物理学理论的基石．

让我们回顾一下第二章第12节中的讨论．我们曾论证，鉴于常数 c 和 $\hbar$ 在相对论量子力学中所起的基本作用，人们很可以选择一个令 $\hbar=c=1$ 的单位制．如果对每个粒子有不同的普朗克型常数，这样的单位制显然将没有多大意义．既然我们相信只有一个这样的常数，这就是说，例如，质量，能量和频率总是以同一方式联系起来，因而我们可以把"质量"，"能量"和"频率"这些词看作同一事物的不同名称[1)2)]．

26 用关系(24a)的观点我们可以重述在碰撞过程中成立的能量和动量守恒定律．

从一般意义上来理解，一个碰撞事件可以描述如下．在

1) 作者倾向于把"质量"一词仅用作表示一孤立体系的"静止质量"(即静止能量除以 c^2)．根据这一用法，"粒子的质量，"不论其运动与否，都是指粒子的静止质量．其他作者谈到粒子的"质量"时，往往指的是总能量除以 c^2．

2) 读者可能问，声波是否也遵循关系式(24a)．实际声波也遵循(24a)，我们称声波的"粒子"为声子．声波的能量，例如在固体中，按大小为 $\hbar\omega$ 的"包"出现，其中 ω 为频率．

我们并不把声子当作基本粒子，因为我们完全可以用固体中的"真正"粒子来说明它们．弹性波是电子与核的集体运动．然而，用对待其它粒子的方法来看待声子，常是有用的．反过来，对一些"真正"的粒子看成似乎它们就是"以太中的声波"也有时有用．

开始时刻存在若干粒子，它们运动的方式是使得彼此分得很开．设它们的动量是 $\mathbf{p}_1'$, $\mathbf{p}_2'$, …, $\mathbf{p}_i'$，能量是 E_1', E_2', …, E_i'. 当我们说粒子起初彼此“分得很开”时，意思就是粒子起初这样运动着，其间的相互作用在开始时实际上不存在．如果我们假定当粒子间距离增加时粒子间的力很快趋向于零，则上述概念是有意义的．因而开始时每个粒子如同别的粒子不存在时那样的运动着．随着时间的推移，粒子会集中于一个“碰撞区域”，于是粒子间的作用力就起作用了．相互作用发生了，而在这一过程中粒子被偏转．更进一步，某些粒子可能会被毁灭，而且还有可能会产生新的粒子．

如果我们等待足够长的时间，卷入碰撞事件的粒子将再次散开，粒子间的相互作用实际上将停止，理由很简单，就是它们已不再彼此靠近．在此后的某一时刻每个粒子将如同其他粒子不存在时那样运动．设碰撞事件后的粒子动量为 $\mathbf{p}_1''$, $\mathbf{p}_2''$, …, $\mathbf{p}_j''$，能量为 E_1'', E_2'', …, E_j''.

守恒定律就成为

$$\sum_{r=1}^{i} E_r' = \sum_{s=1}^{j} E_s'', \quad \sum_{r=1}^{i} \mathbf{p}_r' = \sum_{s=1}^{j} \mathbf{p}_s'' \tag{26a}$$

总的初始能量等于总的最终能量，总的初始动量等于总的最终动量．在“碰撞前”和“碰撞后”粒子间实际上没有相互作用这一条件是必不可少的；因为否则总能量将不等于各个粒子能量之和．如果粒子间确实彼此有相互作用，我们必须把“相互作用能”包括在总能量的表示式中．

读者应注意这些粒子并非必须是基本粒子；它们也不妨是复合粒子，象原子或核那样．当我们讨论碰撞事件时，“粒子”的意义是任一相当稳定的物体，因此只要它与其他相似的物体分得很开时就可给它指定动量，能量和(静止)质量．作为一个例子我们可以考虑在一个中性氦原子和一个电子之间

的碰撞．假定在碰撞中氦原子被电离．这样就有两个初始粒子，即电子和中性氦原子．有三个最终粒子，即两个电子和一个带单一电荷的氦离子．（当然这不是碰撞事件的唯一可能结果． 在事件中氦可以把它两个电子都失去，也可一个也不失去．而且，此事件还可导致发射一个或几个光子．）

27 如果我们现在承认由于关系(24a)，有一个频率和一个波矢与每一个初始粒子和最终粒子相联系，我们就可把守恒定律重写为下列形式：

$$\sum_{r=1}^{i}\omega'_r=\sum_{s=1}^{f}\omega''_s,\quad \sum_{r=1}^{i}\mathbf{k}'_r=\sum_{s=1}^{f}\mathbf{k}''_s \tag{27a}$$

初始频率之和等于最终频率之和，初始波矢之和等于最终波矢之和． 这些守恒定律完全与守恒定律(26a)等价． 任一组定律可推导出另一组定律．之所以如此是因为只有一个普朗克常数[1]．

四、物质波会分裂吗？

28 在前一章我们讨论了光子能不能"分裂"的意义．我们现在来对物质波进行同样的讨论． 这可以相当简短，因为物质波的行为和光子的行为十分类似．在这一方面自然界是简单的．

为明确起见我们现在来讨论电子，但我们的结果是完全普遍的，同样很好地适用于任何别的粒子．

在前一章我们断言，我们不能用光电池探测到一个只携

1) 对于具有量子力学高深知识的读者：似乎可以在物理空间均匀性基础上独立地导出关系(27a)．只要我们接受量子力学所特有的某些概念，的确可以给出这样的推导．另一方面，显然没有一个纯粹的逻辑论证可以告诉我们，若已知电子具有波性，就存在与质子相联系的德布罗意波．同样地，纯逻辑不能告诉我们常数C对所有粒子必须相同． 动量和波矢有独立的运算上的定义，它们不必一定以德布罗意关系相联系．

带能量 $\hbar\omega$ 的一部分的"部分光子"，在此意义上讲，频率为 ω 的单色光子是不能被分裂的. 在类似的意义上电子也不能分裂，因为从没有人探测到一个"部分电子".

29 让我们考虑电子衍射实验，示意如图 29A. 入射到晶体表面的电子束有十分确定的动量. 反射电子由四个计数器 C_1 到 C_4 探测，而且我们想象计数器 C_1 和 C_4 位于不同的衍射极大上，而 C_2 和 C_3 则位于衍射极小上.

第一个要注意的事实是在实验上直到入射通量趋近于零时每个计数器的计数速率保持与电子的入射通量成正比. 这一情况排除了任何关于观察到的衍射现象是包含大量电子的集体效应的解释：实际上显示波行为的是每个个别电子. 为使论点清楚，我们可以假定在计数器 C_1 和 C_4 中计数速率相等，而在计数器 C_2 和 C_3 中计数速率为零.

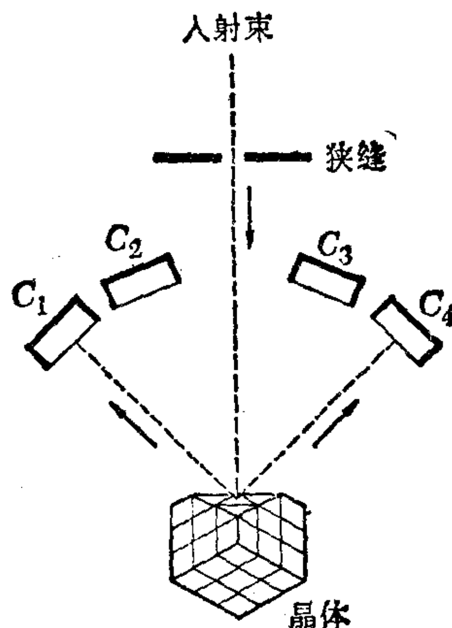


图 29A 表示观察来自晶体表面不同方向上电子衍射装置的示意图(说明 29 节的讨论). 既然入射波被晶体"分裂"了，我们会在计数器 C_1 中发现半个电子吗?

假定现在我们把一个电子看作一个经典的波包. 这样我们就预期这个波在晶体上反射时"分裂"了：一部分波沿着计数器 C_1 的方向反射，一部分沿着计数器 C_4 的方向反射，但沿计数器 C_2 和 C_3 方向没有反射. 既然原来的入射波包这样被"分裂"，我们将预期这种"分裂"以某种方式表现出来. 举例来说：朝计数器 C_1 反射的"那部分"所携带的能量是入射电子能量的一部分. 然而，这与实验上所发现的不一致，就象

我们可从戴维孙自己的说明中回想起的那样：反射电子携带了入射电子的全部能量．如果计数器探测到一个电子，那末所探测到的就是整个电子，具有完整的电子电量和电子质量．我们说过从来没有人曾经见过三分之一个电子．电子具有波性，但它们绝对肯定不是经典波：不能象对经典波包那样将电子波包分裂．

30 读者也许对“经典波”的性质没有什么固定的见解，因此关于电子不是经典波的声明也许显得有些无特色．这里我们想到的是在一给定时刻，在空间的一给定点，对于一个经典波，波振幅的绝对值平方代表一个物理量，例如电荷密度或能量密度．这一概念与经典电磁理论中电场和磁场的平方代表能量密度的概念相类似．

例如，假定波振幅的平方正比于电荷密度．于是我们就能计算进入到计数器之一的电荷通量，既然波“被分到”计数器 C_1 和 C_4 中，我们将预期在计数器 C_1 中只发现一半电子的电荷．这在平均上可能是对的：如果我们用很大量的电子作衍射实验，进入计数器 C_1 的电荷流可能确为总入射电荷流的一半[1]．然而，每个单个电子不是被计数器 C_1，就是被计数器 C_4 所探测到：一个单个电子的电荷不会分裂．

按照量子力学的精神，我们把所发生的情形描述如下．入射电子波被晶体分为两部分．一部分波沿计数器 C_1 方向传播，另一部分沿计数器 C_4 方向传播．在给定方向的波强度正比于波振幅的绝对值平方．在量子力学中强度有一几率解释：取决于幅度二次方的量总是代表某事件发生的几率．经典地计算出的进入计数器之一的通量正比于计数器计数的几率．

1) 这在实际上可能是不正确的，但为了论证起见，我们可以假定每个入射电子不是进入计数器 C_1，就是进入计数器 C_4．

这一强度的几率解释是量子力学的显著特征，而且与经典波动理论的精神显然相反.

31 和我们在第四章第47节的讨论相类似，读者应考虑一假想的实验，其装置如图29A，但计数器放得离晶体非常远，譬如说一光年. 假如计数器C_1探测到一个电子. 在经典波动理论的基础上又将难以理解，波所携带的一些物理量，诸如电荷，能量和质量等，先前已被散布在空间的巨大区域中，后来又怎么能够突然集中到计数器C_1. 采用量子力学的几率解释这一困难就消失了：我们能以前后一致的方式描述所发生的事情.

32 我们已说过在图29A所示的衍射实验中波被分为二个(或几个)“部分”. 读者可以接着问道：可以使沿计数器C_1方向传播的波与沿计数器C_4方向传播的波相干涉吗？如果一电磁波被一半镀银的镜子所分开，则两个“部分”肯定能相互干涉，而我们对德布罗意波也期待有同样的行为. 换句话说，如果我们用某种方法让沿计数器C_4方向传播的波偏转，并将它与沿计数器C_1方向传播的波“混合”，那末我们会看到干涉效应吗？

答案是我们肯定会看到干涉效应. 另一方面必须承认在实践上严格地按所述办法用电子完成这一实验将是非常困难的. 幸运的是我们不必去做这个实验，因为我们既然能用晶体观察到电子衍射，这一事实本身就是干涉效应存在的确证. 当被入射波“照射”时，晶体表面的每个原子引起一衍射波，而所有这些衍射波组合起来产生了我们用晶体观察到的总的干涉花样. 许多个别原子所衍射的波“组合起来”是什么意思？我们如何描写这一“组合”？我们描述它的方法是：把所有分波的振幅相加以得到从晶体发出的波的总振幅. 用量子力学观点来理解，此合振幅的平方是一强度变量，它描写探测器的

响应.

33 在第四章第 39—42 节中，我们讨论了用光子做的双缝衍射实验．假如我们用电子来做同样的实验．装置示意如图 33A．除文字外，此图与第四章图 39A 全同．分析也相同，在跟离远大于双缝间隔处观察到的强度 $I(r,\ \theta)$ 由下式给出:

$$I(r,\ \theta)=4I_0(r,\ \theta)\cos^2\left(\frac{2\pi a}{\lambda}\sin\theta\right) \tag{33a}$$

其中 $I_0(r,\ \theta)$ 为只有一个缝开启时观察到的强度.

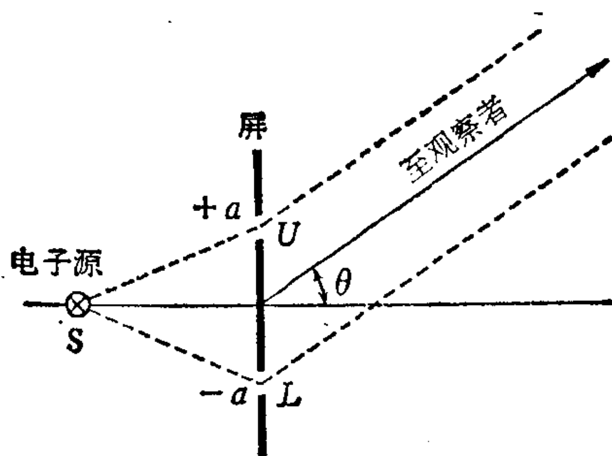


图 33A　电子双缝衍射的假想实验．除用电子源代替光源 S 以外，此图与第四章图 39A 相同.

强度对角度 θ 的关系可用计数器来决定，当用一束电子来做实验时，强度就与计数速率成正比.

已曾作过与此过分简化的假想实验完全类似的实验，从结果可断言，式(33a)的预见是正确的[1].

34 如果我们要看干涉效应必须将两个缝都开启，于是每个

1) G. Möllenstedt and H. Düker, "Beobachtungen und Messungen an Biprisma-Interferenzen mit Elektronenwellen", *Zeitschrift für Physik* **145**, 377 (1956)．也见 R. G. Chambers, "Shift of an electron interference pattern by enclosed magnetic flux," *Physical Review Letters* **5**, 3 (1960)．这后一篇文章报告了一个很有趣的效应，我们在本书中将不讨论此效应，读者也许需要独立地去研究它.

电子必须通过两个缝. 如果我们要确定电子只通过两缝之一,我们必须关闭另一个缝,但这样一来我们当然看不见双缝衍射花样了. 如果我们想用紧靠缝后放一计数器的办法来发现电子通过哪一个缝, 我们也将破坏干涉花样. 在两个计数器中观察到的计数率将是相同的. 对每一入射到屏上的电子,只有一个计数器会动作,而这样测得的电子将携带入射电子的全部电荷和全部能量. 我们不能预先说哪个计数器会动作, 但我们可以通过找出透过缝的波强度来计算并预期记数的几率.

读者应回顾第四章第 48 节的讨论,在那里我们证明双缝花样与光子究竟通过哪个缝的知识是不相容的. 同样的论证也适用于电子. 没有一个巧妙的装置,能使我们决定电子通过哪个缝而又不干扰双缝的花样.

35 让我们的语言稍稍紧凑一些. 当我们讨论德布罗意波的发现时说到“与粒子相联系的波”. 这是拙劣的语言, 因为听起来它好象我们将有一个和某种形式的波一起传播的经典微粒. 有些人喜欢把德布罗意波叫做“引导波”或“导波”,但这一术语也不适当. 德布罗意波并非与一个经典微粒一起传播或“引导”它的波. 德布罗意波和粒子是同一回事,并无其他. 自然界中发现的实在粒子具有波性, 这是事实. 如果我们要强调这一事实我们可以讲到电子的德布罗意波, 但这个词其实是“电子”的同义词. 我们对前此的拙劣语言的辩解是我们的讨论起先是暂时性的, 也是历史上的, 因而“与一粒子相联系的波”这一慎重的用语是有理由的. 现在表达得更精确和更确定的时刻已经到来, 我们应摒弃可能把我们思想引入歧途的术语.

再来考虑双缝实验. 在此实验中没有什么东西使我们联想到有一个经典微粒通过一个缝, 并且它由通过两个缝的波

所"引导". 说得更好一些是：如果我们想引入这一概念，则我们对于所发生事情的描述决不会得到改善. 只讨论波，加上强度即为几率的量子力学解释，就很够了. 任何关于"隐藏的"微粒的说法都是形而上学的，除非微粒存在的假设有某种确定的实验后果是不能只在量子力学的波动理论基础上预见到的. 现在不知道有任何这样的实验情况，根据这一观点我们必须坚决摒弃所有关于由波引导的经典微粒的心理印象.

五、波动方程和迭加原理

36 我们现在想要提出一些论点，支持一个叫克莱因-戈登(Klein-Gordon)方程的微分方程，用这个方程，我们可以描写物质波在空的空间传播.

我们最重要的假定是，描写质量为m的单个粒子的波动方程将是线性微分方程. 其意义是该方程的解满足迭加原理：方程的两个解的任意线性组合仍是方程的解. 再有，我们假定满足某些适当条件的方程的每个解代表一可能的物理情况，至少原则上是这样. 这些假定的物理含意是深远的. 物质波的振幅可以相加，正象电磁波的振幅那样.（麦克斯韦方程组也是线性微分方程.）

读者应注意到在我们关于物质波被晶体表面的原子或双缝衍射的讨论中，已暗中假定了线性. 从而，举例来说，我们曾经把从两个缝发出的波的振幅加起来以得到合振幅. 这里我们把这一步骤提高为物理学的普遍原理.

37 现在让我们来寻找一个为所有描写质量为m的粒子的物质波所满足的微分方程. 我们的步骤如下. 首先寻找一个为所有平面波所满足的微分方程. 平面波的形式为

$$\psi(\mathbf{x};\ t;\ \mathbf{p})=\exp(i\mathbf{x}\cdot\mathbf{p}-i\omega t) \tag{37a}$$

我们采用使$\hbar=c=1$的单位制，而且我们用$\mathbf{p}$表示动量

(=波矢)，用ω表示能量(=频率). 每个这样的平面波由动量$\mathbf{p}$决定(除了一个确定波振幅的常数因子外). 我们试图写出一个其中不显含$\mathbf{p}$的并为任一个平面波所满足的线性微分方程. 既然它是线性的，则此微分方程将被平面波的每一线性组合所满足，因而我们将论证，描写质量为m的粒子的每一德布罗意波将满足这个微分方程.

能量ω和动量$\mathbf{p}$的关系为[1)]

$$\omega^2-\mathbf{p}^2=m^2 \tag{37b}$$

因为粒子的质量为m.

如果我们将波函数对时间t微商两次，得

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi(\mathbf{x},\ t;\ \mathbf{p})=-\omega^2\psi(\mathbf{x},\ t;\ \mathbf{p}) \tag{37c}$$

如果我们将波函数对坐标x_1微商两次，得

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\psi(\mathbf{x},\ t;\ \mathbf{p})=-p_1^2\psi(\mathbf{x},\ t;\ \mathbf{p}) \tag{37d}$$

对其他两个空间坐标x_2, x_3作两次微商，结果类似.

计及关系(37b)，从而得到

---

1) 由
$$E=\hbar\omega=\frac{m}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}c^2$$
和
$$p=\frac{mv}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$
可得
$$\hbar^2\omega^2-p^2c^2=\frac{m^2c^4}{1-\frac{v^2}{c^2}}-\frac{m^2c^2v^2}{1-\frac{v^2}{c^2}}$$
$$=\frac{m^2c^4\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}{1-\frac{v^2}{c^2}}$$
$$=m^2c^4$$
由于选用了$\hbar=c=1$的单位制，故有(37b).

——译者注

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi(\mathbf{x},\ t;\ \mathbf{p})-\nabla^2\psi(\mathbf{x},\ t;\ \mathbf{p})=-m^2\psi(\mathbf{x},\ t,\ \mathbf{p}) \quad (37e)$$

其中 ∇^2 代表拉普拉斯算符，定义为

$$\nabla^2\equiv\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \quad (37f)$$

方程(37e)即为所要的波动方程．如我们所见，此方程为形式如(37a)的所有平面波亦即为所有的动量为 $\mathbf{p}$ 的平面波所满足，因此也为任一德布罗意波(它是平面波的迭加)所满足．

38 波动方程(37e)称为克莱因-戈登方程．在某种意义上，它是德布罗意波所满足的最简单的微分方程．注意，此方程也为空的空间中的电磁波所满足，以光子质量 $m=0$．读者很易使自已信服不可能有任何一阶的，即只包含对自变量一级微商的微分方程能为所有德布罗意波所满足．方程必须至少是二阶的，理由是能量和动量之间的关系(37b)是二次代数关系．

我们必须重申(因为这是重要之点)方程(37e)只能描写在时-空中处在空的区域的粒子的传播，即远离所有其他粒子的粒子的传播．同样，齐次的(即电流密度和电荷密度都等于零时的)麦克斯韦方程只在远离电流与电荷的区域，即远离其他粒子的区域，描写电磁波的传播．

39 两个平面波的迭加，即下列形式的波

$$\psi(\mathbf{x},\ t)=A'\exp(i\mathbf{x}\cdot\mathbf{p}'-i\omega' t)+A''\exp(i\mathbf{x}\cdot\mathbf{p}''-i\omega'' t) \quad (39a)$$

也满足微分方程(37e)，其中 A' 和 A'' 为两个任意的复常数．换句话说，

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi(\mathbf{x},\ t)-\nabla^2\psi(\mathbf{x},\ t)=-m^2\psi(\mathbf{x},\ t) \quad (39b)$$

让我们考虑平面波更一般(连续)的迭加，形式为

$$\psi(\mathbf{x},\ t)=\int_{\infty} d^3(\mathbf{p})A(\mathbf{p})\exp(i\mathbf{x}\cdot\mathbf{p}-i\omega t) \tag{39c}$$

这儿 $A(\mathbf{p})$ 是矢量 $\mathbf{p}$ 的复值函数．积分范围包括整个三维 $\mathbf{p}$ 空间．量 ω 是 $\mathbf{p}$ 的函数，$\omega>0$，并满足等式(37b)．换言之，

$$\omega=\omega(\mathbf{p})=\sqrt{\mathbf{p}^2+m^2} \tag{39d}$$

由等式(39c)的积分所定义的波函数 $\psi(\mathbf{x},\ t)$ 也满足微分方程(39b)．这是很一般的德布罗意波，事实上它是最一般的这种波．当然我们假定函数 $A(\mathbf{p})$ 是 $\mathbf{p}$ 的相当正规的函数，从而使等式(39c)的积分有明确意义．

40 在傅里叶积分理论中可以证明下列定理：如果 $\psi(\mathbf{x},\ 0)$ 是 $\mathbf{x}$ 的任意的相当正规的函数，而如果我们用下列积分定义函数 $A(\mathbf{p})$：

$$A(\mathbf{p})=(2\pi)^{-3}\int_{\infty} d^3(\mathbf{x})\psi(\mathbf{x},\ 0)\exp(-i\mathbf{x}\cdot\mathbf{p}) \tag{40a}$$

则有

$$\psi(\mathbf{x},\ 0)=\int_{\infty} d^3(\mathbf{p})A(\mathbf{p})\exp(i\mathbf{x}\cdot\mathbf{p}) \tag{40b}$$

这是一个定理．其精确表述及其证明随着对“相当正规的函数”的恰当定义而定．在这里我们不证明此定理，在本书的讨论中我们也不真正要求学到傅里叶积分理论．适当的时候读者将在微积分课程中学习如何精确地表述这一定理，以及如何证明它．我们这里的目的是讨论此定理的物理含义，从而给读者提供学习傅里叶积分的强烈“物理”兴趣．它在物理学中是极为重要的．

41 现在让我们来看该定理的含意是什么．假定 $\psi(\mathbf{x},\ 0)$ 是时刻 $t=0$ 的德布罗意波函数．于是我们可以通过等式(40a)中的积分把此波函数与动量空间中的一个振幅 $A(\mathbf{p})$ 相联系．借助动量空间的振幅 $A(\mathbf{p})$ 我们可定义一个新的波函数

$\psi_1(\mathbf{x},\ t)$:

$$\psi_1(\mathbf{x},\ t)=\int_\infty d^3(\mathbf{p})A(\mathbf{p})\exp(i\mathbf{x}\cdot\mathbf{p}-i\omega t) \qquad (41a)$$

如果我们在上面的表式中让 $t=0$ 并与公式(40b)比较可知 $\psi_1(\mathbf{x},\ 0)=\psi(\mathbf{x},\ 0)$. 从而新的函数 $\psi_1(\mathbf{x},\ t)$[它满足克莱因-戈登方程(39b)]在"初始时刻" $t=0$ 与波函数 $\psi(\mathbf{x},\ 0)$ 相同. 其意义就是我们有了一个服从初始条件(即在时刻 $t=0$ 其解应与一给定的($\mathbf{x}$ 的)函数相一致)的求解克莱因-戈登方程的步骤.

42 让我们考虑这样找到的克莱因-戈登方程的解的唯一性问题. 我们所根据的从给定函数 $\psi(\mathbf{x},\ 0)$ 构成函数 $A(\mathbf{p})$ 和 $\psi_1(\mathbf{x},\ t)$ 的步骤, 的确是导致满足方程(39b)的唯一函数 $\psi_1(\mathbf{x},\ t)$ 的确定步骤. 问题在于是否微分方程(39b)不会有别的解在时刻 $t=0$ 也与 $\psi(\mathbf{x},\ 0)$ 相一致. 回答是会有的. 微分方程(39b)也被下列形式的波函数所满足:

$$\psi'(\mathbf{x},\ t)=\exp(i\mathbf{x}\cdot\mathbf{p}+i\omega t),\ \omega=\sqrt{\mathbf{p}^2+m^2}$$

与形式(37a)的"正频率解"相对照,我们称这些解为"负频率解".

我们根据物理上的理由把负频率解排除掉. 它们不代表正能量(正频率)的粒子. 现在很清楚,对方程(39b)的每一个正频率解也存在相同动量 $\mathbf{p}$ 的负频率解,因此克莱因-戈登方程的解比物理上需要的解多出一倍. 其理由是等式(37b)对每个 $\mathbf{p}$ 有两个解 ω; 一正一负. 只有正的解有物理意义: 粒子的能量是一个正的量.

所以,克莱因-戈登方程并没有说出德布罗意波的全部内容. 我们必须加上条件: *应将所有负频率(负能量)解除外*. 有了这一规定就可以证明方程(39b)的每个可能的解由它在 $t=0$ 时的值唯一地决定, 这就回答了我们提出的问题. 我们

将不在这里证明此定理.

43 从我们的讨论中出现的重要思想是可以用(41a)的形式来表示每一个物理上可接受的德布罗意波函数$\psi(\mathbf{x}, t)$,其中$A(\mathbf{p})$是通过等式(40a),由某一特殊时刻(例如$t=0$时刻)的波函数唯一地确定的.从而每一物质波可以看作为平面物质波的迭加.如果我们愿意,可以把此看作我们的基本假设,这样就降低了克莱因-戈登方程的重要性.它仅仅是物理上可接受的波函数所满足的一个好的微分方程.

44 在傅里叶积分(39c)[或(41a)]中适当选择动量空间振幅$A(\mathbf{p})$,我们就能构成一些在给定时刻近似地局限在空间的某一区域的波包.这样的波包的性质是:只在空间某有限区域足够大,而当$|\mathbf{x}|$趋向无限时迅速减至零.这种类型的波包代表近似地限定在空间有限区域内的粒子.显然所有实验上研究的粒子都必须由这样的波函数描述.当然我们假定最可能在波函数大的那些空间区域内找到粒子(当我们用计数器寻找它时).这一点与我们对振幅的绝对值平方的量子力学解释是相一致的:它与某事件发生的几率有关.目前,我们只要假定"最可能在波函数大的地方发现粒子"就够了.以后我们将讨论一个特殊类型的波函数,对这种波函数我们将叙述关于如何计算在一区域找到粒子的几率的精确规定.

我们可断言,简单的平面波不能代表实际实验中的粒子.对这样一个波,其振幅的绝对值平方为一常数,不依赖于$\mathbf{x}$(和t),在任何单位体积的区域中找到粒子的几率不依赖于区域的位置.因为空间可由无数个这种区域构成,那么在任何特定的一个区域找到粒子的几率必须是零.在任一有限区域找到粒子的几率也是零,这就没有物理意义.

因此严格的单色平面波是不存在的.然而对于一个在空间任意广大的区域中看起来象一个振幅是常数的平面波却是

可能存在的，尽管在此区域以外振幅趋向于零．如果此区域包括了所研究的物理现象在其中发生的区域，我们就可以把此波看作理想化的平面波．在物理学上常常谈到平面波，应当理解为，这样的波近似地为平面波，即它在空间很大区域内看起来象一个平面波．

45 克莱因-戈登方程(39b)为描写质量是m的粒子的(运动)状态的每一波函数所满足．如果让$m=0$，我们就得到既为电磁理论中的电矢量场又为磁矢量场所满足的方程．然而克莱因-戈登方程与麦克斯韦方程组不同，读者也许会被这一事实所迷惑．麦克斯韦方程组是否可能表示比克莱因-戈登方程更多的东西？回答是肯定的．麦克斯韦方程也描写了光子的偏振态．给定光子的动量和能量尚不能充分描述光子的运动状态；还须给定其偏振态．对于每一个动量有两个线性独立的偏振态，例如左旋圆偏振态和右旋圆偏振态．

问题发生了：实物粒子也可能有不同的偏振态吗？答案是有些粒子有，有些粒子没有．π介子和α粒子是不能偏振化的粒子的例子．电子、质子和中子是可以偏振化的粒子的例子．后一类粒子都有本征角动量，即自旋，而自旋不同的取向对应于不同的偏振态．另一方面，π介子和α粒子没有自旋：在这些粒子的静止参考系中没有什么可定义方向的东西．它们是球对称的．

为描写自旋不为零的粒子的偏振态，除了变量$\mathbf{x}$和t以外，我们还必须引进描写自旋的变量．因此描写电子、质子和中子的完整情况的波动方程比克莱因-戈登方程(39b)更复杂，但波函数仍然也满足克莱因-戈登方程．可以说这一方程描述了时-空中不计及自旋的粒子的行为．我们不在这里讨论偏振态的量子力学描述．它与电磁波的偏振态的描述有些类似．

46 在本章这一部分结束时，让我们对于采用厘米·克·秒(或米·千克·秒)单位制的情况重述波动方程(39b). 常数 $\hbar$ 和 c 很易复原，而有

$$\frac{1}{c^2}\ \frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi(\mathbf{x},\ t)-\nabla^2\psi(\mathbf{x},\ t)=-\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\psi(\mathbf{x},\ t) \quad (46a)$$

读者应通过量纲论证，使自己确信此方程是正确的. 注意每一项具有量纲(波函数)/(长度)^2. 常数 $\hbar$ 和 c 的复原是唯一的.

六、提高课题：物理状态的矢量空间[1)]

47 让我们简要地叙述假定对物质波成立的迭加原理.

让 $\mathscr{H}'$ 是所有波函数 ψ 的集合，这些波函数不恒等于零，并代表质量为 m 的粒子的可能物理状态. 在这个波函数集合中我们加上在空间各处所有时刻都恒等于零的波函数. 将最终的集合记为 $\mathscr{H}$. 这一集合具有下列性质:

(a) 如果 ψ_1 和 ψ_2 是集合 $\mathscr{H}$ 中的两个波函数，则和 $(\psi_1+\psi_2)$ 也在 $\mathscr{H}$ 中.

(b) 如果 ψ 在 $\mathscr{H}$ 中，而且如 c 为任意复常数，则函数 $c\psi$ 也在 $\mathscr{H}$ 中.

波函数的迭加原理特别指出若 ψ_1 和 ψ_2 是两个物理上有意义的波函数，而若 c_1 和 c_2 是任意两个复数，则函数

$$\psi=c_1\psi_1+c_2\psi_2 \quad (47a)$$

也是物理上有意义的波函数，只要它不恒等于零.

48 集合 $\mathscr{H}$ 的这些性质是一个叫做抽象复矢空间的抽象数学对象的特征性质. 让我们陈述用以定义这一对象的公设.

线性复矢空间 $\mathscr{H}$ 是一些称为矢量的元素的集合，其性质是:

---

1) 初读时可略去。

I. 对任意两个 $\mathscr{H}$ 中的矢量 ψ_1 和 ψ_2，存在一个 $\mathscr{H}$ 中的唯一矢量 ψ，称为 ψ_1 和 ψ_2 的和，记为 $\psi=\psi_1+\psi_2$. 形成两矢量之和的运算满足下列诸条件：

(a) 对 $\mathscr{H}$ 中任意两个 ψ_1, ψ_2 有 $\psi_1+\psi_2=\psi_2+\psi_1$.

(b) 对 $\mathscr{H}$ 中任意三个矢量 ψ_1, ψ_2, ψ_3 有 $\psi_1+(\psi_2+\psi_3)=(\psi_1+\psi_2)+\psi_3$.

(c) 在 $\mathscr{H}$ 中存在一个唯一矢量 0，称为零矢量，对 $\mathscr{H}$ 中每个 ψ 有 $\psi+0=\psi$.

II. 给定在 $\mathscr{H}$ 中的任一矢量 ψ 和任一复数 c，则在 $\mathscr{H}$ 中存在一唯一的矢量，记为 $c\psi$，称为矢量 ψ 和标量 c 的积. 矢量和标量(一个复数)的乘法运算满足下列条件

(a) 对任一矢量 ψ 和任意两标量 c_1 和 c_2 有 $(c_1c_2)\psi=c_1(c_2\psi)$.

(b) 对任一矢量 ψ 和任意两标量 c_1 和 c_2 有 $(c_1+c_2)\psi=c_1\psi+c_2\psi$.

(c) 对任意两矢量 ψ_1 和 ψ_2，以及任一标量 c，有 $c(\psi_1+\psi_2)=c\psi_1+c\psi_2$.

(d) 对特殊标量 1 有 $1\psi=\psi$.

这些是定义一个在复数场上的抽象线性矢量空间的公设. “在复数场上”一语的意思是矢量所乘的标量是复数. 如果将标量限制为实数，我们就称为在实数场上的线性矢量空间. 为简短起见我们只分别说“复矢量空间”，“实矢量空间”. 读者已遇到过实矢量空间的例子，即三维欧几里得“物理空间”.

49 公设 Ia 是加法的交换律；公设 Ib 是加法的结合律；公设 Ic 是关于零矢量的存在和唯一性. 公设 IIa 是对标量乘积的结合律，公设 IIb 和 IIc 是对标量乘积的分配律. 公设 IId 指出一矢量乘以 1 等于该矢量.

从这些公设我们可以证明许多几乎是自明的事实，例如 $0\psi=0, (-1)\psi+\psi=0, (-c)\psi=-c\psi$, 等等.

我们在这里不准备列出所有琐细的定理，因为作者相信读者的直觉不会把他引入歧途.

引入抽象复矢空间的好处是什么？回答是：在我们数学理论的研究中一再遇到一些元素集合，这些元素除了可能具有任何其他性质外，还具有满足抽象复矢空间的所有公理的特性. 当我们遇到这样一个集合时，我们不必重新列出抽象复矢空间的性质而只是说这一集合是一复矢空间，于是每一个知道矢量空间公理的人立刻会知道相当多的有关此集合的性质.

50 我们现在可以指出所有物理上可以接受的波函数连同恒等于零的波函数一起的集合 $\mathscr{H}$ 是一复矢空间. 这是一个具体的复矢空间，因为其矢量确实是空间和时间的"明确可知"复函数. 如果我们把第 48 节给出的公设和第 47 节中明确提到的所有波函数集合的性质进行比较，会注意到第 48 节中所列出的更多. 然而，抽象矢量空间的许多公设都为具体波函数集合所满足，但这是无关紧要的，因而不必明确说明这些琐细的事.

51 让我们注意在抽象复矢空间的定义中没有提到矢量空间的维数：它可以是有限维的或无限维的. 让我们在这个问题上再稍花些功夫.

在复矢空间 $\mathscr{H}$ 中的 N 个矢量 $\psi_1, \psi_2, \cdots, \psi_N$ 的集合称为线性独立的，如果等式

$$\sum_{n=1}^{N} c_n\psi_n=0 \tag{51a}$$

只在 $c_1=c_2=\cdots=c_N=0$ 时成立；否则它们就称为线性相关的.

如果在一复矢空间中可能找到 N 个线性独立的矢量的集合，但不可能找到多于 N 个线性独立的矢量集合，则该复矢空间是 N 维的. 如果在矢量空间中对任一整数 N 都能找到 N 个线性独立矢量的集合，则称该矢量空间是无限维的.

包括所有物理上有意义的德布罗意波函数的矢量空间 $\mathscr{H}$ 显然是无限维的；因为有无限个数的线性独立波函数.

52 我们曾研究克莱因-戈登方程的解，但现在我们可断言，若我们考虑任一线性微分方程的解的总和，则其集合总是一(复)矢空间. 在量子力学中曾提出许多不同类型的线性微分方程以描写自然界中存在的粒子. 所有物理上可接受的这些方程的解的集合总是形成矢量空间.

我们可将此表述如下：为描写一给定种类的粒子，人们可以引进一个复矢空间，并把该粒子的每一可能(运动)状态与这一空间中的一矢量相联系.

这一概念是一个了不起的概念，它是量子力学数学理论的精髓. 初看之下可能不象是如此；说一个粒子的(运动)状态用复矢空间中的一个矢量来描写似乎只不过是以另一种方式重述满足波动方程的解的迭加原理而已，而且也许是一个价值可疑的重述. 但当我们进一步深入到量子物理中去时就发现了这一概念的巨大价值. 举例来说：通过注意到波函数形成矢量空间，许多实际计算问题就真正得到大大的简化. 适合于矢量空间的计算技术在某种意义上具有代数的特征，这就导致我们去考虑微分方程解的代数方面. 结果发现在许多问题中代数方法比微分方程直接求解法优越得多(从计算经济来看)，特别在具有特殊对称性特征的问题中. 在本书中我们不能显示这种简化. 然而作者感到指出下列事实还是值得的：外观抽象的矢量空间理论却导致求解实际问题的大大简化. 这一简化的一个次要的方面是符号上的一定简化. (顺

便指出，符号问题并不总是小问题．坏的符号阻碍进展，而好的符号促进进展．）

53 海森伯的矩阵力学是量子力学的特殊表述法，在那里强调了理论的矢量空间方面．而波动方程则起次要的作用．起先，海森伯的理论好象与诸如薛定谔的波动力学那样的波动理论非常不同，但这两种不同类型的理论其实完全等价，并导致同样的物理预言．它们有共同的抽象骨架，此骨架就是抽象的矢量空间理论．因为我们不能假定读者在他的数学课程中已学过矩阵，因而在本书中我们不得不略去海森伯理论的讨论．此理论并不特别困难，但既然对读者来说有那末多别的新东西要学，我们就不想讨论矩阵理论的表述了．

W．海森伯（Werner Heisenberg）的第一篇关于该主题的论文发表于1925年[1]．在这一篇论文中并未明确提到矩阵理论，因为海森伯尚未认识到他的数学演算具有矩阵理论解释．不久后由M．玻恩（Max Born）和P．约旦（Pascual Jordan）在一篇重要的论文中澄清了与矩阵理论的联系[2]．

54 读者应注意到历史上在薛定谔发明其波动力学以前就已有人发明并发展了矩阵力学．我们曾说过把一线性微分方程的所有解的集合看成一矢量空间是很自然的概念，所以导致考虑方程的代数学方面．无疑即使先发明薛定谔的波动力学，也会很快就发现矩阵力学作为波动理论的另一种表述．然而，这不是事情实际发生的情况．事件的历史程序对本书作者来说几乎是不可思议的，因而他把矩阵力学的发明看作物

---

1) W. Heisenberg, "Über quantentheoretische Umdeutung kinematischer und mechanischer Beziehungen," *Zeitschrift für physik* **33**, 879(1925).

2) M. Born and P. Jordan, "Zur Quantenmechanik", *Zeitschrift für Physik* **34**, 858 (1925).这些作者和海森伯在发表于 *Zeitschrift für Physik* **35**, 557 (1926)上的"Zur Quantenmechanik II" 一文中进一步发展了量子力学原理．

理学理论中最惊人的成就之一.

薛定谔在 1926 年证明了矩阵力学和波动力学在物理上等价[1].

问 题

1. 显微镜的*分辨本领*表示我们用显微镜看见所观察对象的细节的能力的极限. 我们可以用对象中能被清楚地看作分离的两点之间的最短距离来表示分辨本领. 在光学显微镜中, 最大的可能分辨能力显然被用作照明的光的有限波长所限定: 我们不能期望看见比这个波长小得多的对象的形状. 为克服光学显微镜的这一限制, 人们已经制造了电子显微镜. 电子显微镜利用适当形状的电场和磁场以代替用玻璃制造的透镜. 让我们考虑一个典型的电子显微镜, 其中照明由能量为 50 千电子伏的电子源担任. 试比较这样一架电子显微镜和一架光学显微镜的最大分辨本领.

必须指出显微镜(不论光学的还是电子的)中实际获得的分辨本领还依赖于器件的一定设计特性, 而这与被显微镜所接收的来自对象的"光"所张角的大小有关. 由于技术上的缘故此角在电子显微镜中比在光学显微镜中小得多, 因而电子显微镜的实际分辨本领比最大理论分辨本领要小相当多. 尽管如此, 电子显微镜的分辨本领仍比光学显微镜的分辨本领高得多.

2. 考虑室温下的氦气, 此气体是单原子的. 温度为 T 的气体中的氦原子的平均能量表为 $E_{\mathrm{kin}}=3kT/2$, 由此表示式我们可以求得氦原子的平均速度(和动量).

(a) 计算氦原子的平均速度(用厘米/秒表示).

(b) 计算与此平均速度对应的德布罗意波长, 用厘米表示. 比较此波长和气体中原子间的平均距离. 我们假定压强是一个大气压, 于是平均间距可由已知密度求得.

人们可能猜想若德布罗意波长大于平均间距, 量子效应能起作用,

---

1) E. Schrödinger, "Über das Verhältnis der Heisenberg-Born-Jordanschen Quantenmechanik zu der meinen", *Annalen der Physik* **79**, 734 (1926).

而当德布罗意波长远小于平均间距时，经典描述就会是适当的．在经典图象中气体是弹子球的集合，不断地相互碰撞着，而在量子力学描述中气体是相互作用着的波的集合．所以对实际气体作出上述比较是十分有趣的．

(c) 液氦的密度约 0.15 克·厘米$^{-3}$．在大气压力下此物质在可达到的最低温度下保持液态．与(b)中的研究类似，试在 0.01°K 的极低温下比较德布罗意波长和平均间距．

3．试对一块铜中的电子"气"的平均间距和德布罗意波长作出同样的比较．有些金属模型中电子被看作形成"气"，正象容器中的氦原子一样．假定在每个铜原子中有一个可以在点阵中自由运动的电子．于是原子间距即为电子间的平均间距．

4．考虑一个三维问题：一粒子倾斜地入射到区域 R_1 和 R_2 的分界平面上．我们假定粒子的势能在 R_1 区的大部分具有常数值 V_1，在 R_2 区的大部分具有常数值 V_2，紧靠分界平面附近除外，在该处势能迅速由 V_1 变到 V_2．所以在区域 R_1 和 R_2 中粒子将不受力，但在分界面附近，在垂直于平面的方向上则将受到强大的力．让我们假定粒子的总能量为 E，并且 $E>V_1$，$E>V_2$．则粒子在分界面上将被折射，而我们想要既从经典观点又从量子力学观点来研究此折射．

(a) 在经典力学的基础上导出折射定律．在这一情况下，当粒子通过分界面时其动量的垂直分量将有所改变，但横向分量将不变．若我们知道粒子在区域 R_1 的动量，能量原理就给出粒子在区域 R_2 中的动量，这样我们就可导出折射定律．

(b) 在波动力学的基础上导出折射定律，并证明你能得到与经典情况相同的结果．在量子力学中考虑此问题时，你得再次研究粒子的能量 E，动量 $\mathbf{p}$，频率 ω，和波矢 $\mathbf{k}$ 之间的联系．我们早先的讨论适用于区域中势能为零的情形，所以可能不适用于现在的情况．请你说明关于将如何去创造这个理论的你的想法。要考虑的问题包括以下这些：在分界面两边频率是否相同？在分界面上波矢的切向分量是否必须连续？关系式 $\mathbf{p}=\hbar\mathbf{k}$ 是否总是对的？式 $E=\hbar\omega$ 呢？

这个特殊问题的答案其实你是知道的：(a)部分中的经典讨论必定正确地给出折射定律．这有助于你探索有用的思想：你知道你的量

子力学理论在这一情况下必须得出一个已知的结果.

(c) 根据经典动力学，在分界面粒子将不被反射，而只折射. 入射到两种不同电介质的分界面上的光既被反射又被折射. 关于在量子力学粒子，即实在粒子的情形中情况应该如何，请表明你的见解.

5. 我们来考虑刻线光栅的衍射，如图 55A 所示. 这样的光栅由一平面（由玻璃、金属或塑料制成）上大量很细的等间距的平行刻痕所组成. 为简单起见，我们将把这看作二维问题，当我们假定入射波传播方向在与刻痕线垂直的平面内时，这问题可以当成二维的. 这样，入射方向在图面内.

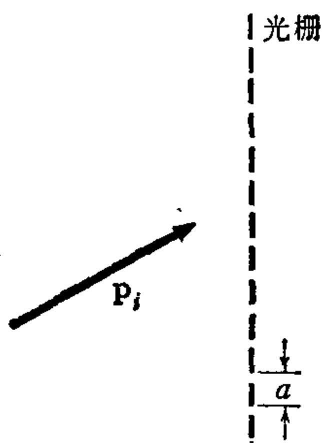


图 55A 本图涉及问题 5，示意地表示一衍射光栅. 入射动量 $\mathbf{p}_i$ 由一矢量代表. 二相邻光栅刻线间的距离为光栅常数 a.

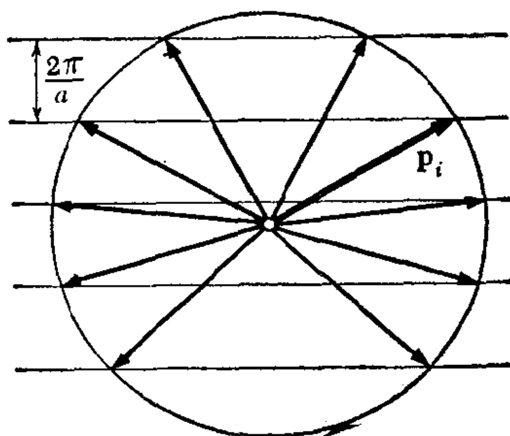


图 55B 表示怎样由简单的几何作图法找到衍射光方向. 最终动量由一个圆（它与动量的恒定大小相对应）和一系列平行线（它与转移给光栅的动量的垂直分量允许值对应）的交点决定. 图中的矢量表示十个可能出现的最终动量，入射动量也包括在内.

设入射波为频率（能量）是 ω，波矢（动量）是 $\mathbf{p}_i$ 的平面波. 找出衍射波的可能方向，并说明它们可以描述如下. 动量为 $\mathbf{p}_i$ 的粒子与光栅相碰. 碰撞后它以动量 $\mathbf{p}_0$ 出射. 碰撞中粒子的能量不变，但动量 $\mathbf{q}=\mathbf{p}_i-\mathbf{p}_0$ 转移给了光栅. 证明衍射波的可能方向由一简单规则来决定，即动量转移 $\mathbf{q}$ 沿光栅的组元的分量，也就是图中的垂直分量，必须是 $\frac{2\pi}{a}$ 的整数倍，其中 a 是刻线间的距离. 动量转移的垂直分量是“量子化的”.

6. (a)我们来考虑可见光在上题所讨论的光栅上的衍射. 设光栅常数 a 等于光波波长的两倍，并设入射角为 45°. 找出所有衍射光可能出射的角度，画一图.

(b) 让我们变更一下装置，让光栅夹在一冕牌玻璃(折射率 1.51)板和一火石玻璃(折射率 1.74)板之间. 两板都具有 5 毫米的均匀厚度，且冕牌玻璃板朝向光入射的一方. 波长，光栅常数和入射角同本题的第一部分一样. 试找出衍射光从双层板可能出射的方向，并与本题的第一部分比较.

7. 在一典型的戴维孙-革末实验中，能量为 88 电子伏的电子法向入射到一个金属晶体的表面，在该晶体中原子排列成边长 $a=2.9$ 埃的正方点阵. 试画一表示衍射光线同与晶体表面平行且与晶体表面相距 5 厘米的平面的交点的图. 此图必须以正确的比例绘制，并且必须画出所有的衍射光线.

8. 从前有一个物理学家用若干不同的金属做了上面所描述的实验. 在关于结果的报告中他说："用金属 A 我观察到三度对称的衍射花样；用金属 B 得四度对称的；用金属 C 得五度对称的；而用金属 D 得六度对称的". (当图形旋转角度 $2\pi/n$ 保持不变时，就称为 n 度对称的.) 详细评价这一报告.

9. 使从反应堆出来的中子通过(多晶)铍的柱体. 选择此材料是因为它不显著地吸收中子. 发现从另一头出射的中子是"冷"的，它们具有对应于 50°K 以下温度的动能. 发现"较热的"中子(其动能对应于室温)被铍强烈地散射出入射束. 你能给这些现象一个解释吗?

10. 假定波函数 $\psi(\mathbf{x}, t)$是克莱因-戈登方程(质量为 m)的一个正频率解. 我们假定此波函数代表一个在空间集中得相当好的粒子(波包)，并沿着某相当确定的方向运动. 考虑由

$$\psi_R(\mathbf{x},t)=\psi(-\mathbf{x}, t)$$

定义的波函数 $\psi_R(\mathbf{x},t)$.

(a) 证明 $\psi_R(\mathbf{x}, t)$也是克莱因-戈登方程的正频率解.

(b) 波函数 $\psi_R(\mathbf{x}, t)$于是代表粒子运动的另一种状态. 由$\psi_R(\mathbf{x}, t)$所描写的运动状态与由 $\psi(\mathbf{x}, t)$所描写的运动状态的关系如何，试从物理意义上叙述之.（可以作出一个合宜又简单的陈述. 作为提示你

可首先想一下在两种情况下的“平均”轨道.)

11. 下一个问题与问题 10 类似,但它可能更难一些. 考虑由

$$\psi_T(\mathbf{x}, t) = \psi^*(\mathbf{x}, t)$$

定义的波函数 $\psi_T(\mathbf{x}, t)$,其中星号表示复共轭.

(a) 证明 $\psi_T(\mathbf{x}, t)$ 也是克莱因-戈登方程的正频率解.

(b) 由 $\psi_T(\mathbf{x}, t)$ 所描写的运动状态与由 $\psi(\mathbf{x}, t)$ 所描写的运动状态的关系如何,试从物理意义上叙述之.

第六章 测不准原理和测量理论

一、海森伯测不准关系

1 从前两章中我们已经知道自然界中存在的粒子具有波动性. 以确定动量p运动的粒子能表现得象波，其波长为$\lambda=h/p$. 这个波长和动量的关系式是普遍适用的，即对于所有的真实粒子都成立. 我们强调指出，不应当把波动性想象为以某种方式和经典粒子相联系的“引导波”. 一个真实的物理粒子是不可分割的单个实体，而其波动性和粒子性则是它的内在本性在不同方面的表现.

2 我们已经知道，可以用复数波函数$\psi(\mathbf{x},\ t)$来描写粒子的运动状态. 对于孤立的粒子，这个波函数满足克莱因-戈登方程，服从一个附加条件，即波函数的傅里叶分解中只出现正的频率. 正如我们已经解释过的，给定$t=0$时刻(或者另外某个时刻)的初始波函数$\psi(\mathbf{x},\ 0)$，就可能在这个条件下求解克莱因-戈登方程. 由于初始波函数是相当任意的，因此就可能有与粒子不同运动状态相对应的各种类型的波. 重要的是要懂得，量子力学的波不一定要象正弦波：正弦波只是非常特殊的情况. 克莱因-戈登方程决定了波函数对时间的依赖关系，但它对某一定时刻波的“形状”并没有给以任何限制. 然而，它将限制波在两个不同时刻的形状. 在$t=t_1$时刻的波函数$\psi(\mathbf{x},\ t_1)$唯一地决定了所有其他时刻的波函数，从而唯一地决定了粒子的运动状态. 在这个意义上，量子力学是决定论的理论.

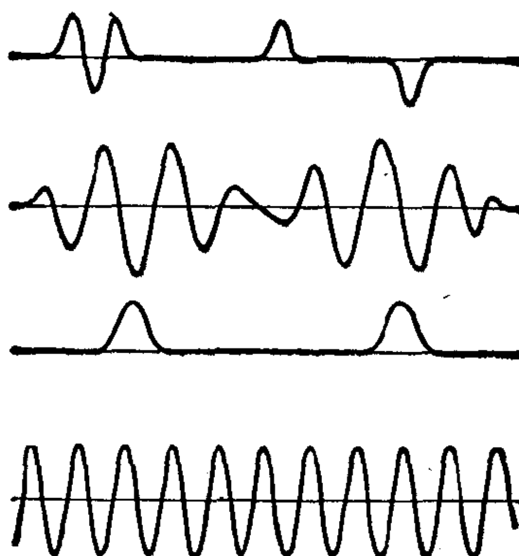


图 2.4　图示各种类型的波，是为了提醒读者，量子力学的波不必象正弦波（在给定的时刻）．一个任意的波可以是位置的几乎任意的函数，它的形状不必象上面的波那样谐和．我们在这里画出了（通常的）复数波函数的实数部分．

3　我们现在来讨论由初始波函数 $\psi(\mathbf{x}, 0)$ 描写的粒子运动状态．对于粒子在 $t=0$ 时刻的位置和动量，我们可以说些什么呢？

我们曾经说过，必须用几率来解释波的振幅．在空间中振幅大的区域内有最大可能找到粒子．更精确地讲，如果我们用一个（小的）探测器在某点附近的区域内寻找一个粒子，那末在这一点上波振幅绝对值的平方就是探测到粒子的几率的量度．假如初始波函数是这样的：即除了一个非常小的区域外，其余地方的振幅都为零．那末我们就可以说，（在 $t=0$ 时刻）粒子就在这个区域，已准确地知道了它的位置．另一方面，如果初始波函数散布得很开，在非常大的范围内它的振幅都近似地是常数；那末我们就不可能指定粒子的准确位置，在 $t=0$ 时的位置可以有很大的不确定性．

正如我们所看到的，通常不能指定粒子（在某一时刻）的

准确位置这个概念是波动图象的自然结果．知道位置的准确度依赖于粒子的运动状态．这并不排斥有一个波函数（一种运动态），对于它我们能以极高的准确度得知粒子位置，也并没有理由排斥另一种波函数，对于它我们了解粒子位置的误差可达一光年以上．

4 类似的考虑也适用于动量变量．由于德布罗意方程式把动量和波长联系起来了，显而易见，除非很好地确定波长，否则也就不能很好地确定动量．要能很好地确定波长，波函数必须呈现某种周期性的图形．一长列正弦波具有完全确定的波长，但是对于任意的不规则曲线来说，波长的整个概念就失去了严格的意义．因此我们可以理解，确定动量的精密度取决于粒子的运动状态：它可能是十分确定的，也可能是很不确定的．

海森伯看出，同时（即对于同一个波函数）确定位置和动量，它们的准确度有一个原则上的限度，而分别确定动量或位置的精确度是没有限制的．1927 年，海森伯把这个思想表述为著名的*测不准关系*[1]．我们现在用一些简单而直观的论证来得出这些关系．

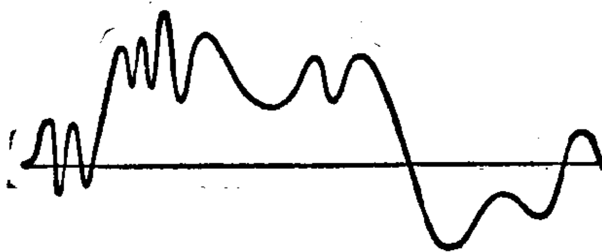


图 4A 波长概念对之很少有意义的波列的一个例子．对于这样的波，动量是很不确定的．再看一看图 2A，除了最下面的那一列波以外，其他所有波列的动量都是很不确定的．

1) W. Heiseuberg, "Über den anschaulichen Inhalt der quantentheoretischen Kinematik und Mechanik." *Zeitschrift für Physik* **43** 172 (1927).

5 我们首先考虑一维世界中的德布罗意波．为简单起见，我们采用 $\hbar=1$ 的单位． 这样，波长和动量的关系为 $\lambda=2\pi/p$，我们就可以不必去区分波矢和动量了．

我们将用波的图象来进行论证．为此，我们在图 5$ABCD$ 中画出了四种有限长度的特殊波列(图中的横坐标是 x 轴)．这里读者应当注意，波函数 $\psi(\mathbf{x}, 0)$ 通常是复函数． 由于这一事实，当我们要用图表示它时就发生了问题．不过，我们可以分别画出函数的实部和虚部． 读者可以把图 5$ABCD$ 解释为只表示出 $\psi(\mathbf{x}, 0)$ 的实部，或者只表示它的虚部．

这些图表示"被截断的正弦波"．在波函数不为零的区域内，这些波就由正弦函数 $\sin(px)$ 描述．可是，这种波不是真正纯正弦波，因为它的两端都被"截去"了．由于这个原因，就不能精确地确定波长(以及动量)．只对纯正弦波才能精确地确定波长和动量．

考察图 5$ABCD$，我们可以很清楚地看到，把位置确定得越准确，动量就越不准确．令 Δx 表示位置 x 的不确定性，我们可以取波列的长度作为位置不确定性的粗略量度．假定波列包含 n 个完整的波，我们有：

$$\Delta x \sim n\lambda = \frac{2\pi n}{p} \tag{5a}$$

其中 λ 是波长．很清楚，波列中完整的振动数目越多，就能更准确地定出波长．我们取

$$\frac{1}{n} \sim \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{\Delta p}{p} \tag{5b}$$

作为波长的相对不确定性的粗略量度．其中 Δp 是动量不确定性．$\left(\text{因为 } \lambda=2\pi/p\text{，从而可得}\dfrac{\Delta\lambda}{\lambda}=\dfrac{\Delta p}{p}.\right)$

把(5a)和(5b)结合起来，我们就得到数量级关系式：

$$\Delta x \Delta p \sim 1 \tag{5c}$$

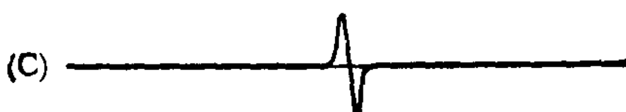
位置很不确定
动量十分确定



位置较为确定
动量不很确定



位置十分确定
动量很不确定



位置非常确定
动量很不确定



图 5*ABCD* 举列说明我们对位置-动量测不准关系的讨论. 准确确定的位置要求波列短，准确确定的动量就要求许多充分展开的正弦式的循环. 这两个要求是互相矛盾的.

这里我们略去了因子 2π，因为我们关心的只是数量级的估计. 我们对 Δx 和 Δp 的定义并不严格，而只是定性的，因此我们得出的结果也只是定性的.

6 关系式(5c)是图 5*ABCD* 中表示的几种特殊波的测不准关系式. 对于所有的波都普遍适用的测不准关系是一个不等式. 为使读者信服这一点，我们在图6*A* 中示出另一种波. 显然，对于这样的波来说，位置的不确定性和图 5*A* 中的波大致相同. 然而图 6*A* 中波的动量(或波长)的不确定性一定要远

远大于图5A中波的动量的不确定性. 因此, 位置-动量的测不准关系的正确形式应该如下:

$$\Delta x \Delta p \gtrsim 1 \qquad (6a)$$

读者将看到, 这就是我们在第一章中曾经十分简略地讨论过的测不准关系.

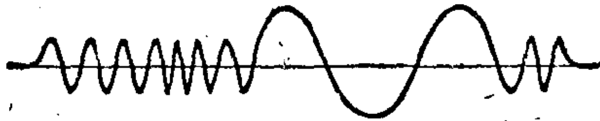


图6A 上面波列位置的不确定性和图5A中的波是相同的. 可是这里的动量也是十分不确定的, 毫无疑问它比图5A中波的动量更不确定得多. 正确的测不准关系应该是一个不等式: 可以想象出一些波列, 其动量和位置的不确定性都是任意大的.

7 下面我们考虑三维空间中的波. 首先我们注意到关于一维波的讨论可分别应用于每个坐标方向. 设 x_α 和 p_α ($\alpha=1, 2, 3$)是粒子位置和动量的笛卡儿坐标. 我们有:

$$\Delta x_\alpha \Delta p_\alpha \geqslant 1 \qquad \alpha=1, 2, 3 \qquad (7a)$$

在另一方面,完全有可能存在这种情况: 波在 x_1 方向很好地局限在空间, 而波的动量可以在第二个方向上十分准确地确定, 为了看到这一点, 读者可以想象一个波包, 它被限制在围绕2-轴周围很小的区域内, 而沿着这个轴的方向却扩展到很大的范围. 于是可以准确地知道粒子(波包)的 x_1 坐标. 另一方面,沿着 x_2 轴的方向可以是一个延展到很远距离的严格周期性的波. 这就意味着可以准确地定出动量 p_2. 因此, 确定粒子的 x_1 坐标的精确度不会对确定动量分量 p_2 的精确度产生任何的限制. 于是我们得到普遍的关系式:

$$\Delta x_\alpha \Delta p_\beta \geqslant 0 \qquad \text{对于 } \alpha \neq \beta \qquad (7b)$$

不等式(7a)和(7b)是三维空间中的波(即粒子)的测不准关系.

8 为了作进一步的理解，我们再来考虑把任意的波的表示看成平面波的迭加：

$$\psi(\mathbf{x},\ 0)=\int_{(\infty)}d^3(\mathbf{p})A(\mathbf{p})\exp(i\mathbf{x}\cdot\mathbf{p}) \tag{8a}$$

其中

$$A(\mathbf{p})=(2\pi)^{-3}\int_{(\infty)}d^3(\mathbf{x})\psi(\mathbf{x},\ 0)\exp(-i\mathbf{x}\cdot\mathbf{p}) \tag{8b}$$

在第五章第39—44节中我们曾讨论过这种表示. 正如我们在那里已经讲过的那样，实际上这两个方程式中任何一个式子可推出另一个式子.

现在假定函数 $A(\mathbf{p})$ 是很好地局域化在动量空间. 这意味着 $A(\mathbf{p})$ 只在某一点 $\mathbf{p}=\mathbf{p}_0$ 的邻近有大的数值而在其余的地方它的数值都是很小的. 为简单起见，我们假设除了 $\mathbf{p}_0$ 附近非常小的范围之外 $A(\mathbf{p})$ 都等于零. 如果我们考察一下定义 $\psi(\mathbf{x},\ 0)$ 的积分式，我们从直观上预期，在这种情况下波函数 $\psi(\mathbf{x},\ 0)$ 在位置上就很不确定. 波函数 $\psi(\mathbf{x},\ 0)$ 看起来大致象动量为 $\mathbf{p}_0$ 的平面波. 为了理解这一点，读者可以考虑一个极端的情况：$A(\mathbf{p})$ 不等于零的范围缩小为一点. (在接近这个极限时，毫无疑问我们必须同时增大振幅 $A(\mathbf{p})$，否则给出 $\psi(\mathbf{x},\ 0)$ 的积分就要趋于零了.)

作者希望读者能够"看出来"：函数 $A(\mathbf{p})$ 愈集中，波函数 $\psi(\mathbf{x},\ 0)$ 弥散愈广，方程式(8a)和(8b)之间有着显著的对称性，从而我们还可以断言：函数 $\psi(\mathbf{x},\ 0)$ 愈集中，函数 $A(\mathbf{p})$ 分布愈广. 假定函数 $\psi(\mathbf{x},\ 0)$ 非常集中，即只在 $\mathbf{x}_0$ 周围很小的一个区域内有很大的数值，其意义是粒子的位置十分确定. 可是在这种情况下，动量就很不确定，因为在很大范围内的动量都对展开式(8a)有贡献.

9 可以用更加精确的形式来表达这些概念. 我们可以把函

数 $A(\mathbf{p})$的集中程度和 $\psi(\mathbf{x}, 0)$的集中程度联系起来．其结果是一个*测不准关系*：确定位置的准确度和确定动量的准确度成反比．因为我们已经答应读者，在这本书中不应用傅里叶积分理论，所以我们就不给出测不准关系的严格推导[1)]．对我们说来，重要的是要定性地懂得测不准关系是怎样引起的．正如我们已经看到的那样，这个概念是极其简单的．如果要非常准确地定出粒子的位置，波列就必须非常之短．但是这个条件和准确定出动量的条件是互相矛盾的，若要准确定出动量，在一个包含许多完整周期的范围内波列必须类似于正弦波．如果我们接受对粒子所作的波的描写，我们就一定要断言：不能以不受限制的精确度同时知道粒子的位置和动量．

请读者回忆一下第一章第20—26节关于测不准关系的物理意义的简单讨论；现在应该完全清楚了，这些关系并不是单纯描写我们的测量仪器不幸和不可避免地“干扰”经典粒子的有秩序的经典运动．相反，它们是说明了一个限度，超过这一限度，就不能把经典概念外推了．谈论量子力学粒子（波包）在同一时刻的*精确*位置和*精确*动量简直是没有丝毫意义的．

10 必须满足什么样的条件才能使我们可以把电子看作经典粒子，或者说看作“带电的弹子”呢？这些条件和使几何光学有效的条件是类似的．粒子所通过的仪器的线度一定要比波长大，否则我们就会看到波动所特有的衍射效应．令 d 表示仪器的某个线度，d 可以是透镜的直径或者是狭缝的宽度．令 λ 表示粒子的德布罗意波长．假若要求经典的粒子描述足够正确，就必须使 $d \gg \lambda$．因为 $\lambda = 2\pi/p$，我们可以把这一判据写成下面的形式：

1) 关于这些关系式的标准推导，读者可参看：L. I. Schiff, *Quantum Mechanics* (McGraw-Hill Book Company, New York, 1968) 3rd edition p. 60.

$$dp \gg 1 \tag{10a}$$

在厘米·克·秒单位制中，这个判据成为 $dp \gg \hbar$. 这和我们在第一章第 20--26 节中讨论的是同一个判据.

11 为了说明测不准关系的含义，我们研究一下特定情况下指定给一个电子的经典轨道可以达到什么样的精确度. 图 11*ABCD* 举例说明了这种情况. 电子束从左方入射到左边的那个屏上. 每一个电子都可以用平面波来描写. 屏上有一个宽度为 d 的狭缝. 我们希望这样选择 d 的大小：使得电子束通过狭缝后打在右边的那个屏上所产生的斑点尽可能地狭窄. 两个屏之间的距离是 L.

我们假定电子都具有相同的入射动量 p. 假定电子通过左边屏上的狭缝以后，横向的位置不确定性是 d. 于是下式给出横向动量的不确定性：

$$\Delta p \sim \frac{1}{d} \tag{11a}$$

如果我们假设 Δp 比 p 小很多，我们可以把(11a)式重新用角度 θ 的不确定性 $\Delta\theta$ 表示. θ 是出射电子相对于原来的入射方向之间的角度. 我们有：

$$\Delta\theta \sim \frac{\Delta p}{p} \sim \frac{1}{pd} \tag{11b}$$

用 Δx 作为右边的屏上斑点大小的量度. Δx 的大小由下面两个因素决定：左边屏上开口的大小和由于在狭缝上衍射引起的波的弥散程度(参看图 11*A*). 从而我们可以写下：

$$\Delta x \sim d + L\Delta\theta \sim d + \frac{L}{pd} \tag{11c}$$

因为波长 λ 满足：$\lambda = 2\pi/p$，我们可以把(11c)重新写成下面的形式：

$$\Delta x \sim d + \frac{\lambda L}{d} \tag{11d}$$

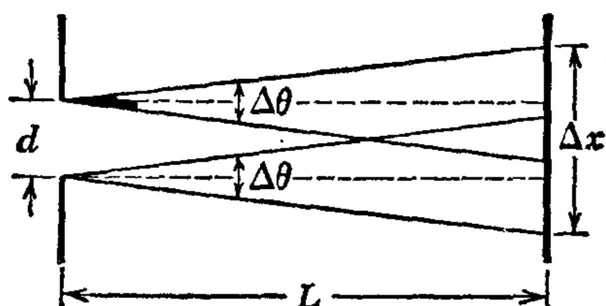


图 11*A* 我们企图利用左边屏上的狭缝来限制从左方射来的宽电子束以得到窄电子束．电子束在狭缝上产生衍射，电子离开狭缝后偏转角的不确定性 $\Delta\theta$ 反比于狭缝的宽度 d。右边屏上斑点大小由 $\Delta x \sim d + L\Delta\theta$ 给出。

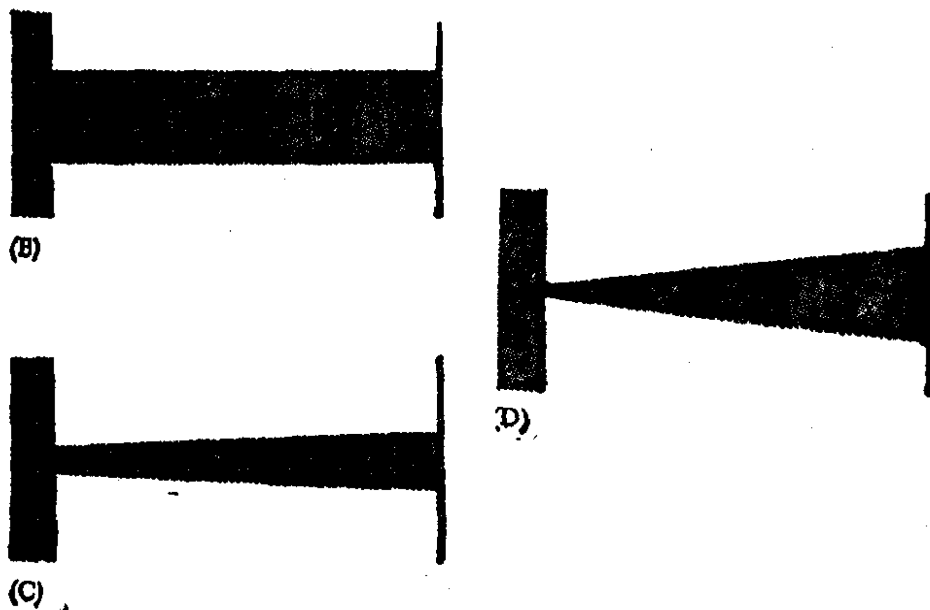


图 11*BCD* 这三张十分简略的图说明电子束的宽度如何依赖于出射狭缝的宽度．(注意这三个图中电子的波长比图 11*A* 中的波长短．)在 *B* 中，由于出射缝很宽，右边屏上的斑点很大．如果我们把缝的宽度做得很小，象 *D* 中那样，由于衍射效应，右边屏上的斑点也就很大．选择 $d \sim \sqrt{\lambda L}$，我们可以得到最小的斑点．在这个情况中，斑点的大小和缝宽同数量级．图 *C* 意在表示出这种最佳选择．

在最后一项中，我们省略了因子 2π，我们这里只关心数量级的估计．由于略去因子 2π 后最后的结果将更为简洁，所以我们把它略去了。

可以看出，如果把 d 做得太小，(11d)中的第二项就会由于衍射效应而变得很大，而如果缝宽 d 大，第一项就大．算出 d 的最佳值 d_0，以使按(11d)估计的 Δx 具有最小值 $\Delta x_{\min}$，这是一个简单的微积分问题．于是我们得到：

$$d_0=\sqrt{\lambda L},\quad \Delta x_{\min}=2d_0=2\sqrt{\lambda L} \tag{11e}$$

在这最佳情况中，右边屏上斑点的大小等于左边屏上狭缝大小的两倍．(对于这个因子 2 不必过分从字面上来看，不要忘记我们现在只是作数量级的估算，并且已令 $2\pi\sim1$．)假定 $L=1$ 米，并设电子能量为 150 电子伏．假定电子的波长为 1 埃，而 (11e) 的估算告诉我们右边屏上的斑点原则上可以小到 0.02 毫米．因此从宏观的观点来看两个屏之间电子的"径迹"是细的，而且是十分确定的．

12 详细地研究在什么样的条件下物理体系服从经典物理学的定律这是一个很有意义并且是有内容的问题．有些人把这里需要做的事叙述如下：先用量子力学的方法来解问题，然后令 $\hbar=0$，从而得到经典极限．这个概念是不正确的．我们不能假设 $\hbar=0$，因为我们知道，$\hbar$ (适当选取单位)实际上等于一．*真正的*问题是要说明，服从量子力学定律的体系(*所有的*物理体系都是如此的)，怎样会*表现为*服从经典物理学的定律，或者说以相当的精确度服从经典定律．在研究这个问题的时候，象我们在以前所举的例子中那样，选取使 $\hbar=1$ 的单位是一个很好的想法．因为这样就可以迫使我们面对真正的问题．

怎样达到经典极限这个问题有几个方面，不可能用单一语句来给出详尽无遗的说明．如果我们把"经典极限"理解为经典的质点动力学，一个条件是仪器装置必须不易观察到衍射效应．在上一节里我们已经讨论过这一点了．假定一个波包要保留局域化，并且具有十分明确的轨道，可以把这个轨道

说成是粒子的轨道，那末决定轨道的狭缝的线度必须比德布罗意波长大得多．可是经典动力学并不是唯一的"经典极限"．找出在什么条件下经典电动力学理论有效也是很有意义的．在这个情况下，经典极限的条件并不是不能观察到衍射效应，恰巧相反，却是要求这里的许多单个光子不表现出粒子性．

我们不准备更进一步去讨论经典极限的问题．目前我们对这个问题有粗浅的定性了解就已经足够了．读者可以自己去思考这些问题．正如我们的讨论所表明的，我们所说的"经典极限"的意义取决于所研究的体系，这是要去领会的要点．

13 作为涉及测不准关系的讨论的进一步例证，我们试图在这个关系的基础上估计氢原子的结合能，就象我们在第二章第26节中答应要做的那样．在这个讨论中我们要用厘米·克·秒单位制．在这个单位制中测不准关系(11a)具有下面的形式：

$$\Delta x \Delta p \gtrsim \hbar \tag{13a}$$

为了进行估计，我们假定在质子静电场中的电子总能量的经典表达式：

$$E=\frac{p^2}{2m}-\frac{e^2}{r} \tag{13b}$$

在量子力学中仍然是有意义的．不过这里的变量 p 是指电子波的动量，而变量 r 是波的某种"位置坐标"．

E 的表达式中的第一项显然是正的，而第二项却是负的．基态能量是体系的最低可能能量，我们知道它必定是负数，否则就不是束缚态．*在经典物理学里*，我们可以要结合能有多大就有多大，这只要给电子选择一个半径非常小的轨道就行了．对于这样的运动状态，位置的不确定性很小．如果我们也试图根据量子力学精神来处理问题．从测不准关系，我们

可以断定动量的不确定性必定很大，其意义就是 $p^2/2m$ 很大．换言之，如果我们试图通过把 r 取得很小，使势能变得很大(负的)，那末动能也很大．如果动能项"占优势"，就会使总能量很大．另一方面，假如我们减小 p 使动能项变小，r 就必须增大，于是负的势能数值变小．我们可以想象会有某些最佳的轨道半径，使总能量具有最小的数值．

14 为了说明动能和势能之间的这种"平衡"怎样导致束缚态，我们作一个粗略近似如下．用 r 代替位置的不确定性，用 p 代替动量的不确定性，我们把测不准关系重新写成下面的形式：

$$rp \sim \hbar \tag{14a}$$

或者，为明确起见，我们假定：

$$rp = \hbar \tag{14b}$$

我们现在应用关系式(14b)，从总能量的表达式(13b)中消去 r．我们得到：

$$E = \frac{p^2}{2m} - \frac{e^2 p}{\hbar} \tag{14c}$$

能量 E 作为 p 的函数在 $p = p_0$ 处有一个极小值．令 E 对于 p 的微商等于零以求出 p_0．即：

$$\left(\frac{\partial E}{\partial p}\right)_{p=p_0} = \frac{p_0}{m} - \frac{e^2}{\hbar} = 0 \tag{14d}$$

解出 p_0，并定义 $r_0 = \hbar/p_0$．于是我们得到：

$$p_0 = \frac{e^2 m}{\hbar}, \qquad r_0 = \frac{\hbar^2}{e^2 m} \tag{14e}$$

以及

$$E = \frac{p_0^2}{2m} - \frac{e^2 p_0}{\hbar} = -\frac{e^4 m}{2\hbar^2} = -R_\infty \tag{14f}$$

把这些结果和第二章第 23 节所得到的结果进行比较，我们发现方程(14f)所给出的能量 E 恰好正确．方程式(14e)

给出的“半径”r_0也是“正确的”，它就是玻尔半径$r_0=a_0=0.53\times10^{-8}$厘米.

15 我们通过粗略的推论求出了正确的结合能，这确实是个“意外”. 然而，我们是不是得到了精确的能量的数值并不是重要的问题. 重要的是我们得出了结合能和原子大小正确的数量级，以及我们能够在波动理论的基础上理解原子为什么不崩溃. 原子结构是两个条件折衷的结果. 基态能量是原子能够存在所具有的最低可能能量，这个能量包括符号相反的

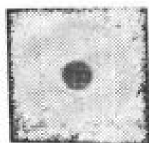


图 15A 如果把电子限制在原子核周围很小的空间内，电子位置的不确定性很小. 但是动量的不确定性就一定很大. 这就意味着它的动能也必须很大. 它的势能就当然是负的，而且在数值上也很大.

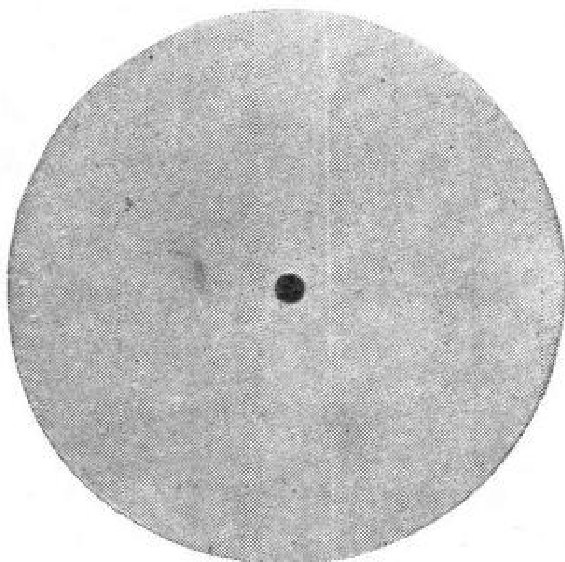


图 15B 如果希望动能非常小，我们必须给电子足够的空间. 电子位置的不确定性必定很大，那末电子离开原子核的平均距离就很大，势能的数值就很小.

基态是这两个条件折衷的结果，它的总能量是和测不准关系一致的最小的可能数值.

两项之和．如果我们通过把电子限制在原子核周围极小的空间以增大负的一项，即势能项，那末由于波具有很大的动量而使动能增大．在另一方面，我们不能使波过分弥散，否则势能项就会变得很小了．基态就相当于可能的“最佳”折衷方案．图 15AB 示意地说明了这些考虑．

我们的讨论也向我们表明，原子中经典轨道的概念和波动图象是根本不相容的．在上一节里我们发现，氢原子中电子位置的不确定性是和玻尔半径 a_0 同数量级的．这个估计显然可以应用于各个方向的位置坐标．在这种情况下，谈论半径为 a_0 的圆周轨道是毫无意义的．

16 下面我们应用测不准关系来对核力强度作粗略估计．我们考虑原子核里面一个被限制在半径大约为 $r_0=1.2\times10^{-13}$ 厘米的球内的核子．测不准关系告诉我们，动量的数量级至少为 $p\sim\hbar/r_0$，核子动能的数量级一定是：

$$E_{\rm kin}\sim\frac{1}{2M_p}\left(\frac{\hbar}{r_0}\right)^2\sim10\ \text{兆电子伏} \tag{16a}$$

因为核子被束缚在原子核里面，平均势能（用 $\langle U\rangle$ 表示）必定是负数，它的数值应该比动能大，我们可以断言：

$$-\langle U\rangle\gtrsim10\ \text{兆电子伏} \tag{16b}$$

这个估计是十分粗糙的，但它的确给出了所涉及的数量级的概念．

17 我们注意到，可以用类似的论证来驳斥原子核是由质子和电子所组成的观点．如果我们看看方程式（16a），我们注意到动能反比于粒子的质量．从而我们可以作出结论，电子的平均势能比（16b）式算出的数值大了大约 2000 倍．这与有关电子的相互作用主要是电磁性质的实验证据完全不符．

18 我们可以提出和位置-动量测不准关系完全相类似的时间-频率测不准关系．令 $f(t)$ 为某一物理过程的（复数）振幅，

例如 $f(t)$ 可以是空间某一固定位置上电磁波的振幅，这个振幅是时间 t 的函数.如果这个波是原子发射出来的，它将是一个有限长度的波列. 在时间 t 趋向于 $+\infty$ 或 $-\infty$ 时，这个振幅趋向于零. 可以将这样的波看作一些单色波的迭加，我们可以用傅里叶积分来表示波分解成它的单色分量：

$$f(t)=\int_{-\infty}^{\infty} d\omega g(\omega) e^{-i\omega t} \tag{18a}$$

其中函数 $g(\omega)$ 由下式给出：

$$g(\omega)=(2\pi)^{-1}\int_{-\infty}^{\infty} dt f(t) e^{i\omega t} \tag{18b}$$

正如我们在第五章中所讨论过的那样；对于许多种“正规”的函数 $f(t)$ 或 $g(\omega)$，这两个积分中的任何一个都可推导出另一个积分，这是一个定理. 根据这个定理对于任意一个与时间有关的过程我们都可以用它的简谐分量来分析该过程.

假如(18a)中的函数 $g(\omega)$ 只在紧靠着 $\omega=\omega_0$ 的附近具有大的数值，那末我们可以说频率是十分确定的：振幅 $f(t)$ 表示的是一个接近于单色的过程. 在一段长的时间间隔内，振幅 $f(t)$ 的近似形式是 $f(t)=Ae^{-i\omega t}$. 在另一方面，假如振幅 $f(t)$ 只在 $t=t_0$ 附近某个小的时间间隔内有大的数值，这相当于 $f(t)$ 表示一个很尖锐的脉冲，这种情况下频率就很不确定. (18b)给出的函数 $g(\omega)$ 将在相当大的频率范围内相当可观. 不能都以任意高的精密度来确定与该过程相关的频率和这一过程发生的时间. 频率的不确定性 $\Delta\omega$ 和过程进行时间的不确定性 Δt 服从测不准关系：

$$\Delta\omega\Delta t\geqslant 1 \tag{18c}$$

很明显，得出这一测不准关系的推理和得出位置-动量测不准关系的推理是完全相似的. 我们把我们的概念表示在图

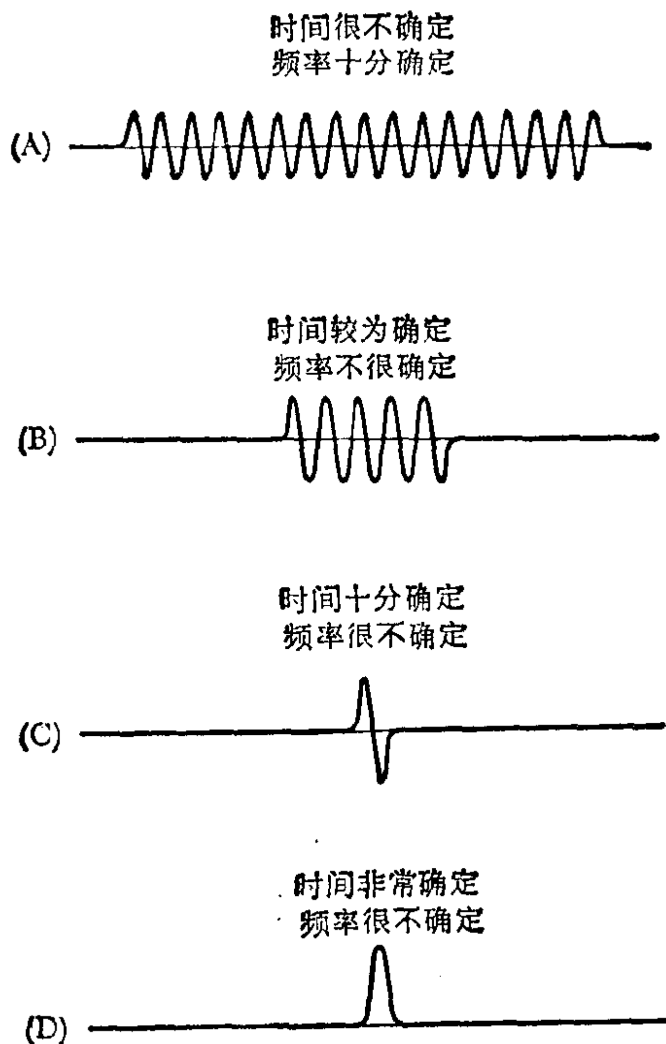


图 18*ABCD* 时间频率测不准关系的图解．除了标题不同以外，这些图和图 5*ABCD* 是一样的．

18*ABCD* 中．

19 读者会想起我们在第三章第 20—23 节中讨论过激发态平均寿命 τ 和相应的能级的有限宽度 ΔE 之间的关系．我们断言：能级宽度反比于平均寿命．我们现在从时间-频率测不准关系的角度来讨论这个关系．

假定体系通过发射一个光子从激发态衰变到基态．设激发态的能级宽度为 ΔE，那么光子频率的不确定性就是 $\Delta\omega=\Delta E/\hbar$．发射过程的持续时间约为平均寿命 τ．所以发射时间

的不确定性约为 τ. 鉴于(18c)式，我们可以写下：

$$\tau \Delta\omega \sim 1 \text{ 或 } \tau \Delta E \sim \hbar \tag{19a}$$

我们宁可写成一个近似的等式而不写成一个不等式. 这里我们处理的是一个指数式衰减的简谐振荡，如图 19A 所画的那样. 这一过程的振幅显然和图 18A 中所画的振幅比较近似. 图 18A 中振幅的不确定性乘积比图 18B 中所画振幅的不确定性乘积具有更小的数值. 图 18B 中，无论时间或频率都是很不确定的.

关系式(19a)恰是我们在第三章第 20—23 节中用似乎是不同的论证方法导出的关系式. 如果读者对这个事实比较深入地思考，他会注意到这两种推导的基本思想并没有很大的差别. 可以把第三章的论证的特点说成是“乔装的傅里叶分析”.

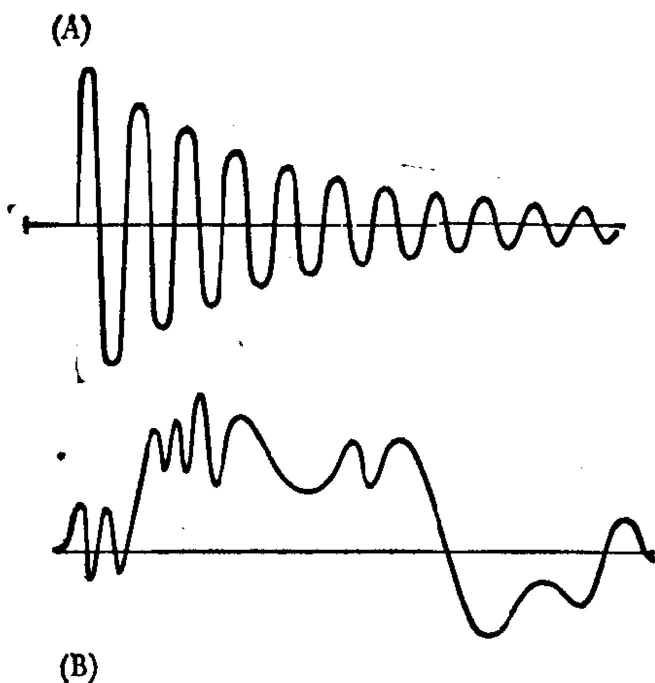


图 19AB 上面的图表示指数式衰减的简谐振荡. 很容易看出，这个过程的频率比之于下面图 19B 中的曲线所描绘的“不规则的”过程来说，更为确定. 对于上面的曲线，可以合理地把普遍的测不准关系不等式当作是一个近似的等式.

二、测量和统计系综

20 在这章的其余部分里我们将讨论物理学中的测量过程．我们将运用我们现在已有的知识分析一些简单的物理情况来做这件事．我们这里的目的是寻求量子力学的思想模式而不是去试图建立表述测量的某种完整的理论．物理测量具有极其丰富多样的性质，简短的讨论是不可能反映出这种多样性．当我们想要理解某一理论的含义时，当然要去考察能够最清楚地显示我们感兴趣的特殊方面的高度理想化的实验情况．我们暂时不考虑在实际世界中会遇到的所有实验技术上的困难，所以我们关于测量的理论讨论远不是实验室中实际发生过程的忠实报道．

21 为方便起见，常把测量过程看成包含两个阶段：被研究系统的制备阶段，紧接着是实际测量阶段．这无疑是简略的描述，因为制备阶段和测量阶段之间往往没有明显的界限，实在也可以将测量过程的某些部分看作是制备过程的一部分，反之亦然．

研究散射实验的时候，分两个阶段来分析是特别合适的．我们考虑粒子束中的粒子和靶中的粒子之间的相互作用．制备阶段涉及靶的安置和在加速器中产生粒子束．测量阶段涉及观察从发生相互作用区域内出射的粒子．用光线做的实验就属于这一类．制备光子是在光源中进行的，光源可以是配备有透镜系统、偏振器、棱镜、狭缝等等的某种“灯”．测量是在某个观察区域内进行，观察区域在物理上是和光源分开的；测量仪器可以是光电倍增管加上其他光学元件．

22 微观物理学中测量的特点是对以同样方式制备的体系进行重复多次测量．结果的表述具有典型的统计特色：我们说

在 N 个入射光子中平均有 N' 个光子被特定的光电倍增管记录下来. 单次实验或单次测量只涉及到一个光子，但是我们最终的报告涉及到大量相同的单次实验的统计平均.

我们知道，两次单独的实验原则上并不是全同的，因为它们是在两个不同时刻进行的. 但是，我们认为自然定律对于时间位移是不变的，所以什么时候进行实验是无关紧要的. 由于这个原因，只要在每一基元实验中都以同样方式制备体系，就可以按这个意义，将一系列重复的单个实验看作是一组全同的实验.

23 一个射束包含许许多多粒子，但如果射束强度足够低，每个独立的散射事件将只涉及来自射束的一个粒子. 在实物粒子的散射实验中以及在大多数光子束实验中，通常出现的总都是这种情况. 我们可以说这种射束是*单粒子束*. 用一个射束来做实验是把单个基元实验重复多次（一次只包括一个粒

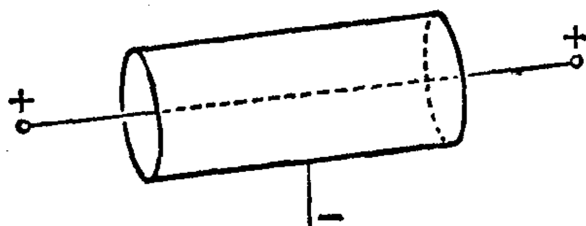


图 22A 盖革-弥勒计数器的非常粗略的示意图. 器件由封闭在外壳内的两个电极构成，壳内填充适当的气体. 图中正电极是一根细金属线，负电极是以该金属线为中心的圆柱体. 两电极间保持约1000伏的电势差. 穿过电极之间的空间的高速带电粒子使得沿路径的气体分子电离. 如此产生的电子和离子向电极加速，只要电势差足够高，就会出现二次电离，以致引起电子雪崩. 可以将产生的脉冲电流放大并记录下来. 就这样计数器能计数单个带电粒子. 当然，必须把这个装置调整到使每一个脉冲之后放电会"熄灭". 这可以通过两种方法达到：或者用电子学方法利用辅助线路在每一脉冲之后瞬时地降低电压，或者采用一种填充气体会使放电自动熄灭. 采用后一种方法的管子叫做自淬灭管.

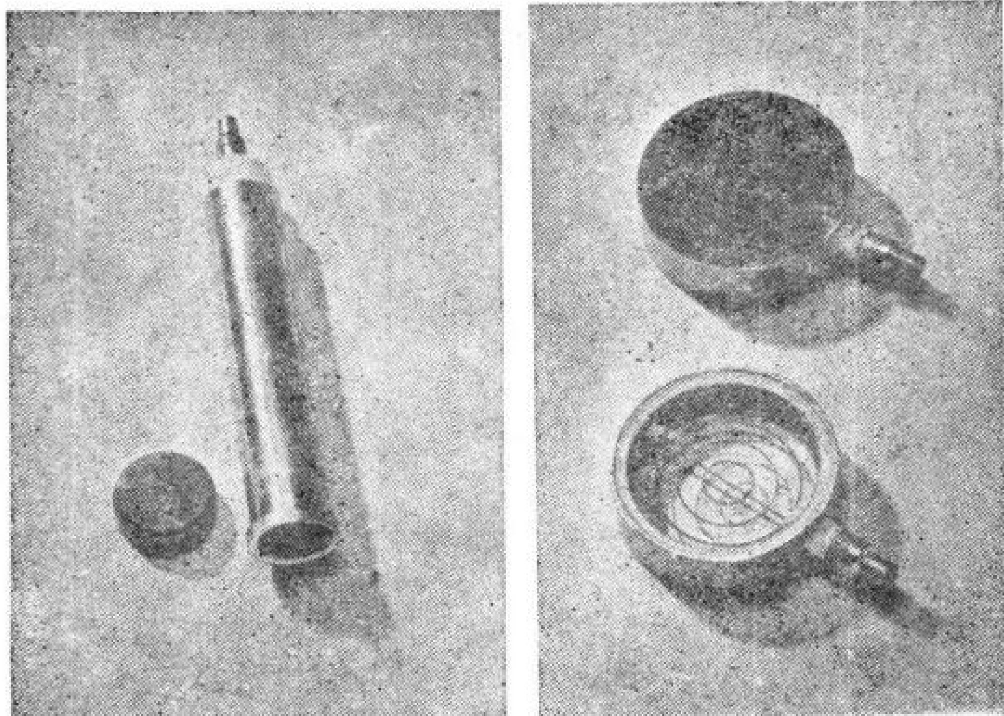


图 22B、C 两种盖革-弥勒计数器商品. 重要的设计考虑是要使被计数粒子进入计数管起作用的空间. 为此目的，图上的计数器配有一片很薄的云母窗. 图 B 的计数器是自淬灭计数器，它适用于 α 粒子，β 粒子和 γ 粒子的计数. 计数器长约 5 吋，直径约 3/4 吋. 在管的下端可以看到云母窗. 对于高速 β 粒子的探测效率约百分之八十五. 图 C 所示的计数管设计成具有尽可能大的进入窗. (直径约 $1^3/_4$ 吋.) 金属外壳是一个电极，通过云母窗可以看到另一电极.

子)的实际方法.

散射实验中所用的靶可以是固体材料的薄片或箔，也可以是充满气体或液体的容器. 如果射束强度相当高，很可能在靶上同时发生两次或多次相互作用. 我们把射束描写作单个粒子束并不因而失效. 因为在靶上两个(或几个)同时发生的事件是彼此完全独立的. 它们相当于两个独立的基元实验. 只不过它们正巧同时发生而已.

原则上我们可以用强度非常低的射束来做实验，譬如说每分钟一个粒子，那末我们可以肯定一次只有一个粒子和整个靶相互作用. 既然把射束实验当作一连串的单个粒子实验

在概念上更简单，下面我们就假设，所用的射束强度如此之低，一次只有一个粒子通过．在实际工作中，我们不去有意限制射束的强度，恰巧相反，通常总是试图用我们可能达到的最强的射束来做实验．

24 为了说明我们的思想，考虑用一束光做的实验．我们分析单个实验，即从光源发出的一个光子到来时发生的一系列事件．假设检测系统是装有光子计数器(例如光电倍增管)的光学器件．光子到达时我们发现某些计数器发出“卡嗒”声，而另一些计数器却没有出声．我们在实验记录本中记下卡嗒声的计数器．我们设想所有探测器在下一个光子到来之前都回到原始状态．当下一个光子真的到来时，另一些计数器出声．这些计数器不一定都是上一次测量时出声的那几个．我们再把事实记录下来，重新调整好探测器，等待下一个光子．就这样继续下去直到重复基元实验很多次，譬如说共有 N 个来自光源的光子到达．

对于这个体系的一次测量包括对所有计数器的观察，所记录的基本数据是某个计数器是否卡嗒发声．经过一序列的 N 次单个测量，我们可以说：

(a) 对于每一个入射光子计数器 1 卡嗒发声的平均次数为 p_1．这一平均值在实验上定义为

$$p_1=\frac{N_1}{N} \tag{24a}$$

其中 N_1 是计数器 1 在连续 N 次单个实验中卡嗒发声的次数．

(b) 单个实验中对于每一入射光子计数器 1 和 2 都卡嗒发声这一事件发生的平均次数为 p_{12}．这一平均值实验上定义为：

$$p_{12}=\frac{N_{12}}{N} \tag{24b}$$

其中 N_{12} 是一连串基元实验中计数器 1 和 2 都卡嗒发声的次数.

(c) 计数器 2 每卡嗒一次计数器 1 卡嗒发声的平均次数 $p(1:2)$. 这一数字定义为:

$$p(1:2)=\frac{N_{12}}{N_2} \tag{24c}$$

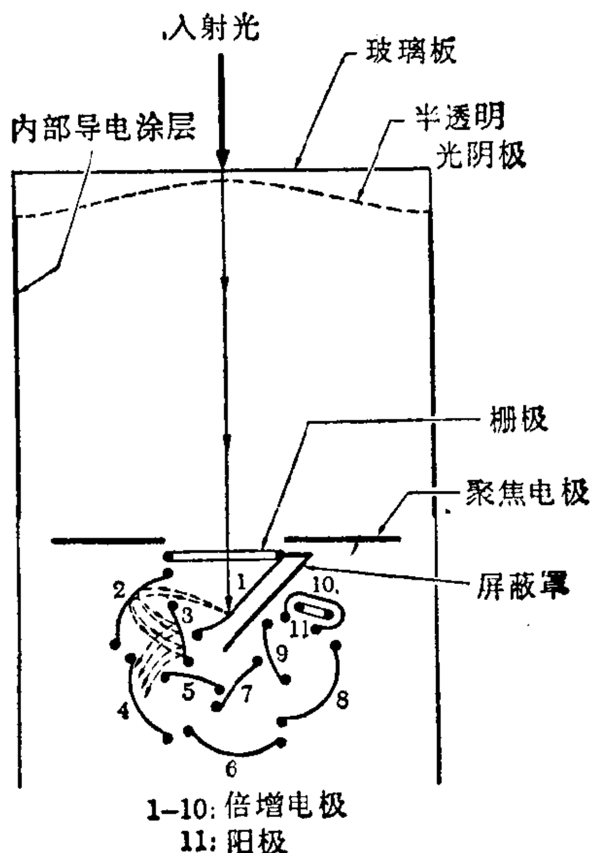


图 24A 已广泛地使用光电倍增管作为光子探测器. 图中简略地画出了这种管子结构. 光子通过管子的玻璃面板进入管内, 使面板里面一层非常薄的硷金属膜放出光电子. 电子被加速并会聚到第一个倍增电极(图上用数字 1 表明), 每个打到第一个倍增电极上的电子产生好几个二次电子, 这些二次电子被加速并会聚于第二倍增电极, 在那里又产生了更多的电子. 二次电子又被加速并会聚于下一个倍增电极. 这样继续下去. 对于探测到的每一个光子都引起一次雪崩电子到达阳极, 阳极和外部放大器相耦合. 由此可见这种器件实际上是一个在同一玻璃壳内带有放大器的光电管. 电流放大倍数很容易达到 10^8 的数量级.

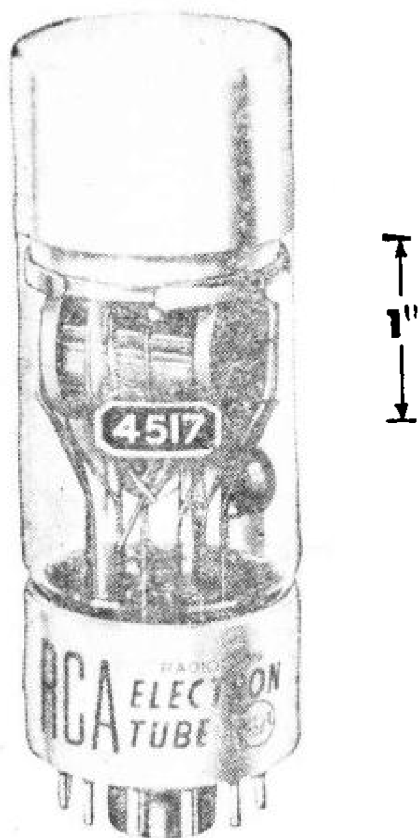


图 24*B*　一种光电倍增管的商品．在管子中部可以看到倍增电极，它的排列大体上象图 24*A* 中一样．光敏阴极在管子上端的里面，这一种管子为配合闪烁计数器使用的．它的特点是量子效率非常高．(参见图 24*C*)

其中 N_2 是计数器 2 卡嗒发声的次数，N_{12} 是计数器 1 和 2 都卡嗒发声的次数．

25　如果我们用上面的方式来表达所得结果，我们只表达了直接观察到的东西：上述数字是我们的原始数据．然而，我们可以进行抽象，并把测量结果报导如下：

(a) 在我们的实验装置中计数器 1 卡嗒发声的几率是 p_1．

(b) (在单个实验中) 计数器 1 和计数器 2 同时卡嗒作声的几率是 p_{12}．

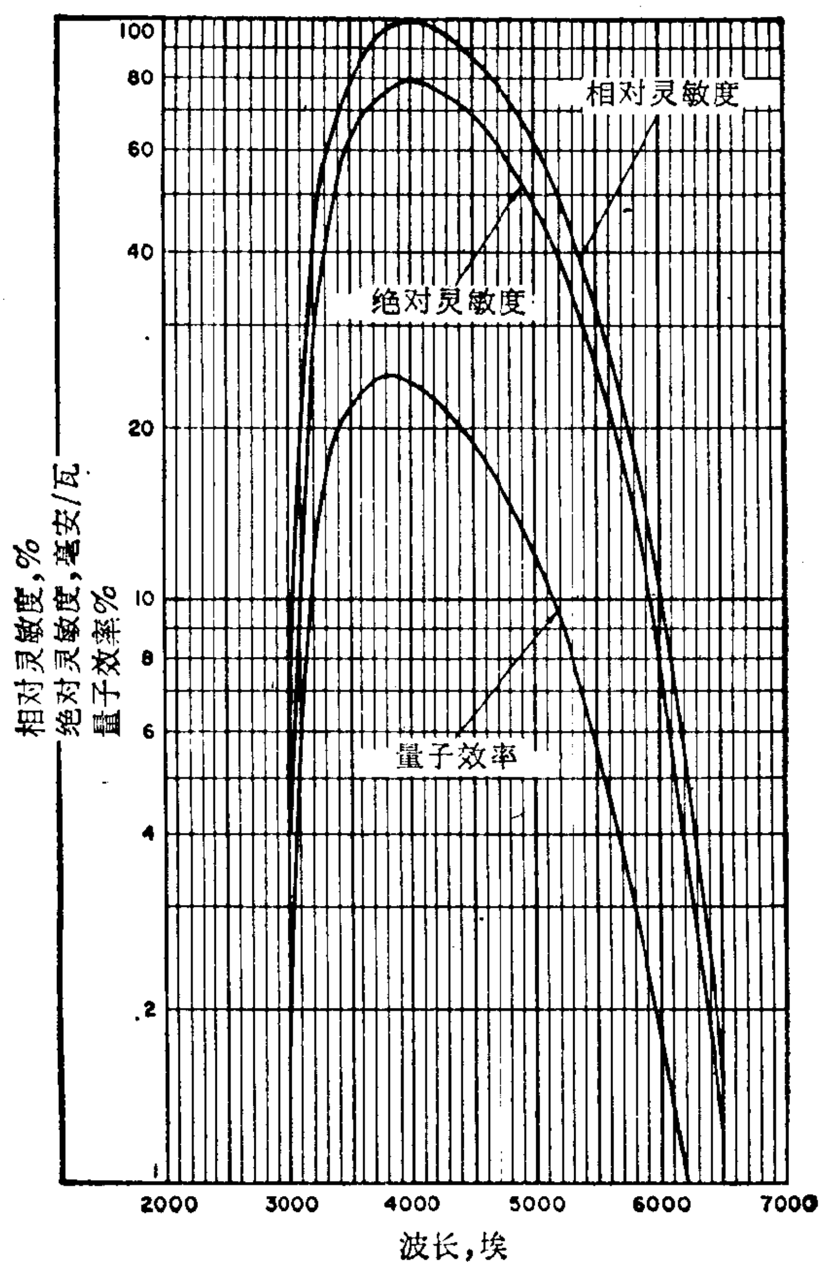


图 24*C* 图 24*B* 的光电倍增管的探测效率图. 注意标有"量子效率"的曲线. 它描写探测光子的几率作为波长的函数. 几率的最大值约为百分之二十五. 对于光电管来说这是十分高的效率. 曲线取自制造者描述管子的小册子.

(c) 已知计数器 2 卡嗒作声，计数器 1 卡嗒发声的几率为 $p(1:2)$.

如果我们用这种方式表达我们的结果，显然我们作了一个假设，这个假设是：如果我们把实验无限制地进行下去，数字 N_1/N，N_{12}/N 和 N_{12}/N_2 都将趋于确定的极限．这些假设的极限就是我们要去测定的．我们用几率 p_1, p_{12} 和 $p(1:2)$ 来表示这些极限．既然在任何实际的一系列实验中 N 必定是有限的，因此极限的存在的假设，以及只要选择 N 足够大，就能以任意的精确度和任何所需的确信程度来确定这个极限的假设，都不过是一种期望．这一期望的性质引起了许多哲学上的争论．我们应当把大自然具有这种类型的规律性作为一个经验事实．

因此可以用几率来表述一系列 N 个单个实验的结果．数字 p_1，p_{12} 和 $p(1:2)$ 就是其中的一些特例．数字 p_1 是计数器 1 卡嗒作声这一事件的单纯几率．p_{12} 是两个事件同时发生的几率，$p(1:2)$ 是每发生一个事件而另一事件发生的条件几率．我们可以考虑同样性质的许多其他几率，譬如说计数器 2 和 3 卡嗒出声而别的计数器不发声，计数器 1 卡嗒作声的几率，等等．

26 可以把我们的测量描写为在光源中以同样方式制备的大量光子所做的一系列实验．不过，我们稍微考虑一下"以同样方式"制备一批光子的意思是什么．假设在光源中有两盏相互无关的灯，譬如说一盏发射黄色光子的钠灯，和一盏发射蓝色光子的汞灯．在某一单个实验中的光子可以是黄色或是蓝色．这个颜色就是我们可以在实验中确定的标志光子特征的变量．假设我们对一长串的光子做这个实验．我们就可以报告，在任一特定实验中光子是蓝色的几率是 p_1，光子是黄色的几率是 p_2．我们假定两盏灯的强度保持稳定，因而这些几

率是可以重复的. 如果我们进行几轮多次重复的实验，每一轮实验我们都得到同样的几率 p_1 和 p_2.

是不是我们想说，在这种情况下，在光源中所有的光子都是以“同样的方式”制备的呢？很难立即就看出来这是否是适当的表达方式. 人们可以争论说，我们对于两盏灯的安排就在制备过程中引进了偶然因素，而只要我们在每一次只有一盏灯开着的情况下进行观察就很容易避免这种偶然因素. 或许我们不应当说都是以同样的方式制备光子的，除非可使我们确信光子在某种意义上在最高的可能程度上是全同的.

这一情况的困难在于，对于每一种实验我们就都要确定是否都“以最高可能程度来同样地制备”粒子. 显然这并不是一个无足轻重的问题. 而且，从 p_1、p_2 以及描写探测器响应的任何其他几率都是稳定的和可重复的，在这个意义上说，两盏灯的实验和一盏灯的实验一样不错. 当然，这是确定计数率和几率的任何实验中必不可少的. 而且除非光源正是在这个意义上稳定的，否则第 25 节的讨论将是不恰当的、无意义的.

所以比较实际的是，如果可能保持光源稳定到这种地步以致所有的几率是稳定和可重复的，那末可以认为光子都是以相同的方式制备的. 这就是我们下面所要采用的见解.

27 在某种意义上，两盏灯的实验比一盏灯的实验更为现实. 在理想上我们宁可只开着黄灯做这个实验，但是在实验室中，“大自然”总是使蓝灯也开着(虽然它的强度可能很弱). 我们讨论两个例子来说明我们这里想的是什么.

图 27A 表示一个半真实的电子衍射实验. 这个实验的目的是观察由于 S_2 屏上的两个狭缝所产生的衍射图样. 电子从灯丝 F 发射出来，向着上面有一个狭缝的屏 S_1 加速. 设通过狭缝的电子动量为 p. 我们借助于放在距离第二个屏 S_2

的中心很远的计数器 D 来观察双缝衍射图样. 这一计数器可以沿图上所示的圆弧运动. 为简单起见，我们假定从计数器到双缝的距离是如此之大，因而可以认为连结计数器入射缝和 S_2 上两个狭缝的射线是互相平行的. (图上所示的并不是这样，因为如果我们正确地画图就很难看出屏 S_2 上的两个狭缝. 但是，这两条线平行与否并不影响讨论的实质.)

令 S_2 上两个狭缝间的距离是 $2a$, D 所探测到的辐射强度角分布 $I(\theta, p)$ 可以写成如第四章第 40 节所示的形式:

$$I(\theta, p)=4I_0(\theta)\cos^2(ap\sin\theta) \tag{27a}$$

其中 $I_0(\theta)$ 是我们用单缝所观察到的角分布[1].

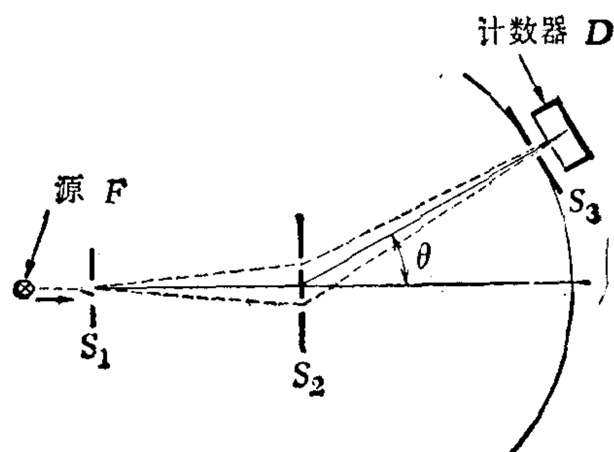


图 27A 说明第 27—30 节讨论的电子双缝衍射实验图解. 当计数器和入射缝 S_3 沿着圆弧运动时，观察计数率作为角度 θ 的函数. 如果 S_2 上两个狭缝的距离比波长大得多，如果电子源发出单一能量的电子，计数率作为 θ 的函数是变化极快的. 除非由计数器-狭缝装置所决定的角分辨率十分高，否则就观察不到衍射图样. 如果电子不是单一能量的，例如当电子源是一个简单的灯丝时，就属于这种情形，属于不同能量的花样彼此重迭，衍射极大可能被弄得轮廓不清以至不再能看出.

28 为了强调强度的角分布是 p 的函数，我们把强度写成 $I(\theta, p)$. 我们假设 S_2 上的两个狭缝的宽度是相等的并且比

1) 在这里的讨论中，我们所用的单位使 $\hbar=c=1$.

入射电子的波长小得多．因此在我们讨论的动量p的范围内，强度$I_0(\theta)$不依赖于p．在另一方面，我们假定光缝间的距离$2a$比波长大得多．为明确起见，假设对于射束的平均动量p_0，有$ap_0=\pi\times10^5$．于是对于这一平均动量我们得出角分布为：

$$
\begin{aligned}
I(\theta, p_0) &= 4I_0(\theta)\cos^2[(\pi\times10^5)\sin\theta] \\
&= 2I_0(\theta)\{1+\cos[(2\pi\times10^5)\sin\theta]\} \quad (28a)
\end{aligned}
$$

如果我们现在研究强度表示式，我们注意到它作为角度θ的函数是变化极快的．两个相邻极大值间的距离近似地为$\delta\cong10^{-5}/\cos\theta$.

所以如果我们想清晰地看到衍射图样，必需使探测装置的角分辨率非常好．从S_2的中心观察，探测器D的入射狭缝所张开的角度必须远小于δ，即远小于10^{-5}．我们假定情况正是如此．如果情况不是这样，即如果角分辨率比10^{-5}差很多，那末(28a)式极右边第二项的平均值实际上为零．我们观察到的将是两倍于单缝衍射的强度．

29 现在假设探测器的角分辨率非常好．因而可以清楚地看到所有电子都具有动量p_0的电子束的双缝衍射图样．不过，这样的射束是不现实的．电子并非以相同的能量从灯丝F发射出来，所以从狭缝S_1出射的电子并不都具有相同的能量．这是由于灯丝中电子热运动的缘故．我们以前曾经说过，无规热运动是“纯粹量子力学交响乐中的噪声”．我们现在来看噪声是怎样妨碍我们听见音乐的．

在现实的实验中，出射电子的动量p具有有限的弥散度．为简单起见，假设具有在区间$(p_0-q,\ p_0+q)$内的每一个动量的可能性是相等的．数量q表示动量的弥散度．为确定起见，我们假设$q=10^{-2}p_0$：即动量确定到百分之一的准确度．

如果我们用这样的一个射束来观察衍射图样，显然我们

不会观察到分布 $I_0(\theta, p_0)$ 而只能观察到 $I(\theta, p)$ 在射线的动量分布范围内的平均值. 我们用 $\bar{I}(\theta)$ 来表示这一平均强度. 它由下式给出:

$$\bar{I}(\theta)=\left(\frac{1}{2q}\right)\int_{p_0-q}^{p_0+q}dpI(\theta, p)$$
$$=2I_0(\theta)\left(1+\frac{\cos(2ap_0\sin\theta)\sin(2aq\sin\theta)}{2aq\sin\theta}\right) \quad (29a)$$

注意, 如果我们令式(29a)中的 q 趋于零, 我们又回到式(28a).

按照我们的特殊假设, $ap_0=\pi\times10^5$ 以及 $q=10^{-2}p_0$, 从(29a)我们可以断言:

$$|\bar{I}(\theta)-2I_0(\theta)|\leqq2I_0(\theta)\left|\frac{\sin[(2\pi\times10^3)\sin\theta]}{(2\pi\times10^3)\sin\theta}\right| \quad (29b)$$

在正前方, 即 $\theta=0$ 的方向上, 从(29a)我们可以看到 $\bar{I}(\theta)=4I_0(\theta)$. 在这个特殊方向上, 我们总是得到相长干涉而与动量 p 无关. 然而, 假设我们偏离正前方来进行观察, 譬如说满足条件 $|\sin\theta|>2\pi^{-1}\times10^{-1}\cong0.016$ 的 θ 方向上, 不等式(29b)告诉我们:

$$|\bar{I}(\theta)-2I_0(\theta)|<10^{-2}\times2I_0(\theta) \quad (29c)$$

在这些角度上很难观察到双缝衍射. 因为这时强度分布和单缝衍射的图样符合到百分之一以内.

30 应用我们在第四章第 41 节中讨论过的光子的经典弹子理论, 我们可以预料双缝实验的强度 $I^*(\theta)$ 由下式给出:

$$I^*(\theta)=2I_0(\theta) \quad (30a)$$

按照这种模型, 没有干涉现象, 正如我们已经说过, 这个预料是错误的, 它与实验不符合. 然而, 如果我们把它和(29c)中不等式所包含的预料相比较, 我们注意到预料(30a)有时似乎是正确的. 如果量子力学干涉效应由于某种原因被"冲掉", 我们就最后得到经典预言的观察结果.

我们的讨论是“向经典极限过渡”的一个方面的十分有趣的说明. 假设所考虑的实验中电子能量为10电子伏. 狭缝宽度 $2a$ 大约为0.04毫米，我们可以把它看作宏观量. 尽管如此，量子力学干涉效应肯定存在，但是为了观察到干涉效应，我们做实验时必须非常好地控制电子源使得动量的弥散 q 保持很小的数值. 不然的话，量子力学的音乐将消失在噪声之中.

31 作为干涉效应消失的另一个例子，我们考虑用迈克耳孙干涉仪观察干涉条纹的实验，图31A是这个实验的示意图. 从钠灯发出的光被一半涂银的镜子“分裂”. 实验要点是观察从反射镜1和2反射回来的两束光线之间的干涉. 我们把干涉仪的两条“臂” L_1 和 L_2 画成不一样长，于是两束光线的路程差就是 $d=2(L_2-L_1)$. 问题来了：是不是对于任意大的 d 都可以观察到干涉条纹？

问题的答案是：原则上是的，但实际上却不是. 光波波长的精确度给可以观察到干涉条纹的光程差规定了一个限度. 实际上波长总不可能有理想的精确度.

假定从光源发出频率为 ω 的光子. 从反射镜2反射回来的那一部分光子将比从反射镜1反射的那一部分位相落后一个数量 $\delta(\omega)$：

$$\delta(\omega)=\omega d=2\pi\left(\frac{d}{\lambda}\right) \tag{31a}$$

其中 λ 是波长. 下面考虑两个不同的频率 ω' 和 ω''. 对这两个频率的光，位相落后是不同的，其差数由下式给出：

$$\delta(\omega')-\delta(\omega'')=(\omega'-\omega'')d \tag{31b}$$

如果这个差数的数值十分小，即 $|\delta(\omega')-\delta(\omega'')|\ll\pi$，那末，这两个频率的干涉条纹在很好的精确度下是相同的. 在另一方面，假定这个差值等于 π，即 $|\delta(\omega')-\delta(\omega'')|=\pi$，频率

ω' 的波相长干涉的位置就相当于频率 ω'' 的波的相消干涉的位置，反之亦然．两个频率的干涉条纹体系互补，假如把它们以同样的强度彼此迭加，就不能观察到干涉条纹．这就提出了干涉条纹可见度的判据：假如要容易观察到干涉条纹，光源发出的光线的频率展宽 $\Delta\omega$ 必须满足下述条件：

$$d\Delta\omega \lesssim \pi \tag{31c}$$

对于一定的光源，即对于一定的 $\Delta\omega$，判据(31c)给我们指出了所需要的 d 的上限．

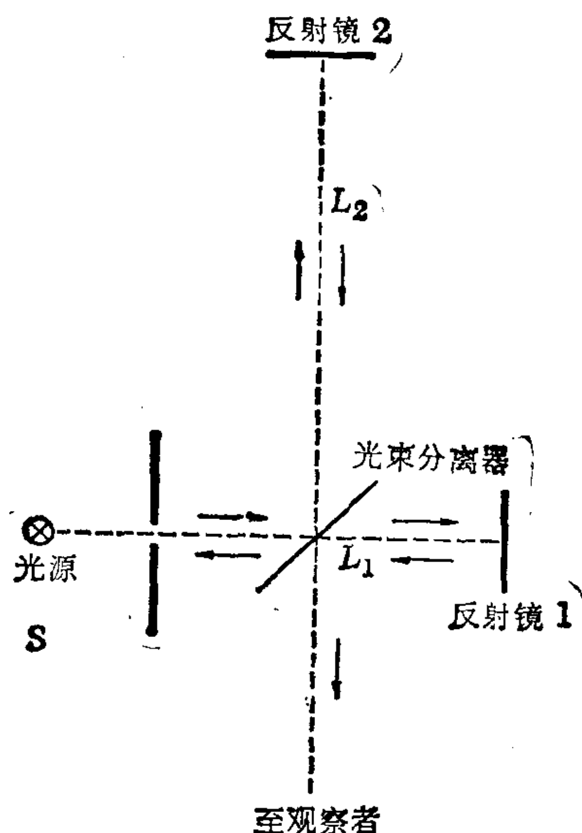


图 31A 不等臂的迈克耳孙干涉仪．(从反射镜到射束分离器的距离 L_1 和 L_2，如图所示．)可以观察到干涉的最大光程差 $2(L_2-L_1)$ 决定于近乎单色的光源的光谱线宽度．

32 对于一个(频率为 ω 的)近乎单色的光源，量 $\Delta\omega$ 是发射光的谱线宽度．我们在第三章中已经说过，好几种物理效应都会增大谱线宽度．光源中原子运动所产生的多普勒效应就

是其中之一．光源是许多相同的“灯”的集合体，但在实验室参考系中这些灯所发射的频率并不都是相同的，因为这些“灯”在光源中以随机的方式运动着．

让我们来讨论由于多普勒增宽所引起的对 d 的限制．看清楚干涉条纹的条件是

$$d<\frac{\pi}{\Delta\omega}=\left(\frac{\omega}{\Delta\omega}\right)\left(\frac{\lambda}{2}\right) \tag{32a}$$

在第三章第 44 节中，我们导出了部分多普勒增宽的表示式，即

$$\left(\frac{\Delta\omega}{\omega}\right)_D\sim(0.52\times10^{-5})\sqrt{\frac{1}{A}\left(\frac{T}{293^\circ\mathrm{K}}\right)} \tag{32b}$$

其中 T 是光源的有效温度，A 是发光原子的分子量，我们假定这些原子处于气体状态．把(32a)和(32b)结合起来我们得到：

$$d\lesssim\lambda\sqrt{\frac{A}{(T/293^\circ\mathrm{K})}}\times10^5 \tag{32c}$$

设 $T=293^\circ\mathrm{K}$(室温)，$\lambda=5000$ 埃(可见光)，$A=100$，从而我们得到 $d\lesssim50$ 厘米．这个估计和观察结果符合．对于象气体放电管(激光除外)一类的“普通”光源，可以看到干涉条纹的最大程差约为一米．

33 我们考虑的两个例子说明大自然总是力图“使两盏灯都开亮”．我们周围环境中的热噪声背景给测量之前体系的制备引进了某些任意性．

我们的装置中技术上的不完善也在制备过程中引进了任意性．例如，假定我们想产生一束具有十分严格确定的动量的高能电子束．要得到这样的射束，我们必须能非常精确地控制所有的加速电势，使射束聚焦的装置也必须是近乎完善的．并且，我们还必须维持很高的真空，因为射束中的电子和真空系统中残留的气体分子相碰撞会改变他们的运动方向并

损失能量．世界上没有什么东西是完美无缺的，显然实际上在制备阶段中我们不可能做到完全的控制．因而看一看理论上怎样描写"不完善的"制备过程是有意义的．

34 假设我们有一套制备体系的装置，在一系列重复测量中使得"体系总是以同样的方式制备"．正如我们以前已经同意的，所谓同样的方式的意思是多次测量的几率和平均值稳定并能够重复．设想我们已经测量了所有可能的物理变量的平均值．我们说这些平均值的全体决定了*体系的统计系综*，我们还说在单次测量中所碰到的所制备体系的任何特例都是*系综的元素*．

无论"完善的"或"不完善的"特殊制备方法都提供一种特殊的统计系综．从数学观点看来，*抽象的*综计系综等效于物理变量的几率与平均值的集合．当我们要考虑从物理上具体实现这个抽象概念时，我们可以把系综看作包括很大量的已制备出的体系(元素)的集合．这样我们可以把一束光描写为光子的统计系综，而其系综元素就是这些单个光子．

统计系综概念的另一重要应用是把容器中的一些气体描写为分子的统计系综．假如我们研究气体中各个分子的平均行为，这个描述是合适的．譬如说每当我们测量一个分子速度时，我们就是对系综的一个元素进行一次实验，多次速度测量得到平均速度，这就是描述该系综特征的平均值中的一个．在这一情况中，在容器中保存气体的各种条件就规定了这体系的制备程序．假如温度和压力保持恒定，平均速度就也是恒定不变．我们就可以说，分子都是以同样的方法制备的，因为它们都遵从宏观上全同的外部条件．当然这并不是说对两个个别的分子的两次特定的测量会得到同样的速度．从我们的观点看来，(在某一时刻)单个分子的速度是一个*随机变量*，我们所得到的数值表现为一个统计分布．

35 考虑统计系综．作为我们手头有的一个具体例子，可以设想从我们技术上所能达到的最好的稳定和不变条件下运行着的加速器射出的电子束．我们重复地测量某一物理变量，譬如说，沿着射束方向的动量 p．我们以

$$\mathrm{Av}(p;\rho)$$

表示在一系列测量中动量数值的平均值，其中字母 ρ 标志这一特定的统计系综，即特定的射束．我们把 $\mathrm{Av}(p;\rho)$ 这个量称为 p 的系综平均值．以 $\mathrm{Av}(p^2;\rho)$ 表示动量数值平方的平均值；这是动量平方的系综平均值．一般说来 $\mathrm{Av}(p^2;\rho)$ 与 $[\mathrm{Av}(p;\rho)]^2$ 不同．我们来研究这一个问题．p_1，p_2……表示各次测量得到的动量数值．上述两个平均值定义为

$$\mathrm{Av}(p;\rho)=\frac{1}{N}\sum_k p_k,\ \mathrm{Av}(p^2;\rho)=\frac{1}{N}\sum_k p_k^2 \qquad (35a)$$

我们可以写下恒等式

$$\mathrm{Av}(p^2;\rho)-[\mathrm{Av}(p;\rho)]^2=\frac{1}{N}\sum_k[p_k-\mathrm{Av}(p;\rho)]^2 \qquad (35b)$$

读者应自己立即就可以证明它．(35b)的右边是非负数项之和，我们可以断定：

$$\mathrm{Av}(p^2;\rho)-[\mathrm{Av}(p;\rho)]^2\geqslant 0 \qquad (35c)$$

当而且只有当所有的 p_k，$k=1,2,\cdots,N$ 都相等时就用等号，在这个情况下它们的共同值等于 $\mathrm{Av}(p;\rho)$．在这一特殊情况下射束中所有粒子都严格地具有相同的动量．

(35c)左边的数量量度变量的统计扩展．一般情况下它大于零，我们可以把这表述为：对于这一特定的系综动量有一个不确定度．

36 我们可以用上面讨论动量的同样方法来讨论其他物理变量．对于特定的体系(射束)确定这些物理变量的平均值及其弥散，所谓弥散的意思表示类似于(35c)左边的表示式所定义

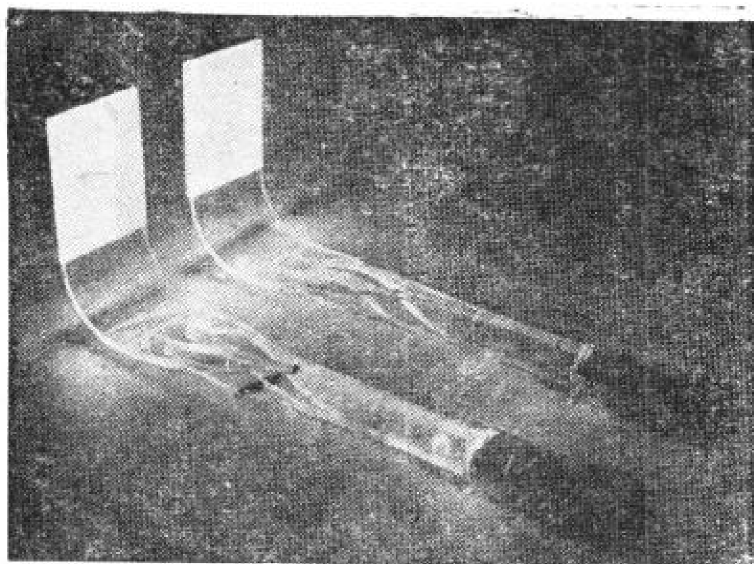


图 35A　一对闪烁计数器．当带电粒子撞击左边垂直的白色板时，材料上发出闪烁光．这些闪烁光通过一种丙烯树脂光导管"输送"到右边的光电倍增管.在使用的时候计数器和导光管严严实实地裹在铝箔里面以防止杂散光．

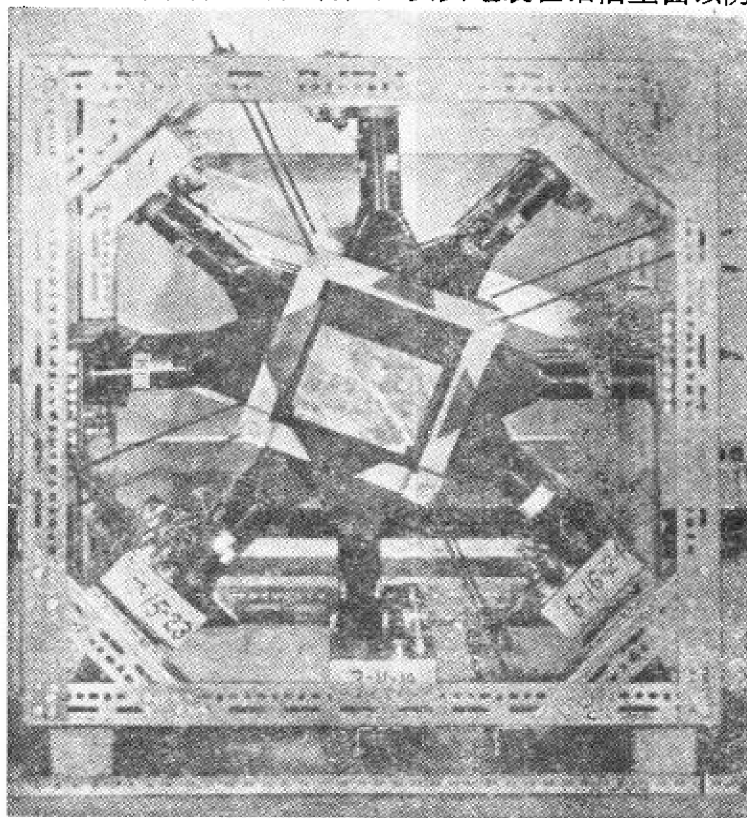


图 35B　出现在本章示意图中的小巧的"理论家的计数器"和实验室实际应用的一些计数器之间有很大的差别．照片显示基本粒子物理学实验所配备的一组 24 个闪烁计数器．整个装置的边长大约一米，塑料的闪烁器是在图的中央，而把光电倍增管对称地放置在周围．粒子束的方向垂直于图面．

的统计扩展. 最简单的一种变量是描写计数器响应的变量. 我们用 D 来代表它, 并约定假如在特定的实验中计数器发出一声卡嗒, D 的数值是 $+1$, 如果计数器不发声, D 的数值是 0. 那末 $\mathrm{Av}(D;\ \rho)$ 就正是我们以统计系综 ρ 的单个元素来做实验时计数器卡嗒作声的几率.

乍一看来可能认为, 计数器变量 D 与动量变量 p 不是同一类型的. 我们可能认为 p 是涉及体系的, 即涉及粒子的, 而 D 是涉及测量仪器的. 但是, 我们应当认识到所有有关体系性质的知识都是从观察测量仪器的响应推导出来的: 体系的内禀变量是一些抽象的量. 假如我们知道以某种方式安置的某个计数器卡嗒发声的几率, 我们就知道了有关统计系综本质的某些东西, 即关于射束中粒子的某些东西. 事实上射束中粒子的动量常常是用计数器来测量的, 如图 36A 所示.

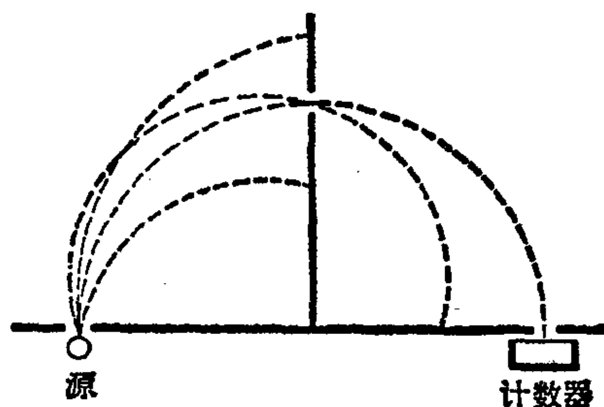


图 36A 说明所谓半圆 β 谱仪的原理. 这种装置用来测量 β 放射原子核衰变时所发射电子的动量(或能量)的分布. 电子从左边的放射性源发出, 它被约束在图面中或在图面附近运动. 这个装置放在垂直于图面的均匀磁场中, 所以轨道是些圆弧, 圆弧的半径取决于电子的动量. 仪器中装上几个狭缝, 使得除了轨道半径在很窄的范围内的电子以外, 都不能到达右边的计数器. 对于不同的磁场强度计算出单位时间内到达探测器的电子数目, 我们就可以确定所发射的电子的动量分布.

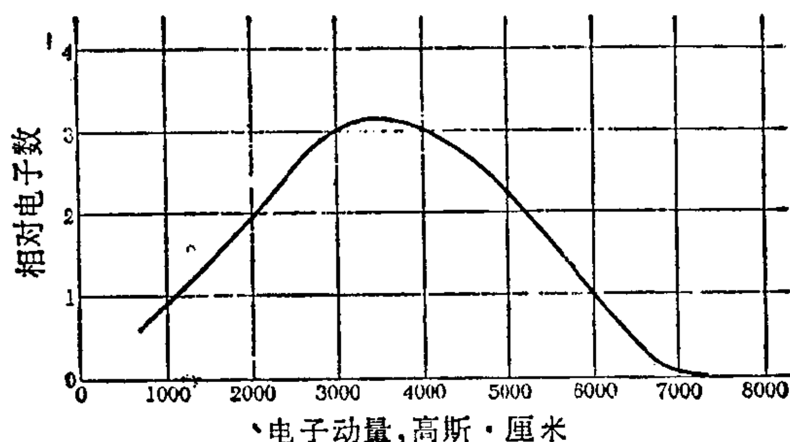


图 36B　P^{32}的β谱. 曲线表示所发射的电子的相对数和动量的函数关系. 动量用B_ρ(以高斯·厘米为单位)表示，其中ρ是场B中的曲率半径. 7200高斯·厘米处的最大动量相当于最大动能1.7兆电子伏.

发出电子的能量可以从零到上限，因为衰变中放出的总(动)能(以随机的方式)分摊给电子、子核和反中微子.

37 我们现在进一步讨论第26节考虑过的情形，一个光源中有两盏灯：钠灯和汞灯. 我们首先考虑：只有钠灯工作的实验，于是射束由"黄色光子"组成. 光源产生了光子的系综ρ_1，对于这一系综，我们得到某一计数器变量D的平均值d_1:

$$\mathrm{Av}(D;\rho)=d_1 \tag{37a}$$

接着我们考虑只有汞灯工作的实验. 这个装置决定统计系综ρ_2，同一计数器变量D的系综平均值d_2是

$$\mathrm{Av}(D;\rho_2)=d_2 \tag{37b}$$

我们最后考虑两盏灯都同时工作的情况. 两盏灯一起决定了统计系综ρ，这一情况下D的平均值为：

$$\mathrm{Av}(D;\rho)=d \tag{37c}$$

现在假设灯1在射束中产生每单位时间n_1个光子通量，灯2在射束中产生每单位时间n_2个光子通量. 于是射束中的总通量是单位时间(n_1+n_2)个光子. 在任何单次实验中光子或是"黄的"或是"蓝的"，取决于它是来自灯1还是来自灯

2. 我们断定在任何单次实验中发现“黄”光子的几率是:

$$\theta_1=\frac{n_1}{(n_1+n_2)} \tag{37d}$$

而发现“蓝”光子的几率是:

$$\theta_2=\frac{n_2}{(n_1+n_2)} \tag{37e}$$

作为从定义(37d)和(37e)导出的结果，数值 θ_1 和 θ_2 满足下列条件:

$$1\geqq\theta_1\geqq0,\quad 1\geqq\theta_2\geqq0,\quad \theta_1+\theta_2=1 \tag{37f}$$

条件(37f)是两个事件相互排斥但其中之一必定发生的几率的特征.

38 现在考虑单个实验，即涉及单个光子的事件. 关于用变量 D 描写的计数器卡嗒发声的几率 $d=\mathrm{Av}(D;\ \rho)$，我们可以说些什么呢？这里所讨论的光子或是黄的或是蓝的. 光子是黄色的几率是 θ_1; 假如它是黄色的，那末计数器 D 卡嗒发声的几率为 d_1. 光子是蓝色的几率是 θ_2，假如它是蓝色的，计数器卡嗒发声的几率是 d_2. 因为黄色和蓝色两种情况是互相排斥的，可以断定计数器 D 卡嗒作响的几率 d 必定是

$$d=\theta_1 d_1+\theta_2 d_2 \tag{38a}$$

或

$$\mathrm{Av}(D;\rho)=\theta_1\mathrm{Av}(D;\rho_1)+\theta_2\mathrm{Av}(D;\rho_2) \tag{38b}$$

系综 D 中 D 的平均值就以系综 ρ_1 和 ρ_2 中 D 的平均值和几率 θ_1 和 θ_2 来表示. 后面这两个几率表示由系综 ρ_1 和 ρ_2 怎样组成“组合”系综 ρ，因而他们是描写“组合”光源的特征量，他们不依赖于描写观察区中特定计数器的变量 D. 因此公式(38b)对于每一种计数器变量 D 都成立.

公式(38b)应泛适用于任意物理变量的平均值. 假如 Q 表示这样的变量，我们必定得到

$$\mathrm{Av}(Q;\rho)=\theta_1\mathrm{Av}(Q;\rho_1)+\theta_2\mathrm{Av}(Q;\rho_2) \qquad (38c)$$

我们说统计系综 ρ 是几率为 θ_1 和 θ_2 的两个系综 ρ_1 和 ρ_2 的非相干迭加. 我们把这一表述用符号表达如下

$$\rho=\theta_1\rho_1+\theta_2\rho_2$$

之所以要用"非相干"这一修饰定语的理由是我们必须小心地区分这一种迭加和我们在第五章第 36—46 节所讲的波的迭加. 我们以后还要进一步说明这个区别.

39 我们可以把两个系综迭加的概念毫无困难地推广到包含任意有限数目系综的非相干迭加. 我们考虑统计系综 ρ_k, $k=1, 2, 3\cdots n$. 我们把每一个系综和几率 θ_k 联系起来, 那末 θ_k 满足:

$$1\geq\theta_k\geq0 \quad \sum_{k=1}^{n}\theta_k=1 \qquad (39a)$$

设 ρ 是这些几率为 θ_k 的系综的非相干迭加, 我们把它用符号

$$\rho=\sum_{k=1}^{n}\theta_k\rho_k \qquad (39b)$$

来表示.

这意味着对于系综 ρ, 任何物理变量 Q 的平均值为

$$\mathrm{Av}(Q;\rho)=\sum_{k=1}^{n}\theta_k\mathrm{Av}(Q;\rho_k) \qquad (39c)$$

我们应当假设, 假如 $\rho_1, \rho_2, \rho_3\cdots\rho_n$ 是任意可能系综集合, 那末这些系综的各种非相干迭加也是可能的系综. 这一假设与其说是物理的, 还不如说是数学的. 我们之所以要作这个假设是因为我们要所有统计系综的集合具有对非相干迭加闭合的性质. 这意味着, 假如这个集合中包括任意有限数目的系综, 这些系综的所有可能的非相干迭加也包含在这一集合之中.

40 注意我们在第 27—29 节的讨论中已经考虑过无限数目

不相同的统计系综的非相干迭加．设 $D(\theta)$ 为描写图 27A 中位于一定的角度 θ 的计数器 D 的变量．令 ρ 表示由屏 S_1 左边的电子源引起的综计系综．假定我们所考虑的电子源强度相当于使每秒有一个电子通过 S_1 上的狭缝．假设计数器 D 所观察到的强度 $I(\theta)$ 用每秒电子数来表示，我们有

$$\mathrm{Av}[D(\theta);\rho]=I(\theta) \tag{40a}$$

在第 27 节的讨论中，我们首先考虑了强度为 $I(\theta,\ p)$ 的假想电子源，它产生的电子都具有非常确定的动量 p．我们用 $\rho(p)$ 来表示这种源所决定的系综．于是我们得到

$$\mathrm{Av}[D(\theta);\rho(p)]=I(\theta,\ p) \tag{40b}$$

我们指出，如果电子源是一个具有加速电极的热灯丝，电子就不会带着十分确定的动量从 S_1 上的狭缝出射．[不过没有理由可以否定设计非常复杂的带有"动量过滤装置"的源，射出电子的动量具有非常确定的数值，用 $\rho(p)$ 来描写这样的电子源.] 我们用 $\bar{\rho}$ 来表示简单的灯丝电子源所引起的统计系综．按照第 29 节中的讨论，我们可以得到：

$$\mathrm{Av}[D(\theta);\bar{\rho}]=\bar{I}(\theta)=\frac{1}{(2q)}\int_{p_0-q}^{p_0+q}dp\mathrm{Av}[D(\theta);\rho(p)] \tag{40c}$$

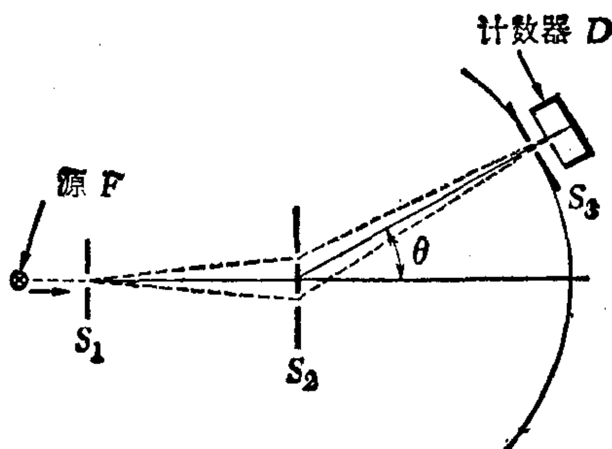


图 40A

把这和(39c)进行比较．在第 29 节中的推论显然就是把相当于“实在的”热灯丝电子源的统计系综 $\bar{\rho}$ 看作相当于统计系综为 $\rho(p)$ 的理想电子源的非相干迭加．换言之，和方程(39b)相似，我们有

$$\bar{\rho}=\frac{1}{2q}\int_{p_0-q}^{p_0+q} dp\,\rho(p) \qquad (40d)$$

三、振幅和强度

41 可以将相干迭加与非相干迭加的区别说明如下：相干迭加是*振幅*相加，非相干迭加是*强度*相加．

让我们自己来练习处理量子力学中的振幅和强度．图 41A 表示“半实在的”两个双缝实验．具有十分确定动量的粒子以每秒一个粒子的速率通过屏 S 上的狭缝进来．我们把一个计数器放在紧靠狭缝后面来观察通过另外五个狭缝的粒子的通量，*每次放在一个狭缝后面*．假设对某一狭缝观察到的计数速率是每秒 P 个粒子，我们可以说，P 就是穿过狭缝 S

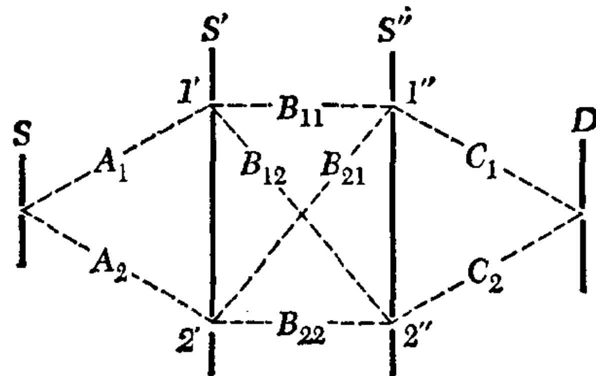


图 41A　说明第 41—43 节中讨论的有点理想的两个双缝实验．粒子(光子)通过 S 上的狭缝进入．我们感兴趣的是通过另一些狭缝的几率，特别是通过 D 上狭缝的几率．当然，在每一狭缝处应当把从前面狭缝来的波振幅相加而不是把强度相加．复数 A_m，B_m 和 C_m 是缝之间的*传递振幅*．所有几率都可以用传递振幅来表示．

进来的粒子通过所观察的狭缝的几率.

我们假定粒子的波长比狭缝的宽度大得多，我们还假定所有狭缝的宽度都是相同的. 我们就可以讨论在狭缝处波的(复数)振幅.

42 当通过 S 上狭缝进来的波振幅为 1 时，令狭缝 $1'$ 处波的振幅为 A_1. 当通过 S 上狭缝进来的振幅为 1 时，令狭缝 $2'$ 处的振幅为 A_2. 当狭缝 $1'$ 处的振幅为 1 但狭缝 $2'$ 处振幅为零时狭缝 $1''$ 处波的振幅为 B_{11}. 同样，狭缝 $1'$ 处振幅为零而在狭缝 $2'$ 处振幅为 1 时狭缝 $1''$ 处波的振幅为 B_{21}. C_1 为当狭缝 $1''$ 处振幅为 1 而狭缝 $2''$ 处振幅为零时通过屏 D 上狭缝的振幅. 用类似的方法定义其余的振幅. 我们可以把这些振幅称为*传递振幅*，因为它们描写波从左边的狭缝到右边的狭缝的传播. 图 41A 上的虚线象征性地表示这种传播. 如上所述，传递振幅和每一虚线相对应.

传递振幅是一些复数，它们的绝对值的平方按照下述方式决定*传递几率*. $P'_1=|A_1|^2$ 等于通过 S 上狭缝进来的粒子并立即在狭缝 $1'$ 后面被测到的几率. $P'_2=|A_2|^2$ 等于通过 S 上狭缝进来的粒子并通过狭缝 $2'$ 的几率. $P_{12}=|B_{12}|^2$ 等于通过狭缝 $1'$ 的粒子并通过狭缝 $2''$ 的几率. *在这一情况中必须关闭*狭缝 $2'$ 以确保粒子确实通过狭缝 $1'$. 其他传递振幅绝对值的平方也有类似的解释. 我们把所有传递几率按照八个振幅排列成表：

$$\begin{aligned} P'_1&=|A_1|^2 & P'_2&=|A_2|^2 \\ P_{11}&=|B_{11}|^2 & P_{12}&=|B_{12}|^2 \\ P_{21}&=|B_{21}|^2 & P_{22}&=|B_{22}|^2 \\ P''_1&=|C_1|^2 & P''_2&=|C_2|^2 \end{aligned} \tag{42a}$$

读者应当仔细思考怎样应用计数器来测量这些传递几率，在需要的时候关闭某些狭缝.

43 假如我们现在提一个问题：当把所有狭缝都打开时，通过 S 上狭缝进来的粒子又从 D 上狭缝射出的几率 P 是什么？

我们先作一个轻率的回答：因为我们知道狭缝之间的所有传递振幅，我们可以按照概率论的法则把这些几率复合以得到 P. 粒子通过 $1''$ 的几率就等于它经过狭缝 $1'$ 再通过 $1''$ 以及经过狭缝 $2'$ 再通过 $1''$ 的几率之和. 换言之，就等于 $(P'_1P_{11}+P'_2P_{21})$. 这种类型的推论最后导致下列错误结果：

$$P=(P'_1P_{11}+P'_2P_{21})P''_1+(P'_1P_{12}+P'_2P_{22})P''_2 \qquad (43a)$$

正确的答案是什么呢？它由下式给出：

$$P=|(A_1B_{11}+A_2B_{21})C_1+(A_1B_{12}+A_2B_{22})C_2|^2 \qquad (43b)$$

这并不等于方程(43a)中的错误表示式. 在各个狭缝处我们必须把到达狭缝的波振幅相加，因为波会互相干涉. 按照量子力学方程(43b)给出的是正确的答案，我们可以把方程(43a)中的表示式看做是按照经典弹子理论的预测.

44 如果我们只知道各个传递几率而不知道传递振幅，那末怎样求出 P 来呢？答案：我们根本不可能求出 P. 复数传递振幅的位相和绝对值必须都知道才可求出 P，但是传递几率只告诉我们振幅的绝对值.

我们来进一步讨论导致错误预料(43a)的"几率复合"论证中的谬误. 考察数量 P'_1P_{11}. 它代表什么？它代表在狭缝 $2'$ 关闭着的时候粒子从 S 上的狭缝进来通过狭缝 $1''$ 的几率. 同样 P'_2P_{21} 代表当狭缝 $1'$ 关闭着的时候粒子从 S 上的狭缝进来并通过狭缝 $1''$ 的几率. 如果狭缝 $1'$ 和 $2'$ 都开着，粒子从 S 上的狭缝进来通过狭缝 $1''$ 的几率并非由和数 $(P'_1P_{11}+P'_2P_{21})$ 给出. 从狭缝 $1'$ 和 $2'$ 到狭缝 $1''$ 的波是彼此相干的，我们必须把它们的振幅相加而不是把它们的强度相加.

45 考察图 45A 中稍有改进的装置. 我们在从 S 上的狭缝到狭缝 $1'$ 的路上插入位相推迟器 R. 除此而外，这里的装置

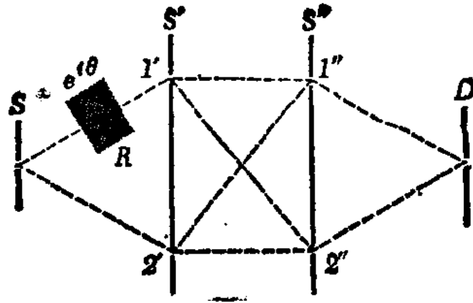


图 45A　这个图显示图 41A 所示的两个双缝实验的一个改进. 在狭缝 $1'$ 前面插入位相推迟器. 它使通过它的波的复数振幅改变因子 $e^{i\theta}$. 只要把传递振幅 A_1 用 $A_1e^{i\theta}$ 来代替,就可以应用图 41A 中所示实验的理论.

和图 41A 的完全相同. 位相推迟器唯一的效应是振幅 A_1 由振幅 $A_1e^{i\theta}$ 代替;位相推迟器使位相推迟了一个数值 θ 但不影响波的振幅. 假如用光来做实验,我们可以用玻璃板做推迟器.

设 $P(\theta)$ 为通过 S 上狭缝进来的粒子通过 D 上狭缝出射的几率(所有别的狭缝都打开). 按照方程(43b),我们有

$$
\begin{aligned}
P(\theta) &= |A_1e^{i\theta}(B_{11}C_1+B_{12}C_2)+A_2(B_{21}C_1+B_{22}C_2)|^2 \\
&= |A_1(B_{11}C_1+B_{12}C_2)|^2+|A_2(B_{21}C_1+B_{22}C_2)|^2 \\
&\quad +U\cos\theta+V\sin\theta \qquad (45a)
\end{aligned}
$$

读者可以自己证明其中

$$
\begin{aligned}
U &= A_1(B_{11}C_1+B_{12}C_2)A_2^*(B_{21}^*C_1^*+B_{22}^*C_2^*) \\
&\quad +A_1^*(B_{11}^*C_1^*+B_{12}^*C_2^*)A_2(B_{21}C_1+B_{22}C_2) \qquad (45b)
\end{aligned}
$$

以及

$$
\begin{aligned}
V &= i[A_1(B_{11}C_1+B_{12}C_2)A_2^*(B_{21}^*C_1^*+B_{22}^*C_2^*) \\
&\quad -A_1^*(B_{11}^*C_1^*+B_{12}^*C_2^*)A_2(B_{21}C_1+B_{22}C_2)] \qquad (45c)
\end{aligned}
$$

如果我们愿意,我们可以把 $P(\theta)$ 的表示式重写成下列形式:

$$P(\theta)=\frac{1}{2}[P(0)+P(\pi)]+\frac{1}{2}[P(0)-P(\pi)]\cos\theta$$
$$+\frac{1}{2}[2P(\pi/2)-P(0)-P(\pi)]\sin\theta \tag{45d}$$

这就是说，作为 θ 函数的 $P(\theta)$ 可由它在三个角度 $\theta=0$，$\pi/2$ 和 π 的数值唯一地决定.

46 下面考虑图 46A 中的装置. 现在有两个分开的粒子源 *1* 和 *2*"照明"狭缝 $1'$ 和 $2'$. 其他各方面都和图 41A 中的情形相同. 设这两个粒子源强度相等.

通过屏 S 的粒子又穿过 D 上狭缝的几率 P_1 是什么？显然它由下式给出：

$$P_1=\frac{1}{2}|A_1(B_{11}C_1+B_{12}C_2)|^2+\frac{1}{2}|A_2(B_{21}C_1+B_{22}C_2)|^2 \tag{46a}$$

在这个情况中，我们需将各个粒子源分别在 D 上狭缝处产生的强度相加以求出两个粒子源一起工作时的强度. 表达

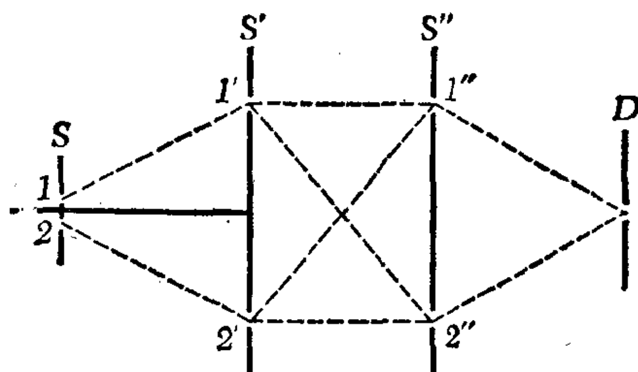


图 46A 图 41A 所示的两个双缝实验的这一改进中，狭缝 $1'$ 和 $2'$ 用两个独立的同样强度的粒子源照明. 从两个粒子源来的波是不相干的，两个源都工作时任一个狭缝处的强度是每次只有一个粒子源工作时我们观察到的强度之和.

在这个图所示的实验和图 45A 所示的实验之间存在着有趣的关系. 这里的实验中测得的任何强度是图 45A 的装置中测得的相应强度遍及所有位相角 θ 的平均值. 这一事实常表述为：两个非相干粒子源发射相对位相杂乱的波.

式$|A_1(B_{11}C_1+B_{12}C_2)|^2$是粒子从源 *1* 来通过 D 上狭缝的几率，表达式$|A_2(B_{21}C_1+B_{22}C_2)|^2$是粒子从源 *2* 来通过 D 上狭缝的几率. 无论从粒子源 *1* 来的还是从粒子源 *2* 来的每一个粒子都以相等的几率通过 D 上的狭缝，因而在表达式(46a)中有因子 1/2.

47 我们提出一些与图 45A 和 46A 有关的更进一步的问题. 我们把屏 S' 以及此屏左边的一切装置当作粒子源. 那末图 45A 和 46A 表示两个不同的粒子源所做的同样实验. 我们可以问：对于图 45A 所示的情形，粒子通过屏 S' 过来并且也经过屏 D 上的狭缝的几率 $P'(\theta)$ 是什么？因为通过 D 上狭缝的每一个粒子一定曾经通过屏 S'，从而 $P'(\theta)$ 必定等于方程(45a)给出的几率 $P(\theta)$ 与来自 S 上狭缝的粒子通过 S' 的几率之比. 后一个几率显然等于$[|A_1|^2+|A_2|^2]$，于是我们得到：

$$P'(\theta)=[|A_1(B_{11}C_1+B_{12}C_2)|^2+|A^2(B_{21}C_1+B_{22}C_2)|^2 \\ +U\cos\theta+V\sin\theta][|A_1|^2+|A_2|^2]^{-1}. \qquad (47a)$$

也可以把它写成：

$$P'(\theta)=\frac{1}{2}[P'(0)+P'(\pi)]+\frac{1}{2}[P'(0)-P'(\pi)]\cos\theta \\ +\frac{1}{2}[2P'(\pi/2)-P'(0)-P'(\pi)]\sin\theta \qquad (47b)$$

同样我们可以提问：在图 46A 所示的情况中通过屏 S' 过来的粒子也通过 D 上狭缝的几率 P_i' 是什么？我们很容易看出：

$$P_i'=[|A_1(B_{11}C_1+B_{12}C_2)|^2+|A_2(B_{21}C_1+B_{22}C_2)|^2] \\ [|A_1|^2+|A_2|^2]^{-1} \qquad (47c)$$

比较表达式(47c)和表达式(47a)我们注意到一个有趣的事实：假如我们对 0 和 2π 之间所有角度 θ 求 $P'(\theta)$ 的平均值我们就能够得到 P_i'；即

$$P'_i = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\theta P'(\theta) \tag{47d}$$

实际上并不需要对所有角度求平均．我们也可得到

$$P'_i = \frac{1}{2}[P'(0) + P'(\pi)] \tag{47e}$$

因此我们可以把图 46A 所示的源(屏 S' 和 S' 左边所有东西是粒子源)所确定的统计系综当作图 45A 所示的，以 θ 作为可变参数的一些源(不同的 θ 值相当于不同的源)所确定的两个或无限数目的统计系综的非相干迭加．

48 结果(47d)说明有关非相干迭加的普遍原则．如果我们有非相干的两个源，我们先把它们当作相干的并把从两个源来的波的振幅相加，不过要带有一个可变的相对位相因子 $e^{i\theta}$．我们计算任何作为 θ 的函数的有关"强度" $I(\theta)$，最后我们对 0 和 2π 之间所有角度求 $I(\theta)$ 的平均．得到的平均值 $\bar{I}$ 就是两个源非相干时相应的平均值．具有无规的相对位相差的两个源是非相干的．

49 做完这些有关振幅、强度和几率的练习之后，我们继续进行统计系综的系统讨论．

所有统计系综的集合明显包括两个子集合；一个子集合包括可以当作两个或几个其他不同的统计系综的非相干迭加的一些系综；另一个子集合包括不能当作这样的迭加的一些系综．不能当作另一些系综的非相干迭加的统计系综叫做**纯系综**或**纯态**；另一类系综叫做**混合系综**或**统计混合物**．

现在考虑混合系综．我们知道这种系综必定是另一些系综的非相干迭加．把混合系综看作一些纯系综的非相干迭加是否也正确呢？这一问题实际上是关于所有物理上可实现的统计系综集合的本质的问题．肯定可能有这种情况，所有物理上可实现的统计系综集合并不包含任何纯态，在这种情况

下我们的问题会得到否定的答案. 在另一方面，我们可以把纯系综当作混合系综的极限情况，这样我们就可以扩大我们的统计系综集合不仅包括所有物理上可实现的系综并且也包括这些系综的所有极限情况. 如果我们实行我们将要做的这一纯数学上的抽象，我们可以直观地期望这样扩大了的系综集合具有这样的性质，即每个统计系综或是纯系综或是纯系综的非相干迭加.

在下面我们要作一个合理的假设. 作为物理假设它是个理想化的东西；我们设想所有的纯系综实际上都可以实现，并且可以把所有其他系综都当作这些系综的统计混合物. 实际上不可能实现纯系综的理想情况，但是没有理由认为我们不能任意地接近这一理想情况.

四、每次测量结果原则上可以预言吗？

50 从直观上看很清楚，我们对纯系综的元素比对混合系综的元素了解更多. 例如，考察两盏灯的光源例子. 显然当两盏灯都工作时，我们对光源发出的各个光子的性质比只有一盏灯工作时了解得要少. 具体讲关于光子的颜色就了解要少些.

为了制备纯系综，我们必须完全控制整个制备阶段. 必须能够抑制原则上可以抑制的所有统计涨落源.

现在应当清楚了，当我们进行测量时希望以这样的方式来试图安排制备阶段，使得系综是技术上所可能做到的最纯状态. 这样我们就可以把数据中的统计弥散减到最小，这就是增加了结果的精确度. 我们可以进一步说，纯系综的实验结果的理论解释比混合系综要简单些，而且清楚些. 对于纯系综，我们可以在最好的可能条件下研究体系的行为而不被

可以避免的“噪声”所干扰.

51 现在提出一个基本问题．纯状态是不是以所有的物理变量都完全没有统计弥散为特征？换一种说法：对于纯态来说，每次测量结果是不是都可以精确地预言？

我们应当清楚懂得，这个问题是关于我们的世界的本性的问题，这个问题只能在实验研究的基础上给出答案．关于答案应当是什么，纯逻辑一点也不能告诉我们.

经典物理学的理论的基础是建立在对这个问题以是作为回答的命题上的．量子力学的理论基础是建立在以非作回答的命题上的(为了避免误解，我们在这里必须说明量子力学只是对这个问题回答是非的许多可能的理论中的一个特例)．当我们承认量子力学是我们的理论时，我们就已经在自然界的描述中引进了不确定性，其精确意义为：无论我们怎样制备纯系综，总归有一种测量，其结果是不能在任何特定情况中都预言出来的(不能预言的测量是什么决定于系综的性质)．这并不是说量子力学是“混乱的和含糊的”．这理论是十分确定的理论，其中我们可以对几率或物理变量平均值作出精确定量的表述.

52 按照我们所提的问题的性质，没有单独的一组实验可能最终断定答案应当是什么．每当我们遇到某一现象，会使我们得出答案是非的时候，我们总可能试图挽回局面，总可以辩解说：假如以“更好的方法”进行测量，那末结论就会不同了．换言之，总可以辩解说，不确定性只是来源于实验装置并不是最好的这个事实．在绝对意义上说很难完全驳倒这一类辩论．在另一方面，合理的是请支持自然界服从经典决定论的人明确地指出使量子力学的非决定论特色消失的测量是怎样做法的.

赞成回答非的证据有两个方面．首先，对计及粒子所观

察的性质的许多种实验的仔细分析看来总要得出结论：答案应当是非．其次，存在这样的事实，以答案是非作为基石的量子力学理论的所有预言和所有观察事实看来都有非常好的一致性：假设非作为答案看来还从来没有使我们和经验发生任何矛盾．

53 在第四章和第五章中我们已经提出了极有说服力的证据表明答案必定是非．自然界中的粒子象波一样弥散在空间．波被半镀银镜子和双缝所分解，一般要被任何障碍物所衍射．在另一方面，假如我们用光电池或某种其他的粒子探测器探寻粒子，我们从未找到"部分光子"或"部分电子"．为了前后一致地描写所有这些现象，我们被迫把波的强度解释为几率：正比于波函数绝对值平方的量必须代表几率．我们只能陈述计数器发出卡嗒声的几率，但是我们永远不可能这样安排使得我们能够肯定每一单个实验中每一个计数器的反应．

譬如，考虑双缝实验．如果我们要确定入射射束的动量，我们必须这样安排使得能够极好地确定粒子的动量．当这样的射束入射到带有两个狭缝的屏上，我们会观察到特有的双缝衍射图案．只有当两个狭缝都打开时，即当粒子通过两个狭缝时这种图案才会出现．然而，假如我们将一个计数器放在其中一个狭缝后面试图捕获粒子，我们并不会探测到半个粒子，得到的却是整个粒子．在任何单个实验中，计数器会发声，或者不会发出卡嗒声，我们事先并不知道一定会发生些什么：我们只能说计数器发出卡嗒声的几率．读者会说：这仅仅是由于系综不纯．但是，为使它做得更纯些，读者建议我们去做些什么呢？

54 症结显然在于是否可能有比用波动理论描述得更详细的另外某种方法来描写粒子．假如波动描述是正确的，又假如粒子具有不可分性因而永不可能探测到"部分粒子"，那末看

来强度的几率解释是不能避免的．我们来回忆一下这一章开头关于测不准关系的讨论．假定已准确地知道粒子的动量，就必须用弥散在空间的波来描写它，从而就不可能准确地知道粒子的位置．动量测量中很小的统计弥散意味着位置测量上大的统计弥散．只要我们承认把强度解释为几率的波动描写就无法推翻测不准关系．另一方面，并没有任何实验材料暗示可以用比波动描述所允许的更详细地描写粒子：绝对没有任何“隐变量”的证据．

这些考虑导致下述量子力学的基本假设：粒子的纯态是用波描述的．当并且只当系综的每一元素都用同一波函数来描写时，单粒子态的系综是纯的．当我们能够说出描写系综中所有粒子的波函数时，这就是说我们对粒子源有最大可能的控制．没有比确定的波更纯的状态．

55 把实在世界和幻想的经典世界某些方面作一个比较是有意义的．统计系综，统计混合物和纯态这些概念对经典物理学说来完全不是外加的．统计系综的概念事实上在发现量子力学之前早久就已经引入经典统计力学中了．我们测量过程的讨论大部分也可应用于经典描述的范围之内．当我们能完全控制整个制备阶段时，就得到纯态．当我们的控制并不完全时就得到统计混合物．经典描述和量子力学描述的关键区别在于纯态的本性．按照经典概念，纯态具有的性质是可以准确地预言每个单次测量的结果．如果给定的计数器在某一单次实验中卡嗒发声，那末它在以后的每一次实验中都同样发出卡嗒声．在每次重复实验时，都会发生以前曾经发生过的同样情况．对于纯态，任何物理变量都没有统计弥散．

在量子力学发展之前很久，在一个长时期内，物理学家已经认识到实际上不可能以无限的精确度预言宏观世界中发生

的过程. 我们不能控制的热噪声和其他多种“干扰”总是存在，在宏观情况下引起物理变量在数值上不确定的这些原因完全掩盖了量子力学所特有的不确定性. 经典物理学家关于纯态的特征是变量中完全没有统计弥散的信念在宏观情况中从来没有真正地严峻地经受过考验，这就说明为什么这种信念能持续了这么长久.

56 认识到甚至包括纯系综的情况在内的所有预测的概率本质是物理理论发展中的重要一步. 当我们回顾量子物理学的早期历史，我们可以体会到在概率性描述出现之前物理学家所面临的概念上的困难. 光可能表现出波动性也可能表现出粒子性这是使人迷惑的发现. 按照第四章讨论的思路，现在很容易理解这个“二象性”(这是当时的名词). 但是在量子力学的早期，局面就不同了. 没有一个人曾想到把波振幅的平方解释为几率，而没有这么一个和经典概念根本背离的概念，就不可能理解光的“二象性”.

我们预测未来事件的本领有一个原则上的极限，这一点被许多人，特别是被有哲学思想的非物理学家认为是最深刻最革命的概念. 不可避免地，关于这一问题(以及关于测不准关系)曾写出了大量的一派胡言. 这些作者们曾经引出了关于把量子力学纠缠到一般人类事务的种种牵强附会的结论.

作者并不否认可预测性和不可预测性的问题是一个很有兴趣的原则问题，并且这是哲学思辩的合法的主题. 不过这里要谈一谈，职业物理学家今天很少把注意力放在这个论题上. 作者回忆不起在那一次非正式的讨论上提出这个问题(相反，许多非正式的讨论涉及到占据物理学家思想的各种问题). 事实上公正地说，物理学家，除了他们讲授关于这一主题的引论教材外，很少想过量子力学中的测量理论.

五、偏振光和非偏振光

57 偏振光的研究可以对量子力学中纯态和统计混合物之间区别作出很好的说明．考虑图 57A 中所示的实验装置．频率为 ω 的近乎单色的光子通过偏振滤波器 F_s 并且通过屏 S 上的狭缝从光源射出．这里统计系综的制备是在 S 的左边进行．用配有偏振滤波器 F_p 的光电池 P 研究发出的光子，并把偏振器和光电池一起看作计数器变量 D 描写的一台仪器．

可能制造出极其完善的偏振器，使得它具有这样的性质：它们无阻碍地让一定偏振态的波通过，但完全吸收相反偏振态的波．我们假定滤波器 F_s 和 F_p 是完善的偏振滤波器，我们可以随意选择它们的性质．

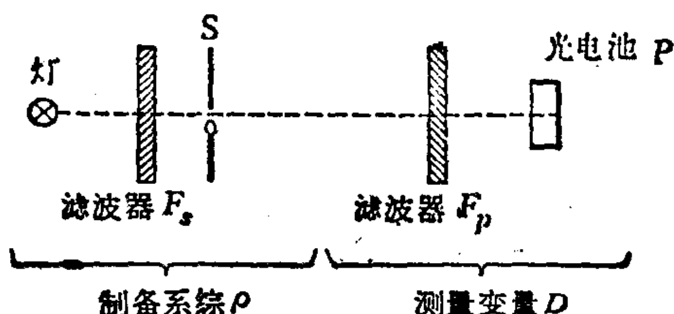


图 57A 表示偏振光实验的简图．假设滤波器 F_s 和 F_p 都是理想的偏振滤波器（通过理想偏振滤波器的光成为一定的纯偏振态，滤波器对这种光是完全透明的）．

除非滤波器 F_s 和 F_p 相当于同样的（纯）偏振态，计数器 P 对单个光子的反应就不能精确预言．

58 现在假设滤波器 F_s 是只让左旋圆偏振波通过的滤波器：发出的光子是统计系综 ρ_L 的元素．我们先确定拿掉滤波器 F_p 时的计数速率：这可以告诉我们单位时间发出的光子数目并用它来把数据归一化．我们假设计数器 P 有百分之百的效

率所以它能对于到达它的每一个光子计数．令计数速率为单位时间 n 个光子．

我们考虑几种不同的滤波器 F_p，对于每一滤波器-计数器的组合有相应的计数器变量 D．把 D 的平均值定义为比值 n'/n，其中 n' 是装上滤波器时的计数速率．假如 F_p 是只允许左旋圆偏振光通过的滤波器，相应的计数器变量用 D_L 表示；假如它只允许右旋圆偏振光通过，我们用 D_R 表示计数器变量；假如它允许 x 方向的线偏振光通过，我们用 D_x 表示变量；假如它允许 y 方向的线偏振光通过，我们用 D_y 表示它的变量．最后，我们考虑只允许沿着正 x 和 y 轴的象限的等分线线性偏振的光线通过的滤波器(计数器变量 $D_{45°}$)以及只允许垂直于这一等分线偏振的光线通过的滤波器(计数器变量 $D_{135°}$)．

对于系综 ρ_L，我们得到下面的平均值：

$$\mathrm{Av}(D_L;\rho_L)=1,\qquad \mathrm{Av}(D_R;\rho_L)=0 \tag{58a}$$

$$\mathrm{Av}(D_x;\rho_L)=\mathrm{Av}(D_y;\rho_L)=\mathrm{Av}(D_{45°};\rho_L)$$
$$=\mathrm{Av}(D_{135°};\rho_L)=\frac{1}{2} \tag{58b}$$

对于这一系综，已准确地知道两个变量 D_L 和 D_R，其余四个变量我们一点也不知道．系综 ρ_L 是纯的吗？这个问题的真正意思是：我们能否使它更纯？回答是不能．假如我们要求变量 D_L 和 D_R 是准确地已知并且具有方程(58a)给出的数值，那末我们就知道从光源发射的光子必定是严格地左旋圆偏振．但是每一左旋圆偏振波可以分解成两个振幅相等、偏振面互相垂直的线偏振波．假如我们插入滤波器以去掉一个线偏振分量，透射光的强度就是入射光强度的 1/2．变量 D_x，D_y，$D_{45°}$ 和 $D_{135°}$ 的平均值因而必定是方程(58b)所表示的那样．假如我们现在把有关平均值的实验结果以及不能用偏振

滤波器使光子(能量上)分裂的实验结果结合起来，我们必然引伸出结论，就是在任何单个实验中不能精确预言四个变量 D_x, D_y, $D_{45°}$ 和 $D_{135°}$ 中的任何一个. 纵使事实上一定要把系综当作可能最纯的圆偏振光子系综，这些变量的不确定性实际上很大.

59 读者应当认真注意到，如果光子的行为各方面都像经典波列，那末结论就完全不同了. 这种情况下，变量 D_x 的平均值就会依赖于探测器的灵敏度. 假如探测器具有这样的灵敏度：它能记录半个波列所携带的能量，那末计数速率 D_x 就和计数速率 D_L 相同，即 $\mathrm{Av}(D_x;\rho_L)=1$，假如灵敏度低到半个波列所携带的能量不足以触发计数器，那末平均值就变成零. 真正的光子的行为并不象经典波列那样：不管我们在计数器前放的是什么滤波器，我们总是发现被计数器记录的每一个光子都带有能量 $\hbar\omega$.

因而在任何单个有关纯系综 ρ_L 的实验中，不可能预料计数器的反应 D_x, D_y, $D_{45°}$, $D_{135°}$. 我们这里有极其有力的证据支持第 51—54 节中所述的普遍结论.

60 假如我们拿掉滤波器 F_3 会发生什么情况呢？如果我们假设"灯"是球对称的物体，没有从优方向，每一偏振态与任何其他偏振态是同样可能的. 我们说光线是非偏振的. 相应的系综 ρ_0 是关于偏振自由度的最混沌的系综，并且不管理想的偏振滤波器 F_3 的性质怎样，有滤波器时计数速率是没有滤波器时的计数速率乘以 1/2. 于是我们测得平均值：

$$\mathrm{Av}(D_L;\rho_0)=\mathrm{Av}(D_R;\rho_0)=\frac{1}{2} \tag{60a}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Av}(D_x;\rho_0)=\mathrm{Av}(D_y;\rho_0)&=\mathrm{Av}(D_{45°};\rho_0)\\ &=\mathrm{Av}(D_{135°};\rho_0)=\frac{1}{2}\end{aligned} \tag{60b}$$

注意(60b)中的平均值和(58b)中的平均值相同，对系综 ρ_L 和 ρ_0 说来，关于 D_x, D_y, $D_{45°}$ 和 $D_{135°}$ 四个变量的无知程度因而是相同的．我们所对于变量 D_L 和 D_R 的了解程度在这两个系综中是不同的，对于 ρ_L 我们有关于这些变量完全的知识，而对于系综 ρ_0 我们几乎一点也不了解这些变量．

因此我们预计系综 ρ_0 必定是统计混合物．为了清楚地说明这一点，我们先考虑滤波器 F_8 只让右旋圆偏振波通过的实验．把相应的系综叫做 ρ_R．系综平均值就由下式给出：

$$\mathrm{Av}(D_L;\rho_R)=0 \qquad \mathrm{Av}(D_R;\rho_R)=1 \tag{60c}$$

$$\mathrm{Av}(D_x;\rho_R)=\mathrm{Av}(D_y;\rho_R)=\mathrm{Av}(D_{45°};\rho_R)$$
$$=\mathrm{Av}(D_{135°};\rho_R)=\frac{1}{2} \tag{60d}$$

按照我们在第 38 节中的讨论，读者可以详细核对 ρ_0, ρ_R 和 ρ_L 的统计平均值可以写成下面这个样子：

$$\rho_0=\frac{1}{2}\rho_L+\frac{1}{2}\rho_R \tag{60e}$$

因此我们可以把混沌系综 ρ_0 看作两个纯系综 ρ_R 和 ρ_L 的非相干迭加．

61 作者要提到他在少年时代被非偏振光和圆偏振光之间的区别弄糊涂的事．一些书上说非偏振光是两个在垂直方向上偏振的光的混合物，而书上又说圆偏振光是两个垂直方向偏振光的迭加．作者终于认识到圆偏振光是把两个线偏振分量的振幅相加，而非偏振光是把强度相加．圆偏振光是两个垂直方向线偏振光的相干混合物，而非偏振光是非相干混合物．

问　　题

1．下面是企图驳倒测不准关系的人最喜爱的论证之一(见图

62*A*). 动量为 p 的单能量电子射线从左边垂直入射到屏 S_1. 屏上有一直径为 a 的圆孔. 离开屏 S_1 距离 d 处有另一个屏 S_2, 上面也有一个直径为 a 的圆孔. 假设两个孔放置在沿入射线的方向的一条直线上. 通过第一个孔中的电子有些会偏转, 但是其中有一些会继续前进, 通过第二个小孔. 考虑通过第二个孔的电子. 它的横向位置不确定度的数量级为 $\Delta x \cong a$. 动量的大小是 p, 因为这个实验中电子并不损失或获得能量, 所以动量和入射射束中电子的动量相同. 因为我们知道电子通过了两个圆孔, 动量方向的不确定性必定小于或等于 $\Delta\theta = a/d$. 从此得出, 电子动量横向分量的不确定度的数量级为 $\Delta p \cong (a/d)p$. 于是我们得到横向位置和横向动量不确定度的乘积为:

$$\Delta x \Delta p \cong \left(\frac{a}{d}\right) a p.$$

减小 a 并增大 d, 我们可以使这个乘积任意减小. 从而破坏了作为量子力学基石之一的测不准关系.

你能推翻这一论证吗? 对于你的论证会有各种反论证, 要保证你能对付全部反论证.

上面的论证是通过反对测不准关系来反对量子力学的许多论证中的一个. 现在应当清楚了, 只要承认波动力学的前提, 测不准关系永远不会有被这种或任何类似的论证所推翻的任何危险, 因为就是在这些前提下证明了测不准关系. 人们可以把对于波动力学的"驳斥"分为两大类:

a) 真正否定波动力学的论证, 虽然这常常不是明白地提出来的.

b) "糊涂的"论证, 但是这些论证常常建立在波动力学某些概念的

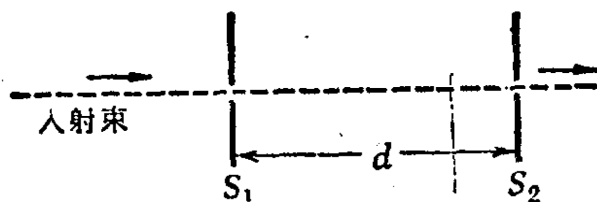


图 62*A* 关于问题 1 的图, 在图上作者错误地论证, 假如我们把狭缝做得很窄并使距离 d 加大就可能违反测不准关系. 可以看出, 在粒子通过第二个狭缝的时候, 横向动量不确定性和横向位置不确定性的乘积可以任意减小. 这一概念错在什么地方?

基础上.

仔细的概念分析会澄清"驳斥"的性质. 当然，不能用逻辑基础来反驳对于波动力学原则的彻底否认,但是人们总能够诉诸实验事实: 这样"驳斥"引出的逻辑结论会和这些实验事实之一相矛盾. (b)类的论证显然是有错误的.

2. (a) 我们考虑一个理想实验,波长为 6000 埃的近乎完全单色光通过高速光闸. 设光闸以下述方式周期性地开与关: 即在一个周期中光闸开的时间是 10^{-10} 秒，关闭的时间为 0.01 秒. 光线通过光闸后就不再是单色的了，波长就会表现出一定的扩展. 以埃为单位估计波长不确定性的大小.

(b) 使从光闸出射的光通过充满二硫化碳的长管子，二硫化碳是色散介质,对于所考虑的波长,折射率随波长的变化由下式给出:

$$\frac{\lambda}{n}\frac{dn}{d\lambda}=-0.075$$

为要测量通过光闸的脉冲光的速度，可以在离开第一只光闸一定距离的地方放另一只光闸,并在稍微晚一点时候打开的第二只光闸. 在二硫化碳中脉冲传播的速度是多少?

3. 作者有一个违反测不准关系的新思想: 这次是关于时间-频率测不准关系. 实验装置十分简略地在图 62*B* 中表示出来. 近乎单色的光通过左边装有高速光闸的狭缝. 我们这里不管纯技术上的困难，于是我们假设光闸可以打开一个任意短的时间间隔使一个尖锐确定的脉

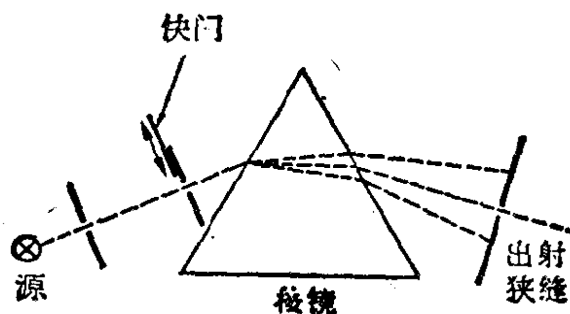


图 62*B* 问题 3 的图. 作者再一次试图违反测不准关系. 三棱镜代表非常高分辨率的摄谱仪,用它从透射光线中选出极窄的频率范围. 用光闸控制入射光. 作者错误地主张能任意精确地确定从出口狭缝出射的光脉冲的频率和时间. 错在什么地方?

冲进入图上用三棱镜象征性地代表的摄谱仪. 当然，入射光线不再是单色的了，就象问题 2 所讨论过的那样会显出频率的扩散. 不过，我们可以在摄谱仪上装上一个适当的出射狭缝，这个狭缝画在图的右边，这样就从入射光中选出了波长落在极窄的区域内的一部分. 因此可以把出口狭缝出射的光线的单色性提高到任意高的程度：频率的不确定度可以随我们所愿地任意小. 在另一方面，可以借助于光闸任意地缩短脉冲的持续时间. 因此从出口狭缝出射的脉冲可以有任意短的持续时间并且有任意准确的频率，这和测不准关系所说的相反. 你能找出这一论证中的错误吗？

4．按照第 29 节中的讨论，假设灯丝温度为 1000°C，假设加速电势是 10 伏. 估计发射电子动量的相对精确度，即估计数量 q/p_0. 只要作一个粗略估计就够了. 解释你的想法.

5．只要我们能产生很低能量的电子束就可能做“宏观”电子衍射实验. 假设我们想产生平均能量为 0.01 电子伏具有确定动量的射束. 讨论一下在这个意图中我们可能遇到的实际困难. 显然，热灯丝加上一个加速电极是不行的，但是或许你们会想出别的办法. 如果你能想出，说明你的一些设想并讨论它们在技术上是否可行的.

6．考虑第五章问题 5 的图 55A 中所示的光栅，假设光栅不是无限长，而是只包含 N 条狭缝. 在这个情况中光栅不是严格周期性的，因而衍射射线呈现角度弥散. 我们可以按下述方式表达这个问题：传递给光栅的最小特征动量不再精确等于 $2\pi/a$ 而只能确定到不确定范围 Δq. 试求 N 和 Δq 之间的关系. 把图转过 90° 并与本章图 5ABCD 比较：这一比较会给你一些概念. 应用这一结果推导各种衍射线出射角不确定性的表示式.

7．考虑从稳定光源出射的近乎单色的光束. 问题是要通过在“实验区域”进行一些测量来确定这一光束的未知偏振态.

(a) 你们可以有理想的偏振滤波器和光电倍增管. 为了完全确定射束的偏振态所必须进行的强度测量的次数最少是多少？说明你所说的结论的基础.

(b) 假如给你一只光电倍增管，两片相同的偏振片和一片四分之一波片. 只应用上述装置你怎样确定射束的偏振态？这里你们不能假

设偏振片是理想滤波器.

8. 附图 62C 表示第 41—43 节中讨论的两个双缝实验的改进. 理想的偏振滤波器放在(或不放在)狭缝前面以及光源和探测器前面. 我们假设第 41—43 节中所讨论的传递振幅不依赖于偏振态, 并且假设光源发出非偏振光. 推导类似于(43b)的, 从 S 上的狭缝进入的光子通过 D 上狭缝几率的表示式, 对于偏振滤波器的不同组合, 列成下表:

F_s	F_1'	F_2'	F_1''	F_2''	F_d
abs	H	V	abs	abs	abs
LC	H	V	abs	abs	abs
LC	H	V	abs	abs	RC
LC	H	V	RC	LC	H
abs	H	abs	abs	H	abs

表中"abs"表示那里没有滤波器, H 表示水平偏振器, V 表示垂直偏振器, LC 表示左旋圆偏振器, RC 表示右旋圆偏振器.

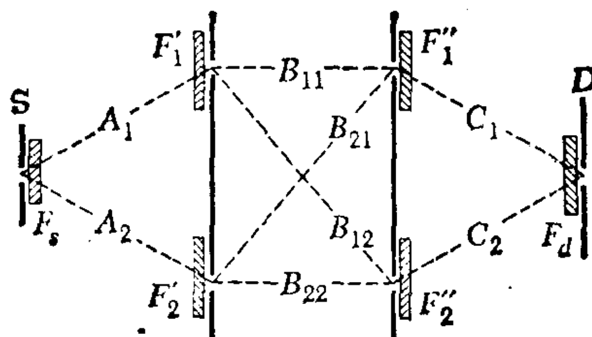


图 62C 问题 8 的图 表示图 41A 中两个双缝实验的改进. 理想的偏振滤波器可以覆盖各个狭缝. 问题在于确定滤波器的各种组合, 通过 S 上狭缝进入的光子又通过 D 上狭缝出射的几率. 数值 A_{mn}, B_{mn} 和 C_m 是没有滤波器时的传递振幅. 假设传递振幅与偏振态无关.

9. 我们来考虑理想计数器和实际计数器的差别. 即使所研究的事件没有发生, 实际计数器却偏偏也会卡嗒作响, 但有时在它应该计数的时候却不记数. 在粒子源关闭的时候卡嗒作响的速率叫做**本底速**

率. 本底计数的一个来源是总是存在着的宇宙辐射. 还有，如果两个事件相隔的时间间隔太小，实际计数器只反应一次卡嗒声. 我们把可以作为分开的事件记录下来的两个事件间的最小时间间隔 t_0 称做计数器的分辨时间. 我们可以用下述方法确定计数器的分辨时间：我们有两个放射性源 1 和 2，可以把它们放在靠近计数器的某一定位置，使得计数器有大致相同的计数速率. 令 N_0 是两个源都拿走时的记数速率. 令 N_1 是粒子源 1 在时的计数速率，N_2 是粒子源 2 在时的计数速率. N_{12} 是两个粒子源都在时的计数速率. 我们这样来安置它使得 N_{12} 比之于 $1/t_0$ 虽然不能完全忽略但远小于 $1/t_0$. 我们进一步假设，N_0 小于 N_1，或 N_2，或 N_{12}. 证明测量这四个速率可以确定 t_0，并导出用 N_0，N_1 和 N_{12} 表示的 t_0 表达式.

注意，对于理想计数器以及在没有本底情况下，我们会得到 $N_{12}=N_1+N_2$。

第七章　薛定谔波动力学

一、薛定谔的非相对论性波动方程

1　现在我们把注意力转向一个唯象理论，它在量子力学的发展过程中起过极其重要作用．这就是薛定谔方程的理论，它是薛定谔在 1926 年首次阐述的，当时正是海森伯发明矩阵力学之后不久．薛定谔的理论和海森伯的理论是量子力学中某些原理最初的定量表述．

本书中讨论薛定谔理论是想要了解波动理论在实践上效果如何、并看看在这个理论范围内如何实际地计算问题．我们选择非相对论性的薛定谔理论作为波动理论的范例，因为它在很多方面是一个特别简单的理论．

2　薛定谔方程的理论(在最严格的意义上)是以一些严格的近似作为基础的．在这些近似中，我们指出以下两点：

I．不考虑粒子的产生和湮没现象，因此在任何给定的物理条件下，假定在所涉及的时间过程中，每一种粒子的数目保持不变．

II．假定所有有关的速度都足够地小，因而非相对论性近似有效．这就是说，自始至终只讨论非相对论性的情况．

我们将这两个假设认为是严格的近似，因为经验告诉我们在自然界中确实存在着粒子的产生和湮没现象，并且我们也知道任何基本理论都必须考虑到狭义相对论中的许多事实．

我们所作的这两个假设并非相互无关的．例如，考虑一

个碰撞过程：两个质量相等、在质心系统中速度都接近于光速的粒子相互碰撞. 在这种情况下，它们就可以有足够的动能来产生同样质量，或者不同质量的新增加的粒子. 反过来，如果速度很小，可资利用的动能也小，于是就不会出现粒子的产生现象，因为这是能量守恒定律所禁止的. 不过，对这个结论有一个值得注意的例外情况. 由于光子的静止质量为零，即使所有其他静止质量不为零的粒子都以非相对论性速度运动，光子的产生和消灭(即光子的吸收和发射)仍总会发生. 如果我们从较广泛的意义上来理解薛定谔理论，我们可以把光的吸收和发射结合到理论中去，为此，我们必须把上述假设修改如下：

I* 假定不发生实物粒子的产生和湮没，然而可以发射和吸收光子.

II* 假定所有实物粒子都以比较小的速度运动，因而可以非相对论性地描写这些粒子. 对任何情况下都不能非相对论性地描写的光子则要给以特殊处理.

我们应当指出，也有"相对论性的"波动方程理论. 在这种理论中，可以放宽上述第二个假设. 著名的狄拉克方程就是这种方程的例子. 至于薛定谔方程，它也有一种相对论性的形式. 这里我们将不去讨论这些理论：当我们提到薛定谔方程时，我们指的就是根据上述假设的非相对论性形式.

3 在这一章的第一节里，我们曾提到薛定谔方程是一种唯象理论. 之所以要这么说，是由于现在清楚地了解到，不能将薛定谔方程称为基础理论. 我们已经提出为什么是这样的一些理由，希望读者能很清楚地理解这一点. 薛定谔方程的理论和一般意义上的量子力学理论并不是同一件事.

然而我们还要明确说明，当把薛定谔方程应用于原子和分子时，已证明它是极其成功的. 不应将上面所说的任何一

点误解成是对于薛定谔方程的一种贬低，它是有用的近似。

4　在讨论薛定谔方程本身之前，让我们试图理解为什么建立在第二节所说的两个假设的基础上的薛定谔理论应用于原子和分子时，会得到如此的成功．其根本的原因是精细结构常数 $\alpha \sim 1/137$ 的数值"很小"．我们在第二章中曾经断言：由于 α 比 1 小得多，原子和分子是缓慢地运动着的粒子的松散结合着的结构．除其它性质外，我们还发现，如果谈论氢原子中电子的速度还有意义的话，则这个速度必须是 $\alpha c \sim c/137$ 的数量级．这个速度也是其他原子的最外层电子的特征速度．分子中原子核以还要更小的速度运动，因而在原子和分子的领域中能相当好地满足薛定谔理论所依据的第二个假设．

5　关于第一个假设，可参考第二章中关于原子和分子物理学中的特征跃迁能量的定性讨论．典型的分子结合能和光学跃迁能量约为 1—10 电子伏的数量级．和原子结构有关的最高能量是重元素发射的 X 射线的能量，这些能量不超过 100 千电子伏．

可以把这些能量和电子的静能对比，后者为 0.5 兆电子伏．除了光子，再也没有比电子更轻的粒子了(我们已同意要用不同方法处理光子)．在电磁过程中不可能只产生一个电子，它只能够和正电子一起产生．然而，产生这一对电子需要 1 兆电子伏的能量，这远大于典型的原子和分子的能量(读者可能会反驳说，静止质量为零的中微子实际上比电子更轻．然而，中微子和其他粒子间的相互作用是非常之弱，与电磁相互作用相比较，完全可以忽略中微子的相互作用．在原子和分子物理学中我们可以完全不考虑中微子的存在)．

6　有充分的理由可以认为量子电动力学是原子和分子的"正确"理论，它是所谓的量子场论的一个特殊例子．可以把应用于原子和分子领域内的薛定谔理论看作是这个"正确"理论的

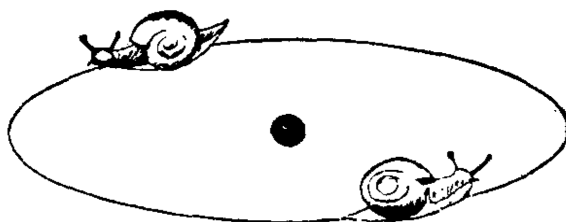


图 5.4　企图作出对原子的现实而形象化的表示的一切努力都是注定要失败的．这样一张图使我们想起实际上某种用眼睛能看到的东西．但是原子的行为同任何熟悉的宏观物体的行为是如此不同，以致不可能直接想象得出它的行为．但这并不妨碍我们用图形来表示原子的某些方面．这类示意图有点类似于漫画家关于复杂的人类活动的作品．如果图画所根据的规则是通常所理解的，那么图画的确传达了一定信息．

氦原子的上列图示并不是轻率的．这里要提醒读者，在(轻)原子里电子缓慢地运动着，这就是为什么非相对论性的薛定谔理论适用的道理．在这个图的背后还有另一个目的．无论什么时候，读者看到一张被认为是表示原子、核或分子的图画，他应该就想起作者的这个模型和以上关于图象的评语．

一级近似．如果我们把量子电动力学的推论和薛定谔理论的推论进行比较，就能明白地考查后一理论的正确性．一般的结果是：薛定谔理论可以正确地解释原子和分子结构的主要特征，这一点我们可以数学地表述如下：诸如定态能量、发射光谱线的波长、激发态的寿命、分子的几何参量等有关原子和分子的许多参数的理论表达式都可以展开成为精细结构常数 α 的幂级数．在这些展开式中，薛定谔理论正确地给出主要项．可以把高次项当作"相讨论性修正"．因为 α 很小，这些修正项一般都是很小的．

7　有一个非常简单的物理情况，就是一个粒子(例如电子)在外加力场中运动的情况，现在我们对它建立薛定谔理论．薛定谔理论肯定远比这里建立的公式普遍得多，它可以用来描写任意数目的相互作用着的粒子的运动，不过，为了理解这个理论的一般特色，我们应该从这个最简单的物理情况讲起．

首先，我们考虑一个更为简单的情况，就是不存在任何外力场时单个粒子运动的情况．在这种条件下，我们所讨论的粒子是自由粒子．薛定谔理论涉及一个称为薛定谔方程的波动方程式，这个方程式描写和粒子相联系的德布罗意波．在第五章第37节中，我们已经导出了这样的一个波动方程，就是克莱因-戈登方程．这个方程式是相对论性不变的：不论粒子运动得是慢还是快，这个方程式都成立，并且在多个惯性参考系中都有相同的形式．我们现在要按照建立薛定谔理论所依据的原则来修改这个方程式，这就是说我们将作一个非相对论性近似．再有，我们还要给描写德布罗意波的波函数 $\psi(\mathbf{x}, t)$ 以明确的物理解释．

8 在第五章中我们已经对波函数作了一个粗浅的解释：在振幅 $\psi(\mathbf{x}, t)$ 大的空间区域中最有可能找到粒子．为了使这个概念精确化，我们现在要提出一个具体的假设．

薛定谔波函数 $\psi(\mathbf{x}, t)$，即薛定谔理论中德布罗意波的振幅，以下述方式来描写粒子在空间和时间中的几率分布：假定在某一给定的时刻 t 我们想通过测量来确定粒子的位置，我们在包含 $\mathbf{x}$ 点体积为 $d\mathbf{x}^3$ 的小区域内找到粒子的几率正比于 $|\psi(\mathbf{x}, t)|^2 d\mathbf{x}^3$．因而，几率密度正比于波函数绝对值的平方．

这个假设是薛定谔理论的特征和基础．如果我们希望能进行精确的计算，我们自然应当给波函数以某种解释，上面阐明的几率解释既方便，物理意义也明确．这一深刻而又重要的概念是M．玻恩首先提出来的[1]．

9 薛定谔波函数是位置和时间的复值函数，它满足我们即将写出的(线性)薛定谔方程．每一确定的波函数对应于粒子的

1) M. Borm, "Quantenmechanik der Stossvorgänge," *Zeitschrift für Physik* 38, 803 (1926).

一个确定的运动状态．我们应当注意，如果 $\psi(\mathbf{x},\ t)$ 是一个可能的波函数，那末 $e^{i\theta}\psi(\mathbf{x},\ t)=\psi_1(\mathbf{x},\ t)$ 也是一个可能的波函数，其中 θ 是任意的实数．再者，也是最重要的一点，ψ 和 ψ_1 所确定的几率分布是全同的．这就是说，两个波函数 $\psi(\mathbf{x},\ t)$ 和 $\psi_1(\mathbf{x},\ t)$ 描写的是粒子的同一个运动状态．我们可以这样说：每一波函数都对应于粒子的一个唯一的运动状态．但是相反的表述却不成立：对于粒子的一个给定的运动状态，我们只能把它的薛定谔波函数确定到相差一个单位模量的常数复因子(即绝对值为 1 的复数因子)．两个仅仅相差这样一个因子的波函数对应于同一个物理状态．

10 假定粒子的质量为 m．考虑动量为 $\mathbf{p}$ 的平面波．因而粒子的能量可写成[1]：

$$E=\sqrt{m^2c^4+c^2p^2} \tag{10a}$$

现在我们引进非相对论性近似，设粒子的速度远小于光速．这意味着在(10a)式中 $(cp^2)^2$ 项远小于 $(mc^2)^2$ 项，从而我们可以把(10a)中的平方根展开成级数，并且只保留前面两项．

$$E\cong mc^2+\frac{p^2}{2m} \tag{10b}$$

(10b)中的第一项是粒子的静能，第二项是粒子动能的非相对论性表示式．

用 $\psi_B(\mathbf{x},\ t)$ 表示的相应的德布罗意波函数，可由下式近似地表为：

$$\psi_B(\mathbf{x},\ t)=\exp\left(\frac{i\mathbf{x}\cdot\mathbf{p}}{\hbar}-\frac{it\mathbf{p}^2}{2m\hbar}\right)\exp\left(-\frac{itmc^2}{\hbar}\right) \tag{10c}$$

这里我们把波函数写成两个因子的乘积．用 $\psi_S(\mathbf{x},\ t)$ 来表示其中的第一项：

1) 在这一章里，我们采用米·千克·秒或厘米·克·秒单位。

$$\psi_S(\mathbf{x},\ t)=\exp\left(\frac{i\mathbf{x}\mathbf{p}}{\hbar}-\frac{itp^2}{2m\hbar}\right) \tag{10d}$$

于是可得:

$$\psi_B(\mathbf{x},\ t)=\psi_S(\mathbf{x},\ t)\exp\left(-\frac{itmc^2}{\hbar}\right) \tag{10e}$$

因而:

$$|\psi_B(\mathbf{x},\ t)|^2=|\psi_S(\mathbf{x},\ t)|^2 \tag{10f}$$

从方程式(10f)可以看出，ψ_B 和 ψ_S 这两个波函数只相差单位模量的复数因子，并且这个因子与粒子的运动状态无关，亦即与 $\mathbf{p}$ 无关，对于所有时刻和所有地点，这两个波函数的绝对值平方都是相等的．为描写粒子的几率分布我们可以用"正确的"德布罗意波函数 ψ_B，也可以用 ψ_S．在薛定谔理论中我们正是这样做的．因此，由(10d)所给出的 ψ_S 就是用来作为描写以小的动量 $\mathbf{p}$ 运动的自由粒子的薛定谔波函数．这个惯用的规定纯粹是为了方便:既然因子 $\exp(-itmc^2/\hbar)$ 根本没有"物理效应"，那么又何必在计算时带着这个因子呢?

11 任何薛定谔波都可以由具有(10d)形式的平面薛定谔波迭加而得到．为了求出每一个薛定谔波都能满足的波动方程，我们仿照第五章第 37 节的步骤处理．换言之，我们要求为每一个平面波函数所满足的最简单的线性波动方程．这个推导和第五章的讨论完全相似．我们得到:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\mathbf{x},\ t)=-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi(\mathbf{x},\ t) \tag{11a}$$

这里我们略去了波函数的下标 S．今后我们只处理薛定谔波函数 $\psi_S(\mathbf{x},\ t)=\psi(\mathbf{x},\ t)$，因此下标就是多余的了．

方程式(11a)是自由粒子的薛定谔波动方程．它描写自由粒子在非相对论性近似条件下的运动．比较(11a)和第五章中的相对论性方程式(37e)，我们注意到(11a)涉及对于时间的一次导数．还有，光速在(11a)式中也不出现，这与薛定

谔方程的非相对论的性质是相符合的.

12 考虑薛定谔方程(11a)的平面波解. 这个波的相速度 v'_f 是:

$$v'_f=\frac{\omega}{k}=\frac{p}{2m},$$

其中

$$\omega=\frac{p^2}{2mh}, \quad k=\frac{p}{h} \tag{12a}$$

另一方面,(10c)所给出的(非相对论性近似)德布罗意的相速度 v_f 是:

$$v_f\cong\frac{mc^2}{p}+\frac{p^2}{2m} \tag{12b}$$

读者可能对这个事实感到困惑: 虽然我们假设 ψ_B 和 ψ_S 这两种波描写的正是同一物理状态,但是两个相速度 v'_f 和 v_f 却并不相等. 不过,也不必奇怪: 相速度和粒子的速度并不是同一件事,相速度并不对应于可以直接观测的任何事物. 另一方面,下式给出薛定谔波的群速度:

$$\frac{1}{v}=\frac{dk}{d\omega}=\frac{m}{p} \tag{12c}$$

这个速度才确实等于粒子的速度——也应该是这样. 在第五章中我们已经指出, 德布罗意波的群速度也就等于粒子的速度,所以这两种波确实以相同的群速度传播.

13 我们现在进一步来考虑外力场中粒子的运动, 这个外力可以从一个势场推导出. 我们用 $V(\mathbf{x})$ 来表示粒子的势能, 它是位置的函数但不是时间的函数.

读者可能对在量子力学中引进势来描写作用于粒子上的力这一概念有疑问. 当然作用在一个粒子上的力是由于有其他粒子存在. 一致性要求其他粒子也应用量子力学来描写. 因此在给定的物理条件下,应当把所有的粒子都用波来描写, 而粒子相互作用的基本理论则必须是描写粒子的德布罗意波

之间的相互作用的理论. 量子场论就是试图作出这种基本描述的理论. 按照这个理论，描写电子的德布罗意波和量子化的电磁场相互作用，这个电磁场再和描写质子的德布罗意波相互作用. 因此，电子和质子之间的电磁相互作用是间接地发生的，它以量子化的电磁场作为媒介. 我们可以把这一点表示为：相互作用是通过交换光子来实现的(这是一个很好的比喻).

然而在这一章里，我们只限于在薛定谔理论所特有的近似范围内讨论问题. 我们所用的理论不是基本理论而只是唯象理论. 我们只对单个粒子的运动感兴趣，因此试图把所有其他粒子的效应以有效势 $V(\mathbf{x})$ 来表示是合理的. 再有，在选择这个势时，以经典的类似作为依据也是合理的.

假如我们考虑带电粒子在由连结到电池上的一些导体所决定的宏观电场中运动，引入势函数的合理性将是非常清楚的. 在这个情况中，我们知道用经典理论可以很精确地描写电子的运动. 电子轨道的性质取决于导体系统所确定的静电势. 用量子场论的语言来说，电子和导体中所有的带电粒子交换光子. 而且根据直觉就可以明了，所有这些"光子交换"的净效应可以用电子在空间所"遇到"的静电势来描写.

14 在薛定谔理论中引进有效势函数这个概念从许多方面看来都和经典光学中引进折射率十分类似. 我们都很清楚，在微观尺度上，玻璃并不是均匀的物体，而是由原子所构成的. 如果我们想用基本方式来描述光波(光子)通过玻璃的传播，我们就应当考虑光波和整块玻璃中所有单个原子的相互作用. 反过来，如果我们满足于唯象地描述光通过一块玻璃(这可能是光学系统的一个组成部分)的传播，我们就可以用一个有效折射率来描写所有基元相互作用的效应. 正如我们曾经说过的，在折射率和薛定谔理论的势之间具有一定的相似性.

记住这个相似性将有助于我们对薛定谔理论的理解．我们还应该记住，通过折射率来描写固体的电磁性质是有它的局限性的．同样，在物理上也有基本粒子间的相互作用完全不能够用势函数来描写的情况：只有在薛定谔理论的两个基本前提成立的情况下，势函数才有意义．

15 现在考虑这样一种情况，假设在空间中有一个有界的区域，区域 I，其中粒子的势能是 V_{I}．设有另一个有界的区域，区域 II，其中粒子的势能为 V_{II}．再假设在这些区域的边界处势函数很快地降为零．我们把这两个区域以外的区域都叫作区域 III．假设 $V_{\mathrm{III}}=0$．我们把这个情况简单地表示在图 15*A* 中．图中粗的实线表示作为位置函数的势能．

设有一个总的非相对论性能量为正的粒子在这个势场内运动．由于我们的讨论是非相对论性的，因此 E 就是粒子的动能和势能之和；在这里面不包括静能 mc^2．按照经典力学，在区域 III 中，粒子的动能就等于 E，在区域 I 中，粒子的动能是 $(E-V_1)$，在区域 II 中是 $(E-V_{\mathrm{II}})$．粒子的动能 E_{kin} 和动量 p 的关系为：

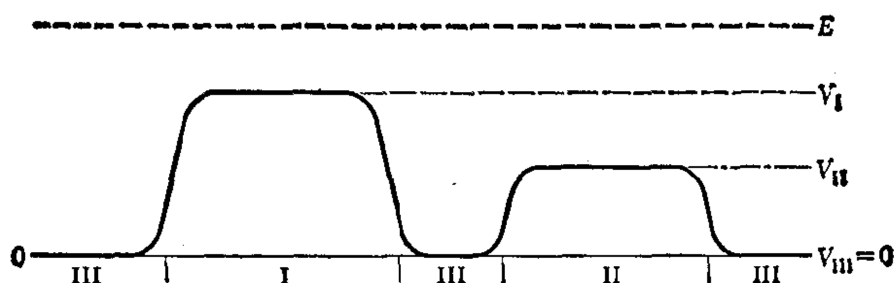


图 15*A* 我们是这样“导出”薛定谔方程的：首先找出在区域 I，II 和 III（在这些区域里势是常数）中一个波能合理地满足的方程式．很容易看出，方程式(16c)、(16e)以及(16f)必定成立．然后我们用某种技巧把这些方程式结合为一个方程式(17a)，这就是薛定谔方程．

在图中，用实线表示势能曲线．这里假定能量 E 大于这三个区域内的势能．由粗的虚线表示总能量的大小．这条虚线位于势能曲线的上面．

$$E_{\text{kin}}=\frac{p^2}{2m} \tag{15a}$$

在图15A中用虚线表示总能量．我们暂时假定总能量在各处都大于势能．

16 我们现在来讨论和粒子相联系的薛定谔波的行为，波的频率ω和能量E之间的关系为$E=\hbar\omega$，因而波函数只通过因子$\exp(-itE/\hbar)$依赖于时间t．由此可知，与以一定的能量E运动着的粒子相联系的薛定谔波满足方程式：

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\mathbf{x},\ t)=E\psi(\mathbf{x},\ t) \tag{16a}$$

波与空间坐标的关系取决于粒子的动量：通过德布罗意方程$\lambda=\hbar/p$，动量p和波长λ相互联系起来．考虑区域III中能量为E的波．设想把这个波分解为平面波的迭加．这些平面波对空间坐标的依赖关系由指数因子$\exp(i\mathbf{x}\mathbf{p}/\hbar)$给出，其中$\mathbf{p}$的数值由下式给出：

$$E=\frac{p^2}{2m} \tag{16b}$$

由此可得，每一个平面波都满足微分方程：

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi(\mathbf{x},\ t)=E\psi(\mathbf{x},\ t) \tag{16c}$$

因此，对应于能量为E的粒子的薛定谔波在整个区域III中必定满足微分方程式(16c)．

现在来考察区域I中的波．假定我们把这个区域内的波分解成形式为$\exp(i\mathbf{x}\cdot\mathbf{p}/\hbar)$的平面波，动量$\mathbf{p}$的数值可以根据(15a)来求出：

$$\frac{p^2}{2m}=E_{\text{kin}}=E-V_{\text{I}} \tag{16d}$$

我们断定在区域I中的薛定谔波必定满足方程式：

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi(\mathbf{x},\ t)=(E-V_{\text{I}})\psi(\mathbf{x},\ t) \tag{16e}$$

同理我们断定，在区域 II 中的薛定谔波函数必定满足微分方程：

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi(\mathbf{x},\ t)=(E-V_{\mathrm{II}})\psi(\mathbf{x},\ t) \qquad (16f)$$

17 我们导致 I、II 和 III 三个区域内的波函数所满足的三个方程式(16c)、(16d)以及(16f)的论证看来是合理的．因此一件很吸引人的事是把这三个方程式归纳成一个方程式：

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi(\mathbf{x},\ t)=[E-V(\mathbf{x})]\psi(\mathbf{x},\ t) \qquad (17a)$$

其中 $V(\mathbf{x})$ 是势函数，它在这三个区域内所取的数值分别为 V_{I}、V_{II} 和 $V_{\mathrm{III}}=0$．然而必须注意，在势很快地变化的边界区域上，"正确的"微分方程应该是怎样的，我们没有提出任何论证．所以方程式(17a)在各处都必然成立这一点并不是显而易见的，事实上，现在作者要坦白承认，是他有意识地安排了导致上述方程式的论证，并且精心设计地画出图15A，引导读者相信像(16e)那样的方程式必定是正确的．我们的整个论证中实际上是有缺点的．只要区域 II 的宽度比这个区域内的德布罗意波长大很多，我们就可以有把握承认上面的结论(16e)是极其合理的．在这个区域中波的局部行为应当不依赖于别处的势，因而波长和动能之间的关系就必定符合我们的假设．但是，如果区域 II 的宽度与波长相比是小量，也就是说如果在一个波长的范围内势 $V(\mathbf{x})$ 有明显的变化，情况就不同了．在这个情况中，并不那么清楚波函数对空间坐标依赖关系应当是什么样子的，因为根据德布罗意关系，由动能 $[E-V(\mathbf{x})]$ 所决定的 $\mathbf{x}$ 点的"波长"应是位置的函数．

因此，对空间各处以及对各种势函数 $V(\mathbf{x})$，方程式(17a)总是一个正确的方程式这一点并非不证自明的．不过我们将按照薛定谔的作法假定方程式(17a)是正确的．作为一个描

写薛定谔波的行为的方程式，它至少是一个合理的方程式，我们应该给它一个合理的考验．可是我们要讲清楚，我们的讨论并不是对于方程式(17a)的正确性的证明，而仅仅是支持它的一种说得过去的论证．实际上我们可以稍微处理得好一些．一种可能的处理方法是从量子电动力学出发，按照这个方法，可以证明，方程式(17a)当应用于包含原子和分子在内的非相对论性问题时，是场论公式的一种近似．另一种处理方法是系统地研究具有合理的物理解释的(包括第8节中所谈到的几率解释)可能的波动方程是什么．对粒子受到力的作用的情况，我们希望保留关于波函数的几率解释．那末就可以证明，在某种意义上说，对于和粒子在力的势场 $V(\mathbf{x})$ 中运动这个经典力学问题"相对应"的量子力学问题，方程式(17a)是最简单的波动方程．详细地研究这些论证会使我们离题太远，因此我们必须把方程式(17a)当作建立在上面提出的论证基础上的一个工作假说而接受下来．

18 方程式(17a)和具有一定能量 E 的波相联系．对于这样的波，关系式(16a)成立，从而我们可以把(17a)重新写成下面的形式：

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi(\mathbf{x},\ t)+V(\mathbf{x})\psi(\mathbf{x},\ t)=i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\mathbf{x},\ t) \tag{18a}$$

在这个方程式里 E 不再出现，因此(18a)对于各种能量 E 都成立，对于各种薛定谔波都成立．

方程式(17a)和(18a)就是著名的薛定谔方程．方程式(18a)叫做含时间的薛定谔方程，而(17a)叫做不含时间的薛定谔方程．我们要记住，(18a)是对于所有薛定谔波都成立的方程式，而(17a)(对于一定 E 的数值)只对于描写总能量为 E 的粒子的薛定谔波才成立．

当然，对于方程式(17a)和(18a)，可能做到的最好的验证是把根据这些方程式所作出的推论和实验事实进行比较. 继薛定谔这一伟大发现之后，在一个短时期内，这个方程式就应用于原子和分子物理学的许多问题上并得到显著的成功，物理学的这些分支从而有一个大的进展. 在这个发展过程中，薛定谔本人起了积极的作用. 在下一章我们将看到他是怎样解释原子的准静态. 薛定谔写出了(18a)这样一个方程式，这个方程式被证明为对于它所企图描绘的情况都是一个正确的方程式.

在这个课程里我们不想讨论解方程式(18a)的一般理论，而把它留给更高级的课程去讨论. 我们只想讨论薛定谔理论的几个非常简单的应用，看一下它是怎样解决问题的.

二、几个简单的"势垒问题"

19 我们曾假设薛定谔方程(17a)和(18a)对于任意势函数$V(\mathbf{x})$成立. 然而在"导出"方程(17a)的过程中，仅考虑了势$V(\mathbf{x})$在任何地方都比总能量E小的情况，现在让我们看看当存在势能比总能量E大的区域时，情况如何. 按照经典力学这些区域粒子是不能进去的，但是我们将看到在量子力学里情形是不同的.

为简单起见，我们将把讨论局限于一维的情况：粒子可以沿着一直线运动，它的位置由坐标x确定. 一维模型有很大的方便，它的不含时间的薛定谔方程是一个常微分方程，而不是偏微分方程，因此数学讨论大为简化. 但是一些基本的特性在这个简单模型之中都已表现出来了.

20 考虑粒子的能量$E>0$时的薛定谔方程，则(17a)的一维类比式为

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x, t)=[E-V(x)]\psi(x, t) \qquad (20a)$$

波函数 $\psi(x, t)$ 与时间的关系由因子$(-itE/\hbar)$给出，如果愿意的话，波函数可以写成

$$\psi(x, t)=\varphi(x)\exp\left(-\frac{itE}{\hbar}\right) \qquad (20b)$$

在这种情况下，与时间无关的因子 $\varphi(x)$ 满足同一方程(20a)，即

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\cdot\frac{d^2}{dx^2}\varphi(x)=(E-V(x))\varphi(x) \qquad (20c)$$

这是一个常微分方程．如果我们从这个方程解出 $\varphi(x)$，那末从(20b)就得到薛定谔波函数 $\psi(x, t)$．

21 现在考虑图 21A 所示的情况．图中粗的虚线表示总能量 E，实线表示势函数 $V(x)$．我们假定，向图的左边走时，势函数趋向常数值零，而往图的右边走时，它趋于常数值 $V_0>E$．动能为零的点 x_0 叫做转折点．根据经典力学，从左面入射的粒子将在这点附近停下来，并且向右转回去．x_0 右边的区域经典粒子是不能进去的．

现在对图 21A 所示的势函数求解方程(20c)．解 $\varphi(x)$

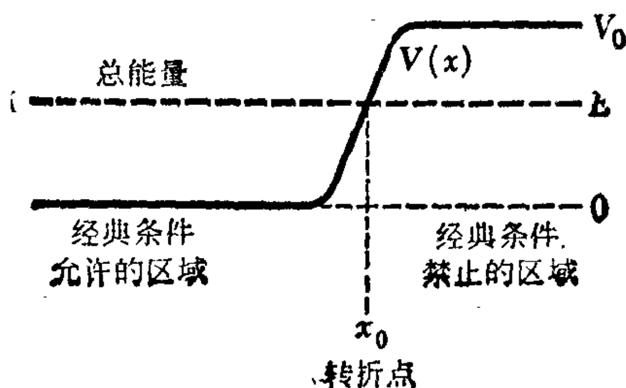


图 21A 本图是为了说明第 21 节的讨论．实线表示势，粗虚线表示总能量 E 的量值．在点 x_0 处势和 E 相等，x_0 是经典转折点．根据量子力学在经典条件禁止的区域内，存在找到粒子的有限的几率．

是 x 的某一函数，它是连续的，其一级微商也是连续的．我们不必真正求解这个方程，就能推断波函数 $\varphi(x)$ 在 x_0 的右边不会为零，按照我们对波函数的几率解释，这意味着在 x_0 的右边存在着找到粒子的某种不等于零的几率．因此量子力学预言粒子能够穿透到经典力学所禁止的区域．

22 让我们试着更明确地研究这个现象．为此目的，我们进一步把问题简化，并用图 22*A* 中的阶跃势来代替图 21*A* 中平滑地上升的势．为方便起见，我们还选取转折点 x_0 作为 x 轴的原点，即 $x_0=0$．这样就有

$$x<0 \text{ 时} \quad V(x)=0, \qquad x>0 \text{ 时}, \; V(x)=V_0>E \tag{22a}$$

图(22*A*)所表示的势可以认为是图(21*A*)所表示的那种类型势的极限情况，势越来越陡地上升直至达到如图 22*A* 所表示的理想情形．只要势是连续函数，波函数将会是连续的并且有连续的一级微商，这种性质在阶跃势的极限情况中也被保存下来．但是在后一种情况里，波函数的二级微商一般会显现出一个“跳变”．应该注意，这种讲法是关于薛定谔理论中出现的微分方程的数学讲法．作为物理学工作者我们总应把阶跃势认为是实际势的理想化，因此决不会怀疑物理上的波函数必须满足所提到的连续性．

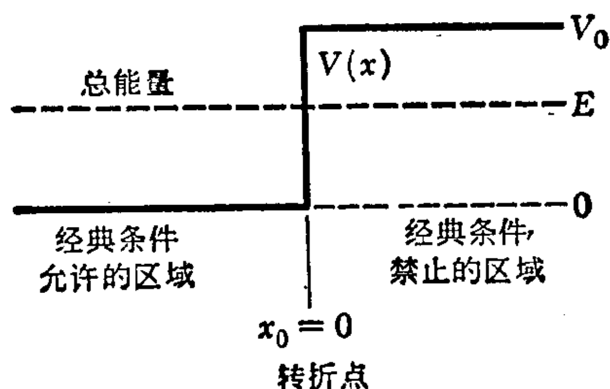


图 22*A* 为了简化讨论，用阶跃势来代替图 21*A* 的连续变化的势．

23 考虑 $x>0$ 的区域里的波动方程. 在这区域它具有下述形式

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\varphi(x)=(E-V_0)\varphi(x) \tag{23a}$$

我们可以立刻找到两个线性独立的解,即

$$\exp(-xq), \quad \exp(+xq)$$

其中

$$q=\sqrt{\frac{2m(V_0-E)}{\hbar^2}} \tag{23b}$$

解 $\exp(+xq)$ 随 x 增加而指数式地增加, 它的绝对值的平方也是如此. 按照波函数的几率解释, 这意味着找到粒子的几率密度随 x 的增大而无限地增大. 这种性质的解在物理上是不能接受的. 这里遇到了波动方程的有物理意义的解必须满足一些边界条件的另一个例子: 根据物理的理由, 当 x 趋向无穷大时, 必须去掉无限地增大的解. 这样剩下唯一可能的解就是 $\exp(-xq)$. 若我们用 $\varphi_R(x)$ 来表示 $x>0$ 的区域内的波函数,则有

$$\varphi_R(x)=\exp(-xq) \tag{23c}$$

24 其次考虑 $x<0$ 的区域. 在这个区域薛定谔方程取下述形式

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\varphi(x)=E\varphi(x) \tag{24a}$$

它的两个线性独立的解是

$$\exp(ixk), \quad \exp(-ixk).$$

其中

$$k=\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} \tag{24b}$$

这两个解是振荡解: 当 x 趋于 $-\infty$ 时, 它们不无限地增加, 这两个解在物理上都是可接受的[1]. 若用 $\varphi_L(x)$ 表示在

1) 如果读者为这种说明所困惑,请看本章 51 节.

$x<0$ 的区域内的波函数，则我们得出结论，波函数必然是下面的形式

$$\varphi_L(x)=A\exp(ixk)+B\exp(-ixk) \qquad (24c)$$

这里 A 和 B 是常数.

如何确定常数 A 和 B 呢？上面讲过波函数必须是连续的，并具有连续的一级微商．这意味着函数 $\varphi_R(x)$ 和 $\varphi_L(x)$ 在原点必须以一种方式相匹配，使得

$$\varphi_R(0)=\varphi_L(0), \quad \varphi'_R(0)=\varphi'_L(0). \qquad (24d)$$

因为它们两者都表示同一个波函数，只不过是在转折点 $x_0=0$ 处相会合的两个不同的区域内．(24d)的两个条件给出了两个方程，即

$$A+B=1, \quad ik(A-B)=-q \qquad (24e)$$

这样两个方程确定两个常数 A 和 B，很简单，其解即为

$$A=\frac{(1+iq/k)}{2}, \quad B=\frac{(1-iq/k)}{2} \qquad (24f)$$

25 为了解释上面的解，用常数 $1/A$ 乘各处的波函数是方便的：我们能做到这点，因为薛定谔方程是线性方程．于是我们可以把解直接地写成：

$$\varphi(x)=e^{ixk}+\left[\frac{1-i\sqrt{V_0/E-1}}{1+i\sqrt{V_0/E-1}}\right]e^{-ixk}, \text{ 当 } x<0 \qquad (25a)$$

和

$$\varphi(x)=\frac{2e^{-xq}}{1+i\sqrt{V_0/E-1}} \quad \text{当 } x>0 \qquad (25b)$$

其中

$$k=\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}, \quad q=\sqrt{\frac{2m(V_0-E)}{\hbar^2}} \qquad (25c)$$

现在来考察由(25a)给出的在区域 $x<0$ 中的波函数．它是两个波的迭加，第一项 $\exp(ixk)$ 表示向右边行进的波，第二项与 $\exp(-ixk)$ 成正比，它表示向左边行进的波．第二项

中 $\exp(-ixk)$ 前面的系数的模为1：

$$\left|\frac{1-i\sqrt{V_0/E-1}}{1+i\sqrt{V_0/E-1}}\right|=1 \tag{25d}$$

因此两个波具有同样大小的振幅．由于波的振幅的绝对值的平方总要和粒子"通量"成正比，因此我们得出结论：(25a)式的波函数描述了从左面入射的粒子被势"丘"反射回左面的情形．这种解释与有关的经典图象是一致的．

在 $x>0$ 的区域内，波函数由(25b)给出，它描述了薛定谔波穿透到对经典粒子禁止的区域．穿透波的振幅随着进入禁区的深度而指数式地减少，在离势垒较远处，波函数的振幅实际上为零，这也与经典的图象相符合．图(25A)说明这些特点．

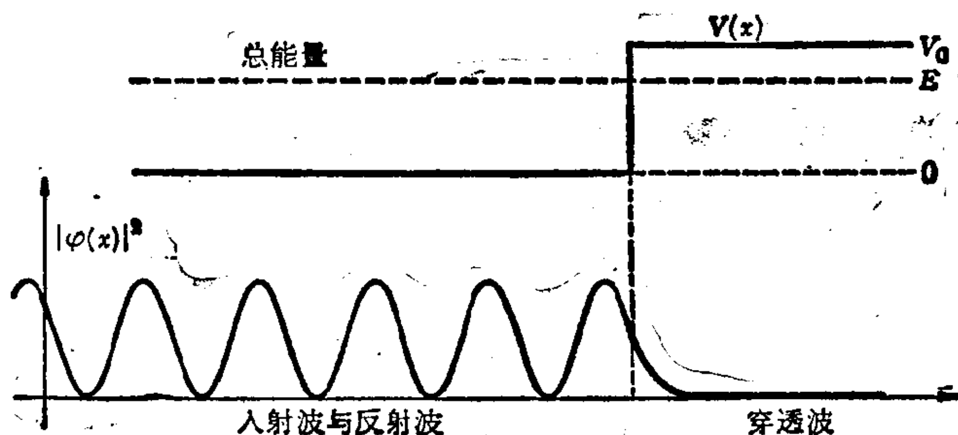


图 25A　图的上面部分表示势 $V(x)$．总能量 E 用粗虚线表示．图的下面部分表示波函数 $\varphi(x)$ 的绝对值的平方．正如我们看到的，波穿透进了经典上所禁止的区域．在势垒的左边有驻波的图样，它是由于入射波同反射波的干涉而引起的．注意波函数和它的微商在转折点是连续的．

26　考虑势垒的高度趋向无穷大即 $V_0\to+\infty$ 这种极限情况是有趣的(能量 E 保持常数)．考察(25c)，我们看到当 V_0 趋于无穷大时，q 也将趋于无穷大，这意味着波函数随(离经典转折点的)距离而减少的速率趋于无穷大，穿透到禁区的波函数越来越少．考察(25b)，我们看到当 V_0 趋于无穷大时，穿

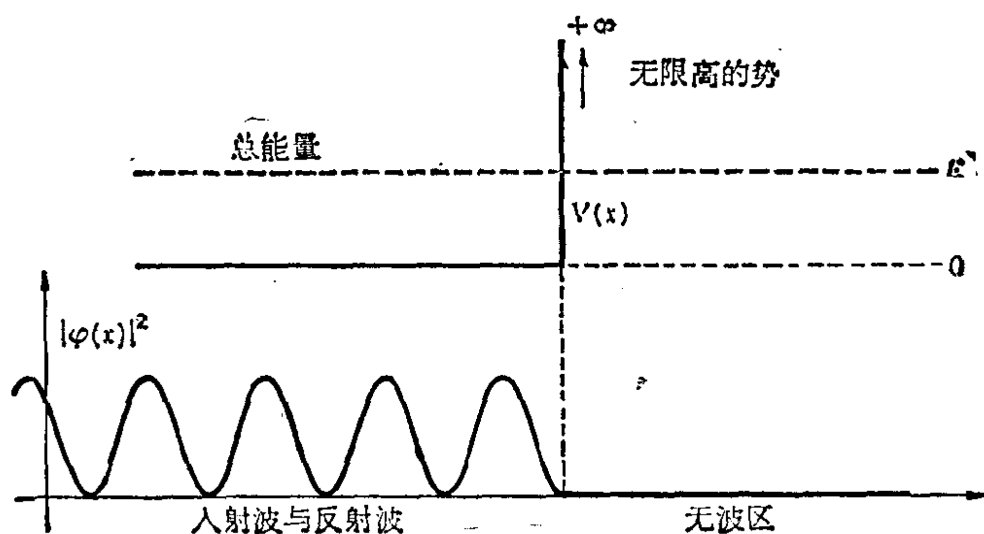


图 26A 这图说明无限高势阶跃的极限情况.（与图 25A 相比较）图的上面部分表示势. 粗虚线表示总能量 E. 图的下面部分表示波函数 $\varphi(x)$ 绝对值的平方. 不仅波函数而且它的微商在转折点变为零. 当然波函数平方的微商在转折点也为零.

透波的振幅趋于零，因而在无限高势"丘"的极限情况，我们得到:

$$当\ x<0 \quad \varphi(x)=e^{ixk}-e^{-ixk} \tag{26a}$$

$$当\ x>0 \quad \varphi(x)=0 \tag{26b}$$

我们的结论是: 如果势垒无限高，那么在势垒处即在 $x=0$ 处，以及在势垒的右边即 $x>0$ 处，波函数必然消失.

图 26A 表示了波函数绝对值平方的行为，也就是粒子的几率密度. 注意几率密度在势垒的左边显示了振荡的行为，这是量子力学的干涉效应，这在经典力学中没有相应的现象. 当然在图 25A 中也可以看到同样的特点.

27 我们之所以如此详细地考察阶跃势的情况，是为了使读者确信能够求解薛定谔方程，它的解在物理上是能够加以说明的. 给定任意合理地连续的或阶跃连续的势，我们可以确信解是存在的. 然而要求出这个解常常是不容易的事. 但是复杂之处仅是数学技术方面的，即使不知道正确的显式解，我

们往往能说出许多关于解的性质，从而对物理体系的行为作出一般的说明．到目前为止，根据我们的研究已能得出结论：薛定谔波能够穿透到经典力学中粒子的禁区中去．

28 为了增加读者对薛定谔方程的了解，让我们考虑下面的情况．图 28*A* 表示了一个“势的阶跃”，我们希望研究能量 $E>V_0$ 的粒子在该势中的运动（详细的研究留给读者作为练习：本章末的第一个问题）．

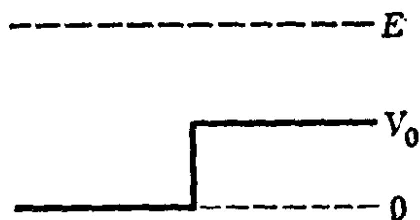


图 28*A* 为了说明 28 节内的讨论．这里粒子的能量 E 大于势垒的高度．根据经典理论粒子不会被这个势垒反射，但是按照量子力学入射波将一部分地透射，部分地被反射．

读者会注意到在阶跃左边的区域里，我们能找到波动方程(20c)的两个物理上可接受的解，同时我们也能够在阶跃的右边区域找到两个在物理上可接受的解．我们如何知道该挑选哪个解呢？这决定于我们想研究的物理情形．假定我们要考察粒子从左边入射到阶跃处的情况，波或许会部分地在阶跃处被反射，但是一部分波会通过阶跃处而继续向右行进．这意味着对于这问题，正确的波函数必须是这样的，它表示粒子在阶跃处右边的区域仍向右行进，即对于 $x>0$，它必须是 $\exp(ixk')$ 这种形式．在阶跃左边的区域里，波函数可以是 $[A\exp(ixk)+B\exp(-ixk)]$ 的形式．这里第一项描述向右行进的波，第二项描述向左行进的波．第二项表示反射波，第一项表示入射波．如何确定 A 和 B 呢？A 和 B 由波函数及其一级微商在任何地方、特别是在阶跃处必须连续这两个条件决定．这样对于两个未知数给出了两个方程，求出了这两个振幅后，我们还能够求出入射波、反射波和透射波的强度，从而求出这种类型的“势垒”的反射系数．

代替上述情况，假定我们想要考虑的是当粒子从右面入

射时发生什么情形．我们知道在这种情况下势垒左面的波函数必定是 $\exp(-ixk)$ 的形式，因为在势垒左边只有向左行进的波，在势垒的右边，波函数是 $[A'\exp(ixk')+B'\exp(-ixk')]$ 的形式，利用波函数及其一级微商在阶跃点必定连续这两个条件，我们再次求出 A' 和 B'．因此，波函数的选择决定于我们所要考虑的物理问题．

从考察粒子在图 28A 那种势中运动的行为中所学到的是：一般讲来在势场中的粒子将会被势的任一突变部分地反射，并且粒子能部分地穿透过不连续区．

29 其次考虑图 29A 所表示的情况．图中势在 $x=0$ 及 $x=a$ 两点不连续，鉴于上节所研究的情况，在两个不连续处波将部分地被反射和部分地透射．

假定我们想要考虑粒子从左面入射到这个势垒．读者也许认为这是一个难题，应该按如下办法来求解．我们考虑波从左边入射，求出这个波在 $x=0$ 的第一个不连续点被反射的部分以及透射的部分．透射波射到 $x=a$ 的第二个不连续点，是部分地被反射，部分地透射．反射部分折回到 $x=0$ 的不连续点，它再次部分地被反射和部分地透射．这样，为了求出向势垒右面出射的波，我们必须考虑在两个不连续点之间无数次来回的反射，并把所有透射到点 $x=a$ 的右边的分波振幅加起

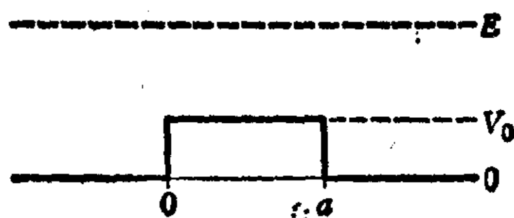


图 29A　为了说明第 29 节的讨论．通过考虑在跳变点 $x=0$ 和 $x=a$ 处所有重复的部分反射和透射，这个问题能够求解．然而直接求出薛定谔方程的全局解是要容易得多：这样一下子就计入了所有的多次反射．

来．我们真的能解这个问题吗？回答是问题的确能够以这种方式求解，但是有一个容易得多的求解方法．我们所要做的只是去找寻薛定谔方程(20c)的这种解，它处处连续，处处具有连续的微商，并且当$x>a$时它的形式为$\exp(ikx)$．最后一个条件表示能够穿透势垒的那部分入射波在$x>0$的区域里必然向右行进：这相当于我们所要考虑的物理条件．

因此对于$x>a$波函数的形式为$\exp(ixk)$，当$a>x>0$时，波函数的形式是$[A\exp(ixk')+B\exp(-ixk')]$，为了求出$A$和$B$，我们给波函数及其一级微商加上必须在$x=a$处连续的条件．在$0>x$的区域，波函数的形式是$[A'\exp(ixk)+B'\exp(-ixk)]$，然后加上波函数及其一级微商在$x=0$处必须连续的条件，我们就可以确定$A'$和$B'$．这样我们求出了与我们想要研究的物理问题相对应的薛定谔方程(20c)的全局解，这个解是单值的(除相差一个总的常数因子)．经过有限的努力，我们显然能解决这个问题．

30 需要了解的重要之点是求解这类势垒问题所要做的只是求出到处有效的薛定谔方程(20c)的解，而且这个解依赖于所研究的物理问题的边界条件，即诸如在势垒的右边波必定是$\exp(ixk)$的形式之类的条件．这个步骤自动地计入了根据物理直觉所想到的所有“多次反射”．从考虑多次反射来试图求解这个问题并不错，但是直接求薛定谔方程的全局解要容易得多．

考虑如图30A所示的势垒．粒子在什么地方发生反射呢？答案是发生在势函数变化的整个区域．如果愿意，可以把连续变化的势函数$V(x)$用大量的非常小的阶跃来近似，如图30B所示．在每个阶跃处，波部分地透射和部分地被反射，我们可以再次把这个问题当成是“多次反射问题”．薛定谔方程(20c)简明地描述了所有这些多次反射．如果愿意，我们可

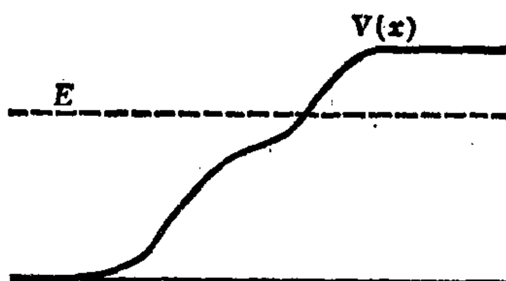


图 30A　因为能量 E 小于在右面的势的极限值，所以粒子（波）被这个势垒反射（总能量由虚线表示，势由实线表示）。粒子在什么地方发生反射呢？答案是发生在势函数变化的整个区域。

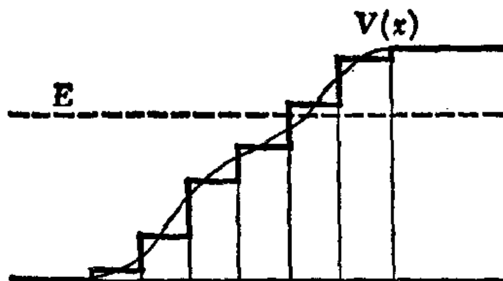


图 30B　图 30A 所表示的势近似表示成阶跃变化的势。在每个不连续处波部分地被反射和部分地向前行进。薛定谔方程的解计入了所有的"多次反射"。

用这种方式来解释薛定谔方程．如果我们求出了方程 (20c) 的全局解，从效果上看，就是一下子把所有这些无限多的局部反射和透射都计算进去了．

31　现在考虑另一个容易想到的问题．倘若势是图 31A 所示的形式，当势垒的高度 V_0 大于 E 时发生什么情况呢？

答案是很容易猜出来的：从左面入射的波将部分地被势垒反射，而部分地能穿透势垒进入区域 III．按照经典的观点，原来在区域 I 的粒子将会在 $x=0$ 的点被反射，它不可能穿透到区域 II 和 III．一个粒子能"漏过"按经典观点看来是

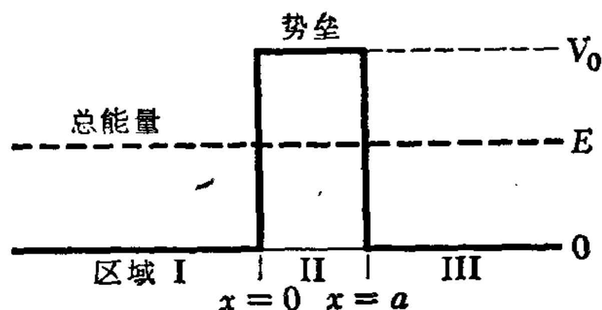


图 31A　实线代表势，粗虚线表示总能量．按照经典理论，从左面反射的粒子不能通过这个势垒；按照量子力学存在粒子"漏过"势垒的有限的几率．这现象称为隧道效应．

绝对不透明的势垒，这是量子力学的显著特点之一．这现象称为隧道效应．

要对图 31A 所示情况求解薛定谔方程可以按照第 28—30 节所说明的那样去做．我们求出三个区域 I、II 和 III 中每个区域的一般解，然后加上波函数及其一级微商必须处处连续的条件，特别是在两个转折点 $x=0$ 和 $x=a$ 处必须连续的条件．因此图 31A 的势垒问题原则上并不困难，但是要求出详细的解是很费劲的．好在我们能够了解这个问题的根本特点而用不到完全解薛定谔方程，因此可以把详细求解留给以后的课程(或作为习题：参看问题 2)．

32 考虑当粒子从左边入射这一特殊情况的解．粒子被势垒部分地反射并能部分地穿透．这意味着在薛定谔方程的解中有关的解是这样的解，即在区域 III 波函数的形式为 $\exp(ixk)$，它表示粒子在这个区域向右传播，在区域 I 必然有两个波：向左传播的波和向右传播的波．前者代表反射波，后者表示入射波．因此在区域 I 波函数的形式为：

$$\varphi(x)=e^{ixk}+Ae^{-ixk}$$

其中

$$k=\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} \tag{32a}$$

A 是一个常数，它描写了反射波的振幅．因为入射波的一部分穿透势垒，所以它的绝对值小于 1．

在势垒内部波函数基本上是下面形式的指数函数

$$\varphi(x)\cong B\exp(-xq),\quad q=\sqrt{\frac{2m(V_0-E)}{\hbar^2}} \tag{32b}$$

这里 B 是常数．上面的波函数仅是近似的，然而如果势垒不是太低的话，这种近似是好的．

假定 aq 比 1 大很多，则在这种情况下由(32b)给出的波函数的比值 $\varphi(a)/\varphi(0)\cong\exp(-aq)$ 是一个小量．如果回忆

一下第24节中关于如何使两个解在转折点相匹配的讨论，就可以断言：在区域III中的波函数的振幅与区域I中向右行进的波函数的振幅之比的绝对值，必须粗略地由比值

$$\varphi(a)/\varphi(0)\cong\exp(-aq)$$

给出．所说的比值并不是简单的指数因子，这肯定是对的，然而最重要的是当aq比一大很多时，即势垒既高又厚时，这个因子就完全处于决定地位．

33 我们已假定入射波具有单位振幅，透射至区域III的波的振幅是比较小的，它的量值或更正确地说它的数量级近似等于$\exp(-aq)$．这个振幅的平方（绝对值）T有一个简单的物理解释，它等于射到势垒上的粒子通过势垒的几率．因此这个几率由下式给出：

$$T=|\varphi(a)|^2\sim\exp(-2aq) \tag{33a}$$

或由(32b)的第二个表示式得到：

$$T\sim\exp\left\{-2a\sqrt{\frac{2m(V_0-E)}{\hbar^2}}\right\} \tag{33b}$$

量T称为势垒的透射系数．正如我们所看到的，这个量

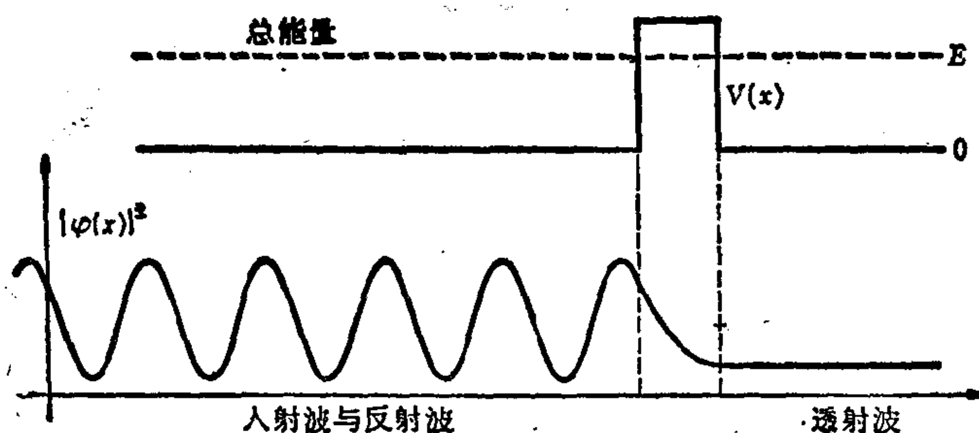


图 33A 隧道效应的示意说明．图的上面部分表示势（及由虚线表示的总能量）．下面部分表示波函数的绝对值平方．注意透射波以及在势垒内部波函数指数减少．在势垒左边有不完全的驻波图样．反射波的振幅比入射波的振幅小，因此合成后的振幅没有一处为零．

的表示式(33b)的近似推导是基于这样一个非常简单的事实:在势垒内部往右行的波函数的振幅大致是指数地减少. 我们主要感兴趣的是 aq 大的情况,这意味着 T 非常小. 当然,我们可以导出 T 的正确表达式,这时在(33b)式中将出现一个附加因子. 然而上面所给出的指数因子是决定性的因子,并且对我们的目的而言近似式(33b)是完全足够的.

图 33*A* 示意地表示了势垒的效应. 图的上部分表示势,而图的下部分表示波函数绝对值的平方. 透射波是向右行进的单一复数波,因此它的模数是常数,如图所示.

34 在考虑量子力学隧道效应理论的物理应用之前,我们希望指出在经典电磁理论中与这种效应相类似的现象. 这要涉及平面电磁波在折射率不同的两个区域的分界平面上的反射.

假定在某媒质中行进的平面波(由图 34*A* 阴影区域表示)入射到光疏媒质和光密媒质之间的边界平面上(光密媒质的折射率比光疏媒质的折射率大),进一步假定入射角大于全反射角以及光疏媒质延伸到边界左边无穷远处,那么波将被全反射. 图 34*A* 已示意地表示这一情形,图中虚线表示"射线",即该局部的波前的法线. 这里尽管波不能在光疏媒质中传播,但在分界面附近电场不为零:场透入到光疏媒质中去. 当进一步从分界面向左深入,电场的振幅指数式地减少. 这种情况与在第 22—25 节中所考虑的量子力学问题完全类似.

现在考虑图 34*B* 所示的情形. 图中的光疏媒质仅是一薄片. 在这种情况下,从右边入射到边界上的波部分地被反射. 然而一部分波能够贯穿透"禁区",因此这部分波将会在光密媒质中向左传播. 这种情形与量子力学的势垒穿透相类似. 注意我们没有在禁区画"射线",理由是"几何光学"在这



图 34A　在折射率不同的两种媒质的分界平面上，平面电磁波的全反射．虚线表示射线的反射．

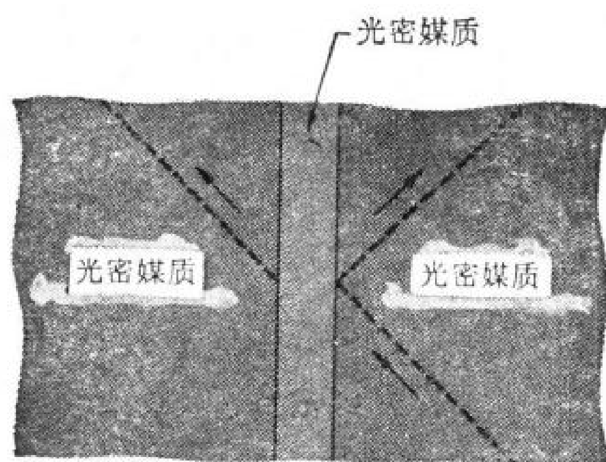


图 34B　受挫折的透射．经典电磁理论预言入射至薄片面上的波，当入射角大于全反射的临界角时，将部分地透射和部分地反射．这现象与量子力学隧道效应相类似．用虚线表示透射和反射的射线．

区域不适用：波矢量是一个复数矢量．

刚才所描述的现象完全能用经典电磁理论来说明．对于图 34B 所示的情形一旦当光疏媒质薄片的厚度比入射光的波长大时，透射系数就非常小．当厚度减少时，透射系数就增加，当厚度为零时，透射系数的值达到 1．

35　现在把量子力学隧道效应推广．代替图 31A 所示的矩形势垒，我们考虑图 35A 所示的任意形状的势垒．假定能量

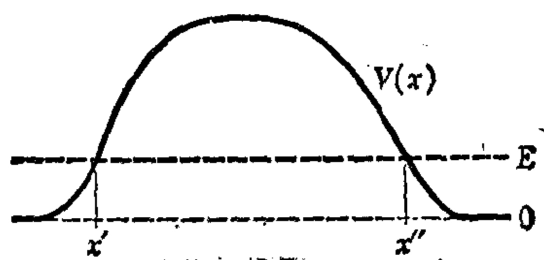


图 35A 实线代表势函数，粗虚线表示总能量 E. 我们如何导出这类势垒的透射系数的表示式呢?

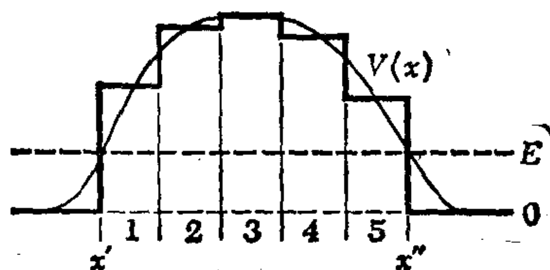


图 35B 为了推导如图 35A 所示势垒的透射系数的近似表示式，我们设想用一系列矩形势垒来近似连续变化的势。总透射系数是所有矩形势垒透射系数的乘积。注意这种方法只是近似地正确：没有计入多次反射。

为正的波从左面入射，这波将部分地被反射和部分地透射. 我们主要关心的是关于势垒的总透射系数 T. 为了精确地求出这个系数，我们必须求解对于势 $V(x)$的薛定谔方程. 然而根据第 32—33 节的讨论，我们能用另一种方法来得出关于 T 的近似表达式. 波长比势垒的宽度越小，这种近似就越好.

为了导出透射系数 T 的近似表示式，我们想象把势垒区域分成几个子区域，如图 35B 所示. 在每个子区域，用恒定的势来代替实际的势，如图所示，对于矩形势垒，我们已经求出了透射系数. 设关于图 35B 所示的 5 个矩形势垒的透射系数为 T_1, ……, T_5. 因此总透射系数 T 必然近似地等于这些子区域的透射系数的乘积，即

$$T \cong T_1 \cdot T_2 \cdot T_3 \cdot T_4 \cdot T_5 \tag{35a}$$

或

$$\ln T \cong \ln T_1 + \ln T_2 + \ln T_3 + \ln T_4 + \ln T_5 \tag{35b}$$

36 现在考虑方程(33b). 如果 dx_n 表示一个矩形势垒的厚度，并且倘若 $V(x_n)$ 是势垒的高度，那么这个势垒的透射系数 T_n 由下式给出

$$\ln T_n \cong -2\sqrt{\frac{2m[V(x_n)-E]}{\hbar^2}}\,dx_n \tag{36a}$$

根据(35b)对所有子区域求和就能得出总透射系数的对数，如果无限细分而取极限，则我们就能用积分来代替求和，最后得：

$$\ln T \cong -2\int_{x'}^{x''} dx \sqrt{\frac{2m[V(x)-E]}{\hbar^2}} \tag{36b}$$

我们提醒读者，这个公式是关于透射系数的近似表达式. 然而它是个十分有用的公式，因为它给出了势垒穿透现象的好的定性图象. 注意积分的上、下限就是两个经典转折点 x' 和 x''.

应当仔细注意透射系数与表示式(36b)中的参量的依赖关系. 当其他参量保持固定时，透射系数随粒子质量的增加而减小，同样，透射系数随总能量 E 增加而增大，其理由有二. 当转折点相互靠近时，这个永为正值的被积函数变小，而且积分区域也变小. 透射系数自然随着势垒宽度的减小而增加.

三、α 放射性的理论

37 现在把势垒穿透理论试用到实际的物理情形上去.

在第二章末尾的问题 3 中，大家已注意到必须将放射 α 粒子的镭核 $_{88}\mathrm{Ra}^{226}$ 的半衰期认为是“反常地长”，其半衰期为

1622 年．按照任何有意义的核的时间尺度，这个半衰期看来的确非常长．我们可以选取光通过核所需要的时间作为核过程的特征时间，这个时间为 10^{-23} 秒的数量级．然而镭的半衰期为 5×10^{10} 秒，或者约为 10^{33} 个"自然核时间单位"．这样，我们就面临说明这个巨大数值 10^{33} 的问题．虽然"自然核时间单位"是个不严格的概念，但是即使我们把核时间单位加大 1000 倍，问题并不会有丝毫简化．

我们必须注意到一个进一步的实验事实：某些 α 放射性的核具有比这更短得多的寿命．例如 α 放射性的钋同位素 $_{84}Po^{212}$ 的半衰期仅为 3×10^{-7} 秒．在另一极端我们注意到铀的同位素 $_{92}U^{238}$，它也是 α 放射体，而它的半衰期是 4.5×10^{9}

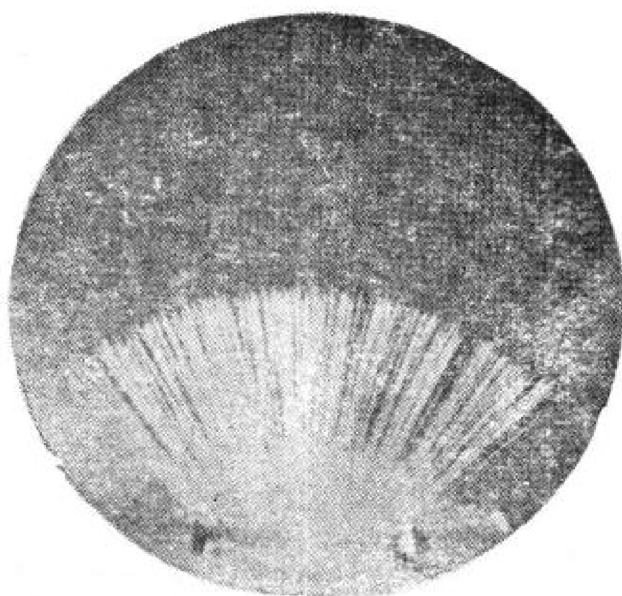


图 37*A*　放射性物质放射 α 粒子径迹的初期云室照片．

一定能量的 α 粒子在大块物质内具有非常确定的射程．α 粒子因使物质内的原子电离而失去能量．当 α 粒子失去了它的全部初始动能时，它的径迹就结束．在空气中，在标准的压力和温度下射程 R（以厘米为单位）大致为 $R=0.32\times E^{3/2}$，这里 E 是能量，以兆电子伏为单位．

位于照片底部的放射源放射两种不同能量的 α 粒子．我们可以清楚地看到能量较大的一群粒子的非常确定的射程．较慢的粒子可达到的距离仅为较快粒子的一半．

年．因此实质问题是在 α 放射体的寿命方面所遇到的巨大范围．

被放射出来的 α 粒子的能量典型地处于 4—10 兆电子伏的范围． 虽然在某些情况中，一个核能够放射几个不同分立能量的 α 粒子，但是每个 α 放射性的同位素一般都以所放射的 α 粒子的一定能量来表征．让我们忘记在第三章第 40 节中已简单讨论过的复杂情况． 经验查明，核的寿命与放射的 α 粒子能量之间存在着密切的关系：能量越大，寿命越短．

38 现在来看一看我们是否能说明观察到的事实[1]．只要 α 粒子在核的内部，它就受到强大核力作用．正如已说明的，这些力是短程的，可以想象它们在半径为 R 的核表面以外不起作用．在核表面以外起支配作用的力是带有电荷 $+2e$ 的 α 粒子与衰变后留下的子核之间的静电斥力．如果子核的原子序数为 Z'，子核带有电荷 $+Z'e$．原来的核，即母核，带有电荷 $+Ze$，这里 $Z=(Z'+2)$ 是其原子序数．图 38A 示意地表示这一情形．在图中离核中心的距离随着向右而增加．实线表示有子核存在时 α 粒子的势能．在核表面之外，即 $r>R$，这种势就是库仑势

$$V(r)=\frac{2e^2Z'}{r}\quad r>R \tag{38a}$$

一旦到达核的表面，强大的吸引核力起作用了，这意味着势能曲线必定急剧地下降．在图 38A 中我们作了实际存在一阶跃势的假定，从而把情形理想化了． 我们没有画出核内部的势能曲线，因为对它还不很清楚．事实上，它不是很确定的，因为当 α 粒子处于强大的核力场中时，它可能不再是一个

1) 根据薛定谔理论来试图作出解释之所以合理是由于在核表面外的 α 粒子的速度是"非相对论性"的，因为读者可以自己估计一下．记住 α 粒子的能量不超过 10 兆电子伏．

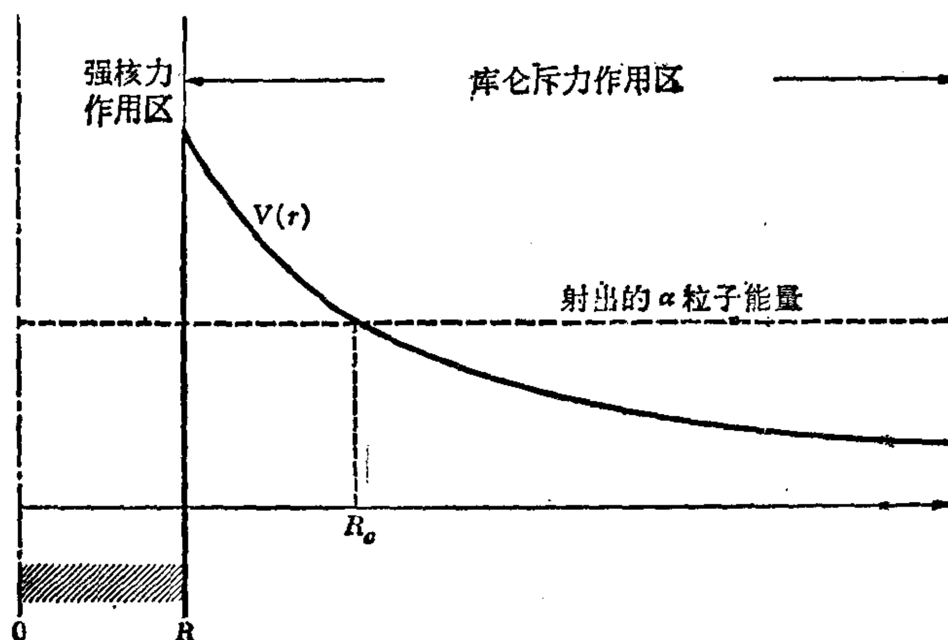


图 38A　在核附近 α 粒子所受到的势的示意表示(实线)．在核的外面，即距离 R 以外，势为库仑势．在核内部核力是强大的吸引力，势的精确形式还不知道，但是吸引力由势在 R 处的突然降落表示出来了．虚线表示 α 粒子的总能量．根据量子力学 α 粒子能够穿透势垒．这种事在重核的 α 衰变中发生着．

独立的粒子了．

虚线表示 α 粒子的总能量．这能量 E 也就是 α 粒子最后出现在离核较大距离处所具有的能量，在那里静电势能实际上为零．

39　我们绘制图 38A 的方式表明 α 粒子在射出之前，必须穿透从 R 到 R_0 这一区域内的势垒．让我们直接检查一下这是否是一个正确的图象．如果这图象是正确的，那么经典的转折点 R_0 由下式给出

$$R_0=\frac{2e^2Z'}{E} \tag{39a}$$

它必须满足 $R_0>R$ 的条件．

把关于镭 $_{88}Ra^{226}$ 的数值代入上式，$Z=88$，$Z'=86$（惰性气体氡的原子序数），$E=4.78$ 兆电子伏，于是得到

$R_c \cong 50 \times 10^{-13}$ 厘米$=50$ 费米(为简化数学运算，可以把 R_c 写成

$$
\begin{aligned}
R_c &= (e^2/m_e c^2) \times (2Z') \times (m_e c^2/E) \\
&\cong (2.8 \times 10^{-13}\ \text{厘米}) \times (172) \times (0.5/4.78) \\
&\cong 50\ \text{费米}.
\end{aligned}
$$

这里 m_e 是电子质量).

在第二章第36节我们说过质量数为 A 的原子核的半径 R 由下式给出

$$R \cong r_0 A^{1/3}, \quad r_0 = 1.2 \times 10^{-13}\ \text{厘米} \tag{39b}$$

对于镭 $_{88}R^{226}$ 来讲，$A=226$，于是我们得到 $R \cong 7.3$ 费米.

因此，上述图象是定性正确的：α 粒子的确需要穿透势垒．定量上这个图象是不对的：应将势垒画成厚得多．我们这样作图的动机是为了美观：但是这种情形的重要特点是定性地描绘出来了.

对于 α 放射性核不等式 $R_c > R$ 一般讲是对的．这些放射性元素都是些原子序数 Z 大的重元素．同位素 $_{88}Ra^{226}$ 可以认为是典型的 α 粒子放射体．因此 α 粒子必须穿透势垒是 α 衰变过程的根本特征，我们可以希望用隧道效应的简单理论来理解寿命作为能量函数的不寻常的变化.

40 因此让我们对图 38A 所示的势垒，计算透射系数 T．按照(36b)的结果 T 由下式给出

$$\ln T \cong -2 \int_R^{R_c} dr \sqrt{\frac{2m_\alpha(2e^2 Z'/r - E)}{\hbar^2}} \tag{40a}$$

这里要注意鉴于(39a)被积函数在上限 R_c 处为零．为了讨论这个积分，我们引进一个由 $x = r/R_c$ 定义的新积分变量．当 r 从 R 变到 R_c 时，新变量 x 从 $x_c = R/R_c$ 变到 $+1$．考虑到关系式(39a)于是我们可以把积分(40a)写成如下形式

$$\ln T \cong -\frac{4e^2Z'}{\hbar}\sqrt{\frac{2m_\alpha}{E}}\int_{x_0}^1 dx\sqrt{\frac{1}{x}-1} \tag{40b}$$

(40b)中的积分能够相当容易地求出闭合形式的值．然而由于 $x_0=R/R_0$ 通常是一个相当"小"的量，因此对我们的目的而言，进行近似求值，其中只保留 x_0 的展式中的前两项就已是够好的了．计算过程如下：

$$\begin{aligned}\int_{x_0}^1 dx\sqrt{\frac{1}{x}-1} &= \int_0^1 dx\sqrt{\frac{1}{x}-1} - \int_0^{x_0} dx\sqrt{\frac{1}{x}-1}\\ &\cong \int_0^1 dx\sqrt{\frac{1}{x}-1} - \int_0^{x_0} dx\sqrt{\frac{1}{x}}\\ &= \int_0^1 dx\sqrt{\frac{1}{x}-1} - 2\sqrt{x_0}\end{aligned} \tag{40c}$$

如果作一个代换 $x=\sin^2\theta$，我们就能轻易地计算出(40c)中最右边的第一项．我们得到：

$$\int_0^1 dx\sqrt{\frac{1}{x}-1} = 2\int_0^{\pi/2} d\theta\cos^2\theta = \frac{\pi}{2} \tag{40d}$$

因此(40b)中的积分近似地由下式给出

$$\int_{x_0}^1 dx\sqrt{\frac{1}{x}-1} \cong \frac{\pi}{2} - 2\sqrt{\frac{R}{R_0}} \tag{40e}$$

若把这表示式代入(40b)，同时计及(39a)，则得到：

$$\ln T \cong -\frac{2\pi e^2Z'}{\hbar}\sqrt{\frac{2m_\alpha}{E}} + \left(\frac{8}{\hbar}\right)\sqrt{e^2Z'Rm_\alpha} \tag{40f}$$

41 为了得出一个有用而明晰的公式，我们还要进一步作一些近似．我们令 $Z'=86$，$R=7.3$ 费米，它是以镭的同位素 $_{88}\mathrm{Ra}^{226}$ 为母核的情况下的参量值．于是我们认为 Z' 和 R 的这些值是所有 α 放射性核的典型值．α 粒子放射体都是重核，实际上所发现的这一类核的 Z' 的变化不是很大．在式(40f)中的重要参量是能量 E，正如前面所说的，它在 4—10 兆电子伏的范围内变化．因此上述近似相当有理由的，特别

是要考虑到我们已经作了一些其它近似.

现在把物理常数的适当数值代入式(40f)，同时令 $Z'=86$, $R=7.3$ 费米，最后得到，

$$\log T \cong -\frac{148}{\sqrt{E/\text{兆电子伏}}}+32.5 \tag{41a}$$

注意，(41a)式给出的是 T 的普通对数(即以10为底的对数). 为了从自然对数化到普通对数，应用了关系式

$$\log x=(\log e)(\ln x)\cong 0.434\ln x.$$

现在已导出了 α 粒子在放射过程中所必须穿透的势垒的透射系数 T 作为能量 E 的函数的一般表达式. 让我们看一看如何才能用这个结果来找到 α 粒子放射体的寿命.

42 为此目的考虑这过程的一个朴素的模型. 假定在放射之前，α 粒子在核内沿着一条直径来回跳动. 设 α 粒子相继两次同“壁”碰撞之间的时间为 τ_0，在每一次碰撞中都存在着 α 粒子将漏出势垒的一定机会，事实上在任何单次碰撞中的放射几率就等于透射系数 T. 所以 α 粒子在它放射出来之前，必须作的碰撞次数为 $1/T$ 的数量级，因此可以把寿命 τ 写成

$$\tau=\frac{\tau_0}{T} \tag{42a}$$

或

$$\log\tau=\log\tau_0+\frac{148}{\sqrt{E/\text{兆电子伏}}}-32.5 \tag{42b}$$

为了估计 τ_0，根据上面的朴素模型可以假定 α 粒子在核内运动的速度与其放射后的速度相同. 因此

$$\tau_0=\frac{2R}{v},\quad v=\sqrt{\frac{2E}{m_\alpha}} \tag{42c}$$

若把这个估计应用于作为“标准的” α 放射体的镭同位素 ${}_{88}Ra^{226}$，得到 $\tau_0\cong 10^{-21}$ 秒.

从(42c)看到时间 τ_0 的确依赖于能量 E，而且也依赖于

核的半径 R. 然而，量 τ_0 在(42b)中是作为对数的宗量，在(42b)中第一项随 E 的变化与第二项随 E 的变化相比是完全微不足道的. 为了清楚地看出这点，考虑一下 E 从9兆电子伏变到4兆电子伏时情形. 这时(42b)中的第一项的增加量等于 $\log(3/2)\cong 0.18$, (42b)的第二项的增加量要大得多，即 $148\times\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)\cong 25$, 因此，正如我们将要做的那样，可以很好地假定 $\tau_0=10^{-21}$ 秒. 这个值对所有 α 粒子放射体都近似适用. 我们可以把这一点说明如下：在 α 粒子放射中占支配地位的因素是势垒穿透现象. 发射前在核内发生些什么我们不大清楚，但是可以说这些内部过程确定了时间 τ_0, 它可以解释为 α 粒子相继两次企图穿透势垒之间的时间. 该时间肯定依赖于所讨论的母核，但是可以合理地假定对所有的 α 粒子放射体该时间大致具有相同的数量级. 无论如何，对任何合理的模型可以预期(42b)中的第一项的变化要比第二项的变化小. 根据这个理由，上面的朴素模型至少应该给出关于 τ_0 的正确的数量级，这模型并不象起初所认为的那样坏，或者更正确地说，它或许是坏的，但是即使它是坏的，那也没有多大关系.

这样达到了我们的最后目的，即得到了寿命 τ 和 α 粒子放射体的能量 E 之间的一般关系式

$$\log(\tau/\text{秒})\cong\frac{148}{\sqrt{E/\text{兆电子伏}}}-53.5 \qquad (42d)$$

43 图 43A 画出了 α 粒子放射体的半衰期与能量 E 的函数关系：虚线表示等式(42d). 在这图纵坐标是 $\log(\tau/\text{秒})$，横坐标是 $-1/\sqrt{E/\text{兆电子伏}}$，因此关系式(42d)由直线表示. 为了把理论与观察结果作比较，在同一图中画出了大量已知的 α 粒子放射体. 要注意不是所有的实验点子都落在理论曲线

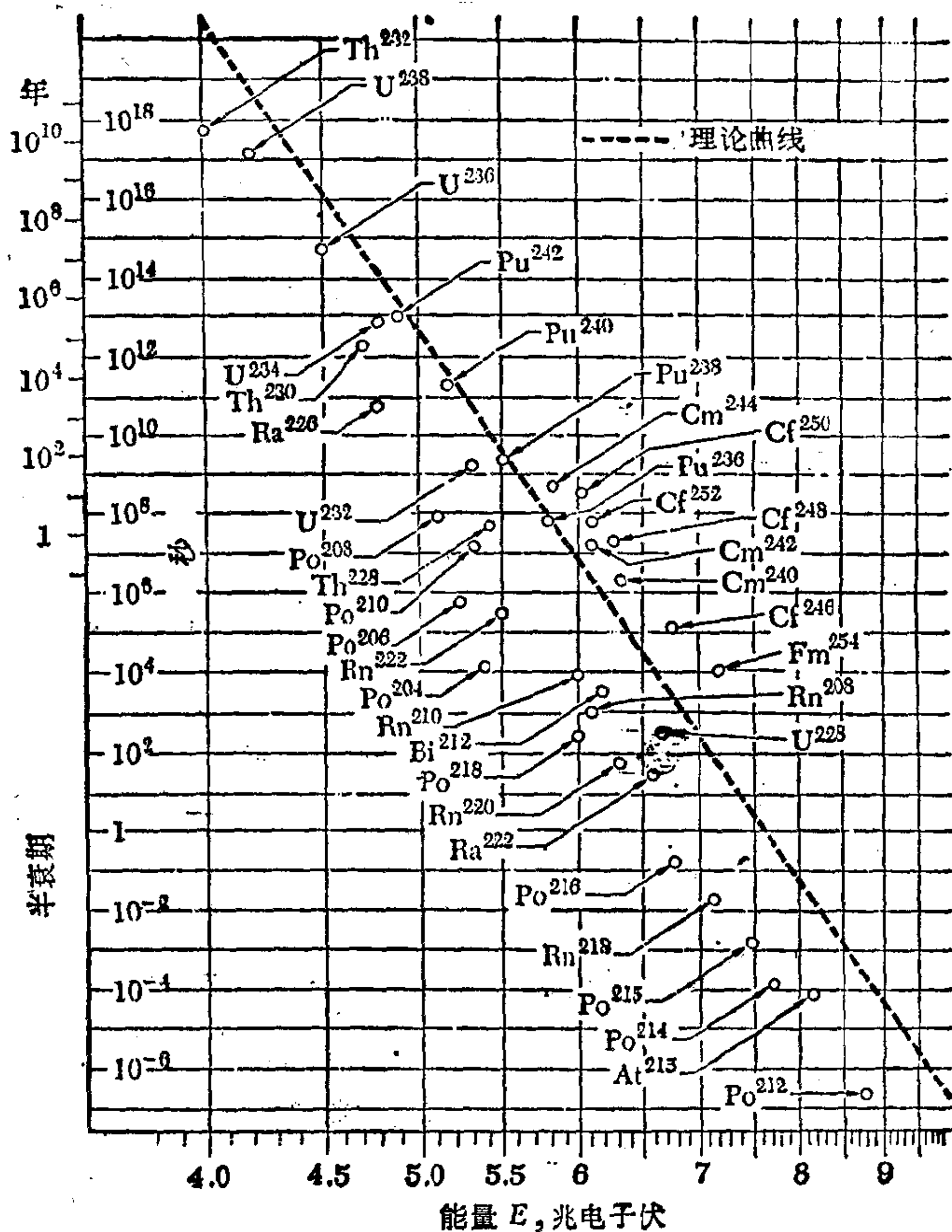


图 43.4　α 粒子放射体的半衰期与能量的函数关系. 图中小圆点表示所选出的 α 放射性核. 纵坐标是半衰期的对数，横坐标为 $-1/\sqrt{E}$，这里 E 是放射出的 α 粒子的动能. 我们的简单理论预测点子应位于图中用虚线表示的直线上. 正如所看到，在细节上这种一致是远非完美的，但是半衰期决定于能量的总趋势是正确地体现出来了，从整体来考虑这张图是量子力学概念给人印象最深刻的证明.

上，然它也清楚地表明图中曲线正确地再现了观察数据的总趋向．这简单而朴素的理论使我们在对于起初似乎是如此复杂得令人绝望的 α 放射性现象的理解方面达到了这种水平，这可以认为是量子力学的一个惊人成就．

量子力学的势垒穿透理论首先是1928年由Gamow提出，并由Condon和 Gurney[1]独立地提出的．从此以后，对于 α 蜕变理论当然已经添加了许多改进，用这些理论已能更详细地说明观察到的一些结果．

44 在图43A中给出的寿命就是放射性核的*半衰期*．正如读者无疑知道的，放射性衰变是遵从指数规律的．如果开始，在 $t=0$ 时刻存在 N_0 个某种核，那末，过了一段时间 t，核的平均数由下式给出

$$N(t)=N_0\exp(-\lambda t) \tag{44a}$$

常数 λ 称为*衰变常数*或*衰变率*，它的倒数 $1/\lambda$ 称为核的*平均寿命*．半衰期定义为 $N(t)=N_0/2$ 的时间 t：在这时刻平均地讲原有核的一半已经衰变了．如用 τ_m 表示平均寿命，用 $\tau_{1/2}$ 表示半衰期时，则有

$$\tau_{1/2}=\frac{1}{\lambda}\ln 2=\tau_m\ln 2 \tag{44b}$$

我们可能想知道公式(42d)给出的究竟是平均寿命，还是半衰期，还是某种别的"寿命"．实际上我们的推理给出的是平均寿命，但是在讨论的精确度范围内，不论是讲平均寿命还是半衰期，都毫无差别，正如在图43A看到的，上述结果的精确程度可以相差100或1000倍．

45 再考虑图38A．这图也是与一个能量 E 低于势垒高度

---

1) G. Gamow, "Zur Quantentheorie des Atomkernes," *Zeitschrift für Physik* **51**, 204 (1928). 也可参看 G. Gamow, "Quantum theory of nuclear disintegration," *Nature* **122**, 805 (1928); R. W. Gurney and E. U. Condon "Wave mechanics and radioactive disintegration," *Nature* **122**, 439 (1928).

的带电粒子与原子核碰撞的“反”过程有关的。这里所指的粒子可以是 α 粒子或质子，也可以是氘核．如果粒子能到达势垒内部，即进入强大的核力起作用的区域，那末在一般情形下将发生核反应．按照经典力学，粒子不可能穿透势垒，但是现在知道在量子力学里情况就不同．如果能量 E 很小，透射系数 T 也小，很少可能在任何特定碰撞中会发生核反应．随着粒子能量的增加，势垒的透明度就增加，核反应的机会也就增加．而且这种增加也大致由能量的指数函数表示．因此势垒穿透现象是许多涉及能量不太高的带电入射粒子的核反应的重要特征．当入射粒子是中子时，情况就完全不同．这时不存在库仑势垒，不管中子的能量是如何小，它可以自由地进入核内．实际上许多核反应对热中子具有大的产额，所谓热中子，我们理解为能量与室温相当、也就是约为 1/40 电子伏的中子．

46 重的放射性核可以分成四个群，相当于四个不同的放射性系列，或叫衰变链．在 α 放射中，核的质量数 A 变化 4 单位，核电荷数 Z 变化 2 单位．在 β 衰变中，放射出来的是电子(或正电子)和反中微子(或中微子)，这时质量数不变，但是电荷数改变 $+1$ (或 -1)．某些重核是通过放射 α 粒子而衰变的，有些是通过放射 β 粒子而衰变．还有一种可能性是：一个核可以从围绕它的电子云中俘获一个电子，而同时发射出一个中微子，这过程称为 K 俘获过程，这与 β 衰变有密切关系．造成 K 俘获和 β 衰变的基本相互作用是普适的*弱相互作用*．这在前面已提过．电子、正电子和中微子并不参与例如象“核力”那样的强相互作用，而 α 粒子是参与的，关于在 β 衰变或 K 俘获中所遇到的长寿命原因并不在于势垒穿透效应，而仅仅是由于弱相互作用的*本征微弱性*．

在 α 衰变、β 衰变或 K 俘获中，质量数 A 或是变化 4 单

位，或是一点也不变．因此放射性核可以组成四个系列．在每一系列内质量数为 $A=(4n+r)$ 的形式，这里 n 是可变的，但 r 是固定的．这四个系列对应于 $r=0$, 1, 2 或 3 四个不同的值．对于 $r=2$ 这样一个放射性衰变系列，如图 46A—B 所示．

天然存在的放射性元素，或者是具有很长的寿命，或是起源于长寿命元素的衰变链中的一个．在长寿命的重核中，注意

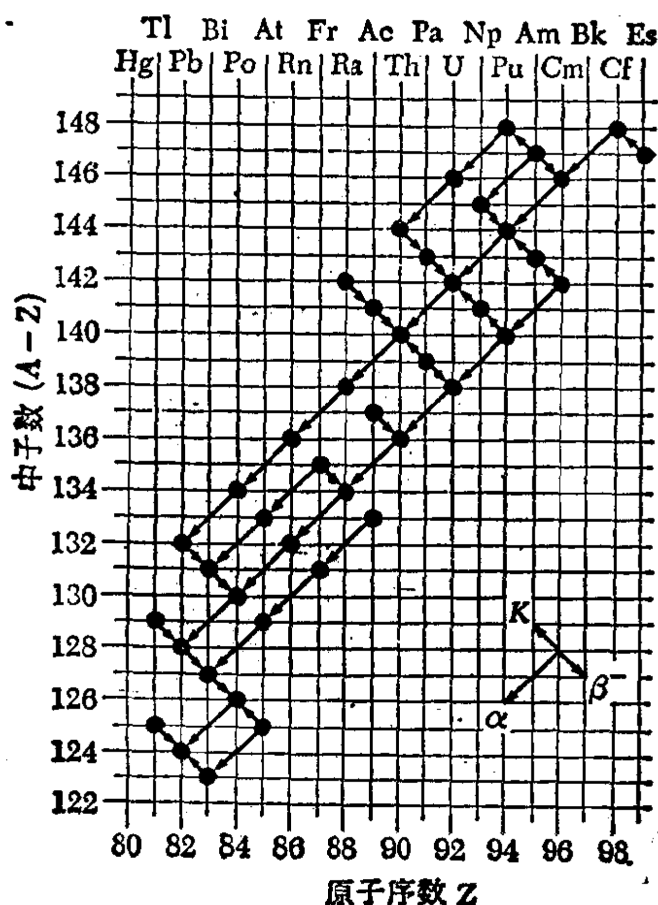


图 46A　质量数为 $A=4n+2$ 的形式的重放射性核．箭头表示放射性衰变，衰变的类型由箭头的方向表示．如图右下方的小插图所示．符号 α 表示 α 衰变，符号 β^- 表示 β 衰变（通过发射出电子和反中微子），而符号 K 表示 K 俘获．

注意某些核以两种不同的方法衰变．也要注意所有上面的衰变链的最终产物是稳定的铅同位素 Pb^{206}．

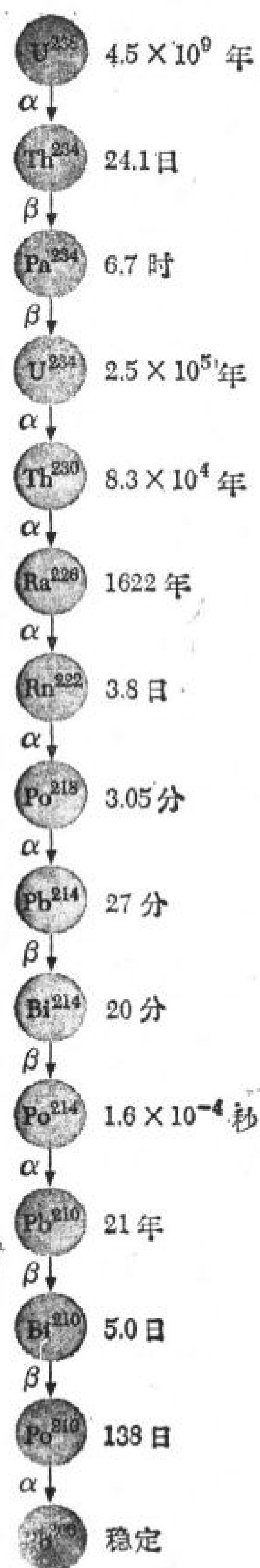


图 46*B* 铀-镭-铅放射性链. 半衰期表示在右边，衰变模式表示在左边. 这些同位素（在铀矿物）天然存在着，因为它们起源于长寿命的铀同位素 238. 属于这个系列（质量数的形式是 $4n+2$）的超铀元素的半衰期按地质时间的尺度来看都是非常短的.

U^{238} 的半衰期为 4.5×10^9 年，Th^{232} 的半衰期为 7.13×10^8 年. 在 $(4n+1)$ 族中寿命最长的成员是镎的同位素 Np^{237}，半衰期为 2.2×10^6 年. 按地质学的时间尺度，这是一个短的时间. 因此不存在天然的 $(4n+1)$ 族放射性元素.

少数天然存在的轻核也是放射性的. 例如半衰期为 1.3×10^9 年的 β 放射性核 K^{40} 以及半衰期为 4.7×10^{10} 年的 Rb^{87}.

47 天然放射性现象使我们能够决定岩石的年龄. 即从最后通过化学变化形成岩石以来所经历的时间. 原理是简单的，就是测定样品中存在的长寿命的放射性同位素与该衰变链中最终稳定产物的相对含量. 例如，考虑铀-镭衰变链，它起始于 U^{238}，终止于稳定的铅同位素 Pb^{206} 假定在给定的样品中发现 Pb^{206} 的量相当于 N_{Pb} 个原子，U^{238} 的数量相当于 N_U 个原子. 如果假定所有的 Pb^{206} 原子都是从铀衰变而成的，则可以写出

$$N_U=N_0e^{-\lambda T},\quad N_{Pb}=N_0(1-e^{-\lambda T}) \tag{47a}$$

这里 N_0 是最初存在的 U^{238} 的原子数目，λ 是铀的衰变率，T 是样品的年龄. 因为 $N_0=N_U+N_{Pb}$，所以有

$$e^{\lambda T}=\frac{(N_{Pb}+N_U)}{N_U} \tag{47b}$$

由于 λ 已知，所以我们能求出 T. 实际上这种计算方法只是给出了 T 的上限，因为今天存在的某些 Pb^{206} 原子，可能在矿物形成时就已经存在了. 因此，需要更精致的处理方法，我们必须把不含铀的矿物中铅的同位素成分与其在含铀矿物中的成分进行比较. 因此我们的例子是过于简单了，但它的确说明了所涉及的原理.

另一种方法取决于把岩石中氦的含量和其中的铀的含量进行比较. 在衰变链的每个 α 蜕变中都产生一个氦原子核，

如果我们能肯定氦不从岩石内部逃走，那么我们就能找出自岩石形成以来多少镭原子已经蜕变[1].

按照诸如这类的一些方法已发现地壳中最古老的岩石年龄约为 3×10^9 年. 这肯定是地球年龄的下限，因为地壳在过去经历了许多化学变化. 对陨石也曾经作过研究，已发现它们的年龄约为 4.6×10^9 年. 陨石是如何形成的还一点也不知道，但是有很好的证据表明它们是和太阳系中其他固体差不多同时形成(结晶)的. 因此地球作为一个物体其年龄约为 4.6×10^9 年. 利用放射性"钟"还可以进一步估计陨石里最初形成化学元素到它结晶之间所经过的时间. 根据这样的一个估计[2]，这个时间似乎约为 0.35×10^9 年. 这意味着约在50亿年前最终形成星和陨石里的化学元素. 因而这是我们的太阳系年龄的估计.

48 自然，人们要作进一步的推测，宇宙有多大年龄？化学元素是如何形成的？这里我们不讨论导致估计宇宙年龄的思想. 一般相信宇宙年龄也许为百亿年上下，大致与太阳系的年龄同数量级.

一般相信化学元素是从星体里进行核反应的氢形成的. 图 48*A* 表示太阳系中化学元素的估计丰度. 如果认为完全由单一的"标准实验"推导出的才算是实验点，那么，在此意义上，图中代表单个化学元素的那些点就不是实验点. 这些点

---

1) 第一次根据放射性来估计地球的年龄是由卢瑟福完成的. 参看 E. Rutherford, "The Mass and Velocity of the α particles expelled from Radium and Actininum," *Philosophical Magazine* **12**, 348 (1906), 参看 pp.368－369. 在这里卢瑟福得出他所研究的矿物年龄为4亿年的估计.

2) J. H. Reynolds, "Determination of the age of the elements", *Physical Review Letters* **4**, 8 (1960). 也可参看 C. M. Hohenberg, F. A. Podesek, and J. H. Reynolds. "Xenon-Iodine Dating: Sharp Isochronism in Chondrites" 中有些结果指出这个时间可能更要短很多.

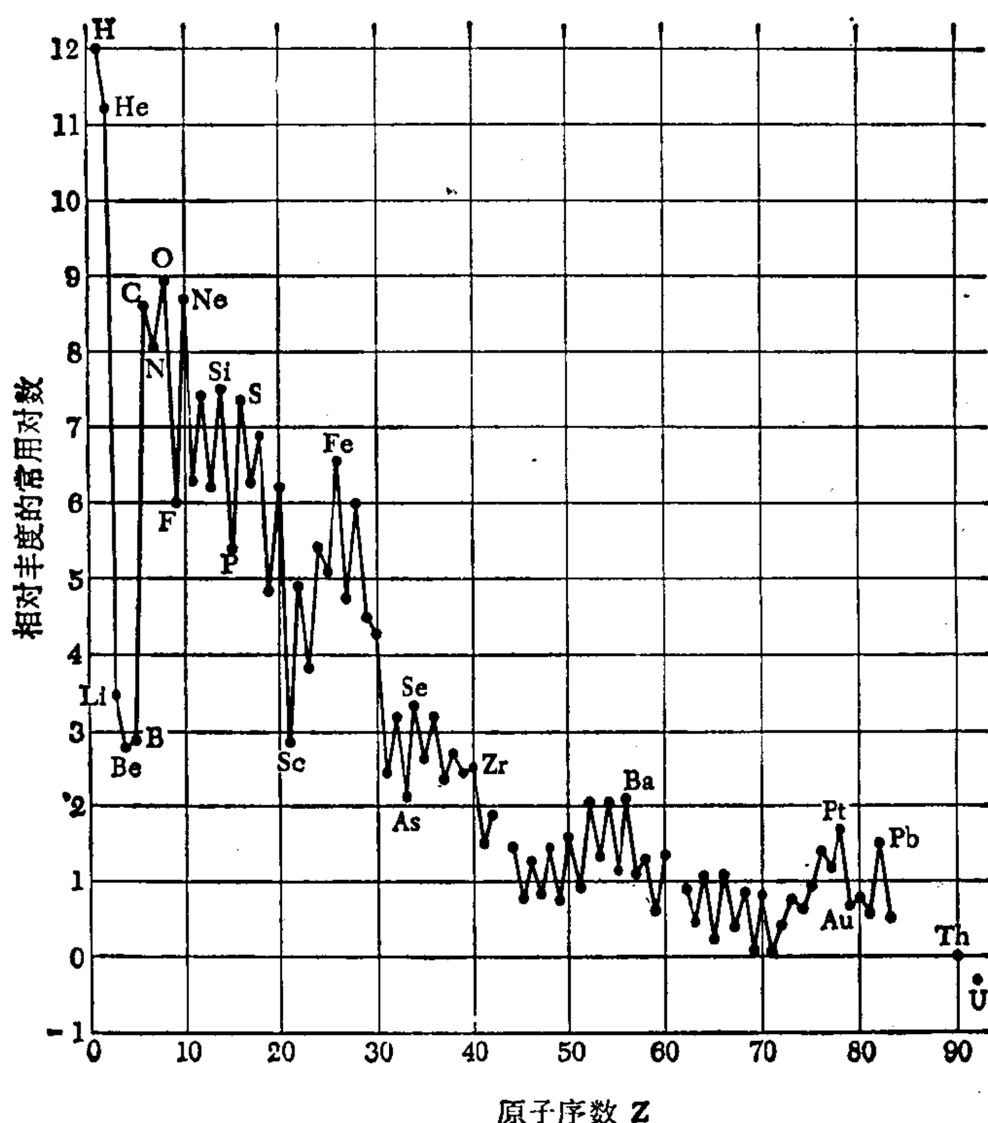


图 48A 太阳系元素相对丰度估计的表示图. 数据取自 L. H. Aller: The Abundance of the Elements (*Interscience Publishers, Inc, New York* 1961) 一书中 (p. 192—193) 的表, 此图是与同书 191 页的类似图有关的.

纵坐标取相对丰度(即相对原子数)以 10 为底的对数. 为了容易看, 已把代表邻近元素的点连接起来了. 这类图是根据各式各样不同类型的测量、同样也是根据特定的理论思想得到的. 关于较轻元素的数据主要是从对太阳光谱的研究得到的, 而对于较重元素的估计则考虑到陨石成分的研究. 图是现有知识的合理概括, 但必须认识到某些数据是很不肯定的和暂时性的.

可以相信在整个(可见的)宇宙内元素的丰度和太阳系内元素的丰度是大致相同的. 但在我们最接近的外界所发现的元素丰度与“宇宙”丰度显著不同(参看表 48B).

表 48B 在地球外壳内8种最普通的元素

元素	原子数百分比
氧	62.6
硅	21.2
铝	6.5
钠	2.64
钙	1.94
铁	1.92
镁	1.84
钾	1.42

本表表示包括海洋和大气在内的地球外壳最外面十英里内元素的估计成分．这八种元素构成了这个范围内近99%的质量．地球的弱引力场不能保留轻的元素氢和氦，这说明了与“宇宙”数据相比，它们的丰度低．关于地球内重元素的丰度可以预期与宇宙丰度相似，但是地球上的地质过程已导致元素的化学分凝，而地壳内的数据并不代表地球整体的情况．

表示的是根据大量不同类型测量而作出的估计，例如，太阳大气层的相对丰度的光谱测定，陨石的相对丰度测定以及地球壳层的化学成分估计．注意氢是远超过其余的最丰富的元素，还要注意丰度曲线的峰相当于特别稳定的元素．有一个可以清楚看出的系统性倾向：原子序数为偶数的元素比邻近的原子序数为奇数的元素要丰富．这反映了这样的事实：具有偶质子数和偶中子数的核倾向于比其他的核更稳定．

详细地说明这条曲线从而追溯出太阳系的早期历史是一个令人神往的问题．目前认为对丰度曲线的主要特点已经了解得相当清楚了．

至于氢最初来自哪里，对这种问题，作者完全无可奉告．

四、提高课题：波函数的归一化[1)]

49 我们来讨论薛定谔波函数，并且为简单起见，只考虑一维情况，这时波函数 $\psi(x, t)$ 是 x 和 t 的函数. 我们说过波函数绝对值的平方正比于几率密度. 其意义是：在时刻 t，在间隔 $x_2>x>x_1$ 内，找到粒子的几率是：

$$P(x_1, x_2)=N\int_{x_1}^{x_2}dx|\psi(x, t)|^2 \tag{49a}$$

这里 N 是某个与 x 无关的常数. 如何确定 N 呢？粒子出现的几率必然是1，无论出现在哪个地方，也就是：

$$1=N\int_{-\infty}^{+\infty}dx|\psi(x, t)|^2 \tag{49b}$$

按照这一简单要求，我们就可决定 N.

可以设想(49b)中的积分不收敛的情况. 如果这样，则常数 N 必须为零，并且由方程(49a)可知，在任何有限间隔内找到粒子的几率也必须为零. 这不可能与任何有物理意义的事件相对应，我们得出重要结论：*对于所有的 t 值，薛定谔波函数 $\psi(x, t)$ 必然是 x 的平方可积函数*，我们把"平方可积"这个词理解为(49b)中的积分收敛.

因此假定波函数 $\psi(x, t)$ 确是平方可积的，那么我们可定义一个新的波函数 $\psi_n(x, t)$

$$\psi_n(x, t)=\sqrt{N}\psi(x, t) \tag{49c}$$

这里 N 由方程(49b)给出. 这个波函数具有下列美妙的性质：

$$\int_{-\infty}^{\infty}dx|\psi_n(x, t)|^2=1 \quad P(x_1, x_2)=\int_{x_1}^{x_2}dx|\psi_n(x, t)|^2 \tag{49d}$$

这样几率密度就等于波函数绝对值的平方.

1) 初读时可略去.

满足(49d)中第一个条件的波函数称为归一化的波函数，或者说被归一化了. 很清楚使用这样的波函数是方便的，因为它的绝对值平方等于几率密度.

50 现在必须解决一个重要问题: 由(49b)定义的常数 N 是否依赖于时间 t? 我们已假定 $\psi(x, t)$ 是薛定谔方程的真实解，即

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x, t)+V(x)\psi(x, t)=i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x, t) \tag{50a}$$

倘若常数 N 与时间无关，则新的波函数 $\psi_n(x, t)$ 也是这个方程的解.

我们将证明下述定理: 如果 $\psi(x, t)$ 满足方程(50a)并且如果当 x 趋向于 $+\infty$ 或 $-\infty$ 时 $\psi(x, t)$"足够快"地趋向零，则

$$\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty}dx|\psi(x, t)|^2=0 \tag{50b}$$

在这里,"足够快"的意义之一就是 $\psi(x, t)$ 是平方可积的.

为了证明这个定理，我们把这个积分号内的部分进行微分，即:

$$\frac{\partial}{\partial t}|\psi(x, t)|^2=\frac{\partial}{\partial t}\psi^*(x, t)\psi(x, t)$$
$$=\psi^*(x, t)\frac{\partial}{\partial t}\psi(x, t)+\frac{\partial\psi^*(x, t)}{\partial t}\cdot\psi(x, t) \tag{50c}$$

方程(50a)给出了 $\psi(x, t)$ 对时间微商的表达式，为了得到这个波函数的共轭复数 $\psi^*(x, t)$ 的类似表式，只要作出(50a)的复数共轭，得到方程:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi^*(x, t)=\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi^*(x, t)-V(x)\psi^*(x, t) \tag{50d}$$

这里我们曾假定$V(x)$是实函数，这在薛定谔理论中是合理的，因为这个势是要与“相应的”经典问题中的势一致的．势是实数这一点对于我们的论证是不可少的，并且在薛定谔理论中总是要作这样的假定的．

用(50a)和(50d)，消去(50c)中的时间微商，我们得到

$$\frac{\partial}{\partial t}|\psi(x,t)|^2=\frac{i\hbar}{2m}\left(\psi^*\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}-\psi\frac{\partial^2\psi^*}{\partial x^2}\right)$$
$$=\frac{i\hbar}{2m}\frac{\partial}{\partial x}\left(\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial x}-\psi\frac{\partial\psi^*}{\partial x}\right)\qquad(50e)$$

因而得到

$$\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty}dx|\psi(x,t)|^2=\int_{-\infty}^{\infty}dx\frac{\partial}{\partial t}|\psi(x,t)|^2$$
$$=\frac{i\hbar}{2m}\left[\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial x}-\psi\frac{\partial\psi^*}{\partial x}\right]_{-\infty}^{+\infty}\qquad(50f)$$

然而，如果波函数对x的微商是有界的，那么(50f)右面的表达式将为零，因为我们假定波函数在无穷远处将为零．因此，关系式(50b)成立，同时从(49b)直接得到如下结论．N的确是一个与时间t无关的常数．因而波函数$\psi_n(x,t)$也是一个真实的波函数，即也是薛定谔方程(50a)的解．由给定的物理波函数，我们总可以作出归一化的波函数，如果愿意的话，我们可以完全使用归一化的波函数．

对于三维情况，这些重要的结论也成立．我们在这里仅指出其证明和一维情况很类似，而不去证明了．

51 讲到这里，读者可能颇为惊异，每个物理上有意义的波函数必定是平方可积的．这样坚定的结论看来要引起对本章前面关于平面单色波的讨论的怀疑．很清楚，形式为$\exp(ixp/\hbar-itp^2/2m\hbar)$的波函数不是平方可积的，因而也不能被归一化．我们不得不作出结论：具有十分确定的动量p，对坐标x的关系仅取决于因子$\exp(ixp/\hbar)$的波并不对应于

物理上可实现的粒子的运动状态．另一方面我们并没有被禁止去考虑在x轴的很大区间波对x的关系取决于因子$\exp(ixp/\hbar)$，只要当x趋于$+\infty$或$-\infty$时，这个波函数也趋于零．因此，我们可以解决我们的困难，只要我们同意当讨论“具有确定动量的波”时，我们的真正意思并不是说这个波在各处都具有$\exp(ixp/\hbar)$这种形式．我们认识到在无穷远处波函数必须趋于零．然而我们假定在x轴上包含主要与我们有关的区域的很大间隔内，波函数是这种形式．这样所谓“单色波”应被理解为“几乎是单色的波”．根据这种理解，几乎和所有量子力学教科书中所做的那样，我们就可以有把握地继续谈论对坐标的关系取决于因子$\exp(ixp/\hbar)$或$\exp(i\mathbf{x}\cdot\mathbf{p}/\hbar)$的波．我们能够把不可归一化的波当作是可归一化的波的极限情况．要是愿意，我们可以称不可归一化的波函数为非正规的波函数．这个用语也会使数学家谅解，物理学家常常轻率地谈论平面波，好象这种波就是真实的薛定谔波函数，而这种方式的确曾使数学家不愉快．

问　　题

1．考虑图 28A 所示势垒中$E>V_0$的情况．

(a) 先考虑粒子从左面入射的情况．这个粒子（波包）将部分被阶跃势反射，部分透射．为了讨论这种情况，我们需要的解在右面区域描述向右传播的波．试对各处找出此解，并导出反射系数R，即粒子被反射的几率的表示式．那末透射系数T，即粒子的透射几率等于$(1-R)$．

(b) 其次考虑粒子从右面入射的情况．在这种情况下，我们需要的薛定谔方程的解，在左面区域表示向左面传播的波．试对各处求出此解，并推导反射系数R'及透射系数$T'=(1-R')$的表示式．注意经典粒子完全不会被此阶跃势所反射．

2．推导图 31A 所示势垒的透射系数的精确表示式，并且把你所得的精确结果同本书中的近似公式(33b)相比较．这种比较最好是通过

把这两个关于 T 的表示式取对数进行．我们的近似结果是在高而厚的势垒的极限情况下得出的．

3．考虑图 34B 所说的光学势垒穿透效应的特殊例子是有趣的．火石玻璃在波长 6000 埃处(在空气里)的折射率是 1.75．假定图 34B 里的光密媒质是火石玻璃，同时假定光疏媒质是空气．设入射角是 45°，两平面的间隔是 0.01 毫米．估计可能穿过势垒的光所占的比例．(不必进行严格的计算：根据我们讨论势垒穿透的精神，估计一下就足够了．)

注意透射光的强度随两个玻璃棱镜之间空气的厚度而指数地减少．重要的量是厚度与波长之比．注意在空气和玻璃中波矢平行于分界面的分量是相同的．(为什么？)

4．让我们对一个细节问题讲一下：图 34B 是否画得适当？考虑透射光线与入射光线之间的关系．透射光线或许应画成入射光线的继续，而不是象图中所画的那样吧？为了想出这个图象究竟应该怎样画，我们或许可以做些实验．假定光疏媒质的厚度是所用光的波长的数量级．利用设置的狭缝，我们选择一束极其狭窄的光作为入射光束，这束光用图中右下部的虚线表示．这样我们就能够研究透射光束并找出它实际上是否沿着图中左上部的虚线．其实不必在实验室里做这个实验：可以用一个假想实验来代替，因为在这个实验里没有什么事情是电磁理论不能精确预言的．考虑了这个实验后，谈谈你对图 34B 是否画得正确的意见．

5．考虑粒子在下图所示的任意势垒里的运动．当 x 趋于 $+\infty$ 或 $-\infty$ 时，函数 $V(x)$ 趋于零．

假定能量为 E 的粒子从左面射入，那么波函数 $\varphi(x)$ 必定是这种形式：对于很大的负 x，$\varphi(x)=[e^{ixk}+Ae^{-ixk}]$；对于很大的正 x，$\varphi(x)=Be^{ixk}$．实际上为了求出两个常数 A 和 B，我们应该求解势为 $V(x)$ 的薛定谔方程．

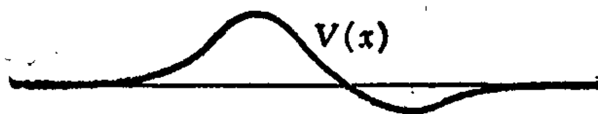


图 52A　问题 5 图．对于这种类型的任意势垒，由传播到右面和左面的波的振幅所确定的反射系数和透射系数实际上加起来为 1．你能够证明吗？

我们必须把$|A|^2$解释为势垒的反射系数，把$|B|^2$解释为透射系数。如果这个解释是有意义的，那么很清楚必然有：

$$|A|^2+|B|^2=1 \tag{a}$$

这就引起一个有趣的原则性问题．上述关系是否对所有的势函数$V(x)$都成立？

请普遍地证明这个关系．提示：考虑函数

$$F(x)=\varphi^*(x)\frac{d\varphi(x)}{dx}-\varphi(x)\frac{d\varphi^*(x)}{dx}$$

并证明若$\varphi(x)$满足薛定谔方程，则$dF(x)/dx=0$。

这个问题说明了一个事实，就是有时可以证明关于解的性质的一般表述，而实际上用不着明显地求出解．在这种特殊情况下，我们已发现了薛定谔方程及其解的一个重要的普遍性质．如果要这个理论有意义，那么方程(a)必需成立，而我们能证明它，值得高兴．

6．关于上题图中所表明的情况，我们可提出进一步的有意义的问题．例如：势垒的透明度在两个方向上是否相同？

定理：当粒子从左面入射时，其透射系数与从右面入射时相同，只要在这两种情形下粒子的能量相同．

请证明这个定理．提示：注意，正如上一题中所讨论的，若$\varphi(x)$是薛定谔方程的解，则$\varphi^*(x)$也是方程的解，并且$\varphi(x)$和$\varphi^*(x)$的每个线性组合也是方程的解．考虑一个$\varphi(x)$和$\varphi^*(x)$适当的线性组合．

7．许多不稳定的核通过放射一个正电子和中微子而衰变，正电子以10千电子伏到几个兆电子伏范围的能量射出．正如以前所述，这种衰变是弱相互作用的结果．我们还讲过，β放射性核有一些是长寿命的，其原因是这种相互作用本来就很微弱．这并不排除势垒穿透效应也可能起重要作用．用一些明确的数值例题来研究这个问题，也就是估计正电子所必须穿透的“典型”势垒的透射系数，就能证明，势垒穿透现象在这里并不是决定寿命的主要因素．

8．有一次L. Meitner和W. Orthmann [*Zeitchrift für Physik* **60**, 143(1930)]对于RaE(这是核Bi^{210}的旧名)β衰变所释放出来的能量进行了量热测量．在这个实验中，他们用放在一个合适的量热器中的一个RaE样品，他们测量了在量热器中热的释放率．从已知的RaE半衰期

(5.0天)及样品的尺寸，能够求出 RaE 每秒钟蜕变的数目，因此也就能算出每次蜕变放出的热能．结果这个热能的数值是：(0.337 ± 0.020) 兆电子伏/1次蜕变．

另一方面已经知道，能够被放射出来的电子的最大动能是 1.170 兆电子伏．这样，在已知的最大能量和用量热器测得的能量之间似乎存在一个偏差，当时它使物理学家们很伤脑筋，这是不足为奇的．因为我们深信衰变发生在两个确定的能级之间，因此必须假定能量 1.17 兆电子伏是每次衰变所释放的动能，那么问题来了，为什么在量热器中这个能量的一部分"消失了"．事实上当时的物理学家，其中包括玻尔，感到很不安，以致他们仔细考虑到能量守恒原理在微观物理领域可能不成立．

根据你对 β 衰变的知识，详细解释上面叙述的情况(包括当时物理学家感到烦恼的看法)．

9．在自然界存在的铀里面，同位素 235 的丰度是 0.71%，同位素 238 的丰度是 99.28%，U^{235} 的半衰期是 7.1×10^{8} 年，U^{238} 的半衰期是 4.50×10^{9} 年．

(a) 上面所列举的丰度对所有地球上的样品，并且对所有含铀陨石都是适用的．由此情况能得出什么结论？

(b) 如果简单地假定：在太阳系里铀的两种同位素原来的量是相等的，则对太阳系的年龄能作出怎样的估计？

10．(a) 请计算在含有一吨铀的铀矿物中能找到的镭的数量．如果矿物的年龄是 100 万年或 5 亿年，这在计算上是否引起任何差别？

(b) 如果矿物年龄是 5 亿年，你能找到多少数量的铅？

第八章 定态理论

一、量子化，即本征值问题

1 上面的小标题是薛定谔论述波动力学的四篇著名论文[1]的总题目，在这些文章中他指出了可以如何用波动的图象特别是用薛定谔方程来理解原子中分立能级的存在.

玻尔在薛定谔理论之前于1913年已系统地阐述了原子的半经典理论.我们说它是半经典的,是因为他假定了一个用经典力学的规律描述的行星模型，但同时却附加了一个假设即并不是每一个经典上允许的轨道在实际上都是可实现的.实际的轨道要受到若干明确的非经典性质的量子条件限制.作为一个例子我们指出粒子在原子中由于轨道运动而具有的总角动量应该是$\hbar$的整数倍这个规则．与量子条件所允许的轨道相联系的总能量值在很多情况下(但并不总是)形成一组分立值．这样玻尔创立了一个原子的分立能级理论．他的方法可以称为原子内部运动的量子化，这就是“量子化”一词的历史来源.

2 玻尔的量子条件有一种专门定出来的性质,很难被认为是令人满意的．在薛定谔发表论文的时候，已经清楚虽然玻尔的理论确实解释了一些观察到的事实，但也有着一定的缺点和完全失败之处．因此产生新概念的时机已经成熟.

薛定谔的巨大贡献在于证明了：如果认真地采用物质的

1) E. Schrödinger, "Quantiserung als Eigenwertproblem," *Annalen der Physik* **79**, 361 (1926); **79**, 489 (1926); **80**, 437 (1926); **81**, 109 (1926).

波动图象，那就会有一个系统的和自然的方式得到“量子化”。他指出在适当的条件下他的波动方程具有描述驻波的解，他并把这些解和原子的定态联系起来．这些驻波解均有按 $\exp(-i\omega t)$ 而随时间变化的特征，可能的频率是一组分立值，比如说为 ω_1, ω_2, ω_3, $\cdots$，而第 n 个定态的能量就由 $E_n=\hbar\omega_n$ 给出．本章将按照薛定谔的步骤，探讨这个想法．

3 在第七章中经过一系列可以讲得通的论证我们得出了薛定谔方程[1)]

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi(\mathbf{x},\ t)+V(\mathbf{x})\psi(\mathbf{x},\ t)=i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\mathbf{x},\ t) \tag{3a}$$

它描述了质量为 m 的粒子在可用势函数 $V(\mathbf{x})$ 导出的力场中的运动．在我们的“推导”中我们认识到这个方程完全是一种近似：对粒子的运动作非相对论性地处理，并且忽略了所有的产生和湮没现象．我们说明了为什么这些方程会在原子和分子物理学中，以及在核物理的某些情况中，都非常有用．在后一领域中我们能够用量子力学隧道效应来解释一个 α 放射源的寿命和射出粒子的能量之间的关系而得到巨大成功．

正如我们在第七章中的讨论一样，在这里考虑描写一维问题的薛定谔理论这一简化模型是有益的．这类问题的薛定谔方程形式为

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x,\ t)+V(x)\psi(x,\ t)=i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,\ t) \tag{3b}$$

讨论方程(3b)比三维的方程(3a)在数学上要简单得多．由于我们现在感兴趣的现象的根本特征在这两个方程中表现得差不多一样，所以我们可以通过研究较简单的方程(3b)来

1) 本章中采用厘米·克·秒或米·千克·秒单位制．

理解薛定谔理论如何产生预期的效果．此外，应该说明这个方程并不象人们起初所认为的那么不现实：许多涉及三维运动的问题可以简化为等价的一维问题．

4 让我们从一个很简单的问题开始．一个粒子被限制在一个长为 a，壁无限高的"匣子"里．图 4A 中的实线代表这个问题中的势函数 $V(x)$．当 x 在区间 $(0, a)$ 里势 $V(x)$ 为零，而在此区间外则为 $+\infty$．

在第七章第 26 节中我们考虑的是只有一个无限高势壁的情况．在那里我们得到了单色驻波解，它描述一个具有任意正能量 E 的粒子被壁所反射．现在情况下的新特点是粒子被限制在两个无限高势壁之间．

现在让我们试图求解薛定谔方程(3b)，设波函数 $\psi(x, t)$ 以一个简单的指数因子随时间变化，即

$$\psi(x, t)=\varphi(x)\exp\left(-\frac{itE}{\hbar}\right) \tag{4a}$$

将这样形式的波函数代入(3b)我们得到与时间无关的薛定谔方程

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\varphi(x)=[E-V(x)]\varphi(x) \tag{4b}$$

在第七章第 26 节的讨论中，我们曾得出在势函数是无限大的区域内，以及在这样的区域的边界上波函数必须为零的结论．因此在现在的问题中波函数在 $x=0$ 和 $x=a$ 处，以及在区间 $(0, a)$ 之外均应为零．

方程(4b)在匣子内的通解的形式为：

$$\varphi(x)=A\exp(ixk)+B\exp(-ixk) \tag{4c}$$

其中

$$k=\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} \tag{4d}$$

而 A 和 B 为常数．若我们现在先加上 $x=0$ 处波函数应为零

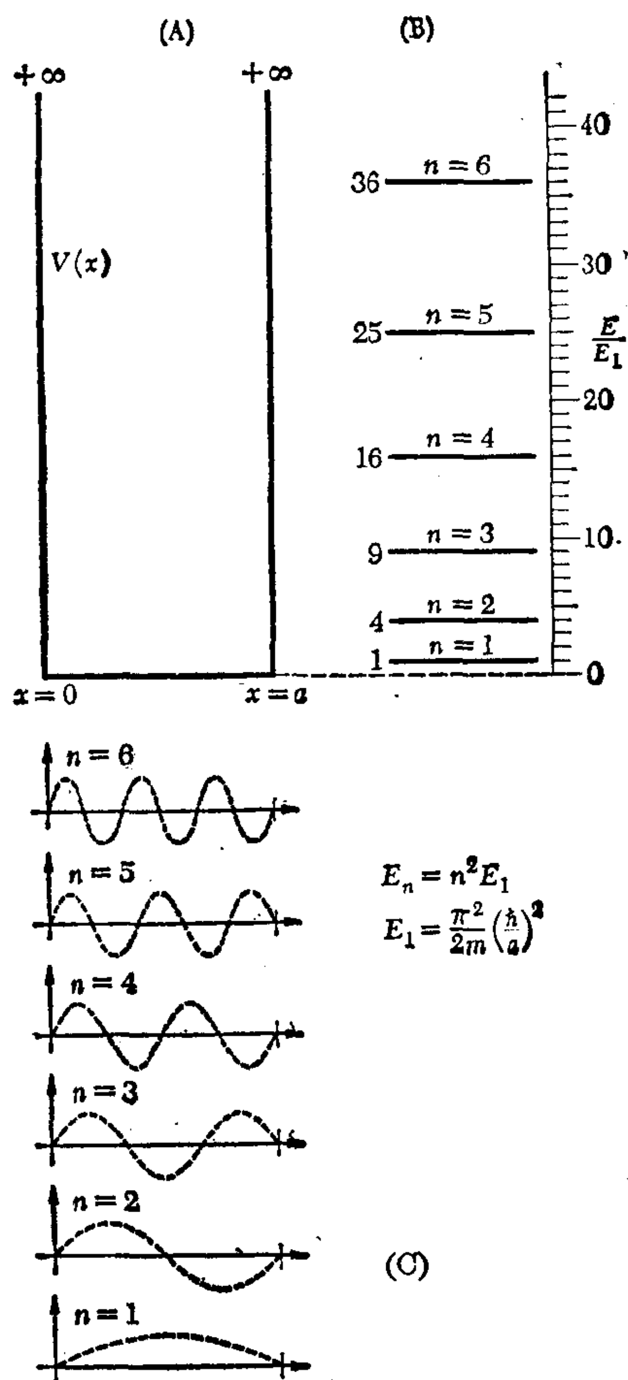


图 4*ABC*　一个被限制在一维匣子内的粒子的情况(这一情况有点不实际)给我们提供一个定态薛定谔理论的要点的简单说明. (*A*)表示势能的分布,在 $x=0$ 及 $x=a$ 两点它变成无穷大. 与定态相对应的波函数在这些点上必定为零. 这只有在(总)能量取谱项图(*B*)(仅给出开始的六个数值)中的某一数值时才是可能的. (*C*)表示与开始的六个定态相对应的波函数(本征函数).

的条件，我们发现物理上可接受的解的形式应为

$$\varphi(x)=C\sin(xk) \tag{4e}$$

其中 C 为非零常数. 在 $x=a$ 处波函数也应为零，我们就得到另一个条件

$$C\sin(ak)=0 \text{ 或 } ak=n\pi \tag{4f}$$

这是一个关于 k 的条件，因此也是一个关于能量 E 的条件。计入如(4d)所示的 E 和 k 之间的关系，我们就有

$$E=\frac{n^2\pi^2\left(\frac{\hbar}{a}\right)^2}{2m} \tag{4g}$$

这里的 n 是正整数：除非 E 是这样的形式，否则我们的问题是没有物理上可接受的解的. 将 $n=0$ 的情况排除在外，因为这相应于一个恒等于零的波函数，在物理上是不能接受的. 由于我们假定 k 为非负数，所以 n 为正.

5 这样我们就发现了对于在一个匣子中的粒子，薛定谔方程(3b)具有随时间按简单的指数规律变化的定态解，即具有形式为 $\psi(x, t)=\varphi(x)\exp(-itE/\hbar)$ 的解，其中的能量 E 只能取一系列分立值 $E_1, E_2, E_3, \cdots, E_n, \cdots$ 中的一个，它们由

$$E_n=\frac{n^2\pi^2\left(\frac{\hbar}{a}\right)^2}{2m} \tag{5a}$$

给出，这里 n 是任意的正整数. 因此相应于第 n 个可能的能量 E_n 的归一化[1]波函数 $\psi_n(x, t)$ 的形式在区间 $(0, a)$ 之内为

$$\psi_n(x, t)=\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\exp\left(-\frac{itE_n}{\hbar}\right) \tag{5b}$$

在区间外面则为零.（这个波函数是正确地归一化为一的，这一点我们轻而易举地对 $|\psi_n(x, t)|^2=(2/a)\sin^2(n\pi x/a)$ 从 0 到 a 积分就可看到：结果是 1.）

1) 关于薛定谔方程归一化的讨论参看第七章第 49 节。

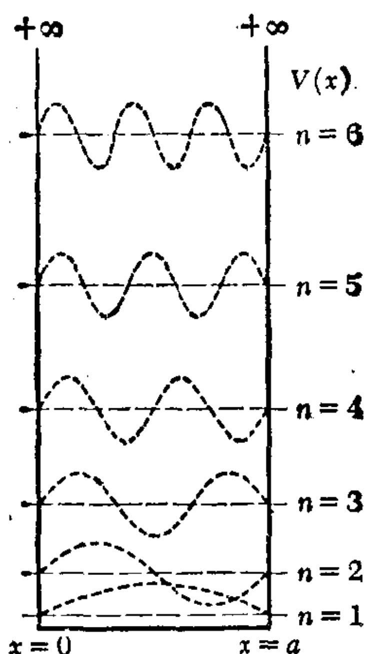


图 5A　在有关量子力学的教科书中经常用这样的图. 图 4ABC 三个图已经被合在一起成为一个图. 这或许是一种不好的做法, 但是由于这种图从未使作者引起误解, 他认为也不会使读者引起误解.

能级用细的虚线给出. 每一根这样的线, 又作为 x 轴而在它上面迭加一条曲线表示相应的波函数.

我们曾用图 4AB 所示的这个体系的谱项图的形式来表示能量 E_n, 在该图中画出了开始的六个能级. 在图 4C 中我们画出了相应的波函数 $\varphi_n(x)$. 当然, 这些函数等于特定时间 $t=0$ 时的函数 $\psi_n(x, t)$.

也可以参看合在一起的图 5A.

6　现在让我们来研究薛定谔方程(3b)的定态解与非定态解之间的差别.

首先考虑由式(5b)给出的第 n 个定态解. 由于解是归一化的, 因此波函数的绝对值平方给出了在 x 轴的任何地方找到粒子的几率密度 $P_n(x)$. 我们发现在区间 $(0, a)$ 内

$$P_n(x)=|\psi_n(x, t)|^2=\left(\frac{2}{a}\right)\sin^2\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \tag{6a}$$

在此区间外则 $P_n(x)=0$. 正如我们所看到的，对于定态解几率密度是不随时间变化的.

让我们接着来考虑一个非定态的解. 由于薛定谔方程(3b)是一个线性微分方程，任意两个解的线性组合给出一个新的解. 若两个原来的解满足边界条件 $\psi(0, t)=\psi(a, t)=0$ 则新的解也满足同样的边界条件. 按照迭加原理，我们可以断定任何定态解(5b)的线性组合将给我们以新的在物理上是可以接受的解.

为了看出在这样的两个解的迭加中将发生什么，让我们来考虑特定的线性组合

$$\psi(x, t)=\sqrt{\frac{1}{2}}\left[\psi_{n'}(x, t)+\psi_{n''}(x, t)\right] \tag{6b}$$

此中设 $n'\neq n''$. 我们要求薛定谔方程的这个新解归一化为一(对于所有的时间 t). 对应于解(6b)的几率密度 $P(x, t)$ 由下式给出

$$P(x, t)=|\psi(x, t)|^2=\left(\frac{1}{a}\right)\left\{\sin^2\left(\frac{n'\pi x}{a}\right)+\sin^2\left(\frac{n''\pi x}{a}\right)\right.$$
$$\left.+2\sin\left(\frac{n'\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{n''\pi x}{a}\right)\cos\left[\frac{t(E_{n'}-E_{n''})}{\hbar}\right]\right\} \tag{6c}$$

将 $P(x, t)$ 的这个表示式从 0 到 a 积分，读者可以立即证实由(6b)式给出的波函数确实是归一化为一的.

如我们所见，几率密度 $P(x,t)$ 不是与时间无关的: 式(6c)的最后一项表示一种振荡行为，这个振荡的频率由

$$\omega_{n'n''}=\frac{E_{n'}-E_{n''}}{\hbar} \tag{6d}$$

给出.

7 略加思考就可知道所有定态解(5b)的迭加都必须显示出这种行为，只要在迭加中至少出现两个不同的定态解. (迭加

可以包含任意数目的定态解:甚至可能存在无限个解.)再有,我们很容易看出假使在迭加中出现定态解 $\psi_{n'}$ 和 $\psi_{n''}$,那末在几率密度中必然会有由方程(6d)给出的振荡频率为 $\omega_{n'n''}$ 的项. 这一项是由于在波函数 $\psi(x, t)$ 的绝对值平方的展开中出现"交叉项" $\psi_{n'}^*\psi_{n''}$ 和 $\psi_{n''}^*\psi_{n'}$ 而来

$$\psi(x, t)=\sum_n C_n\psi_n(x, t) \tag{7a}$$

式中 C_n 是一些常数.

现在实际上可以证明这样的定理:对于关在匣子内的粒子,其薛定谔方程的每一个在物理上可接受的解,都可根据这个问题的定态解(5b)以唯一的方式写成如(7a)所示那样的展式. 这里我们将不去证明这个定理,而把它作为有道理的而接受:在数学上这是关于傅里叶级数的定理. 接受了这个定理我们就可以断定,只有相应于几率密度与时间无关的薛定谔方程的那些解才是定态解.

8 现在我们已经学了定态的薛定谔理论以及一个量子力学体系的能级的要点. 定态相应于薛定谔方程的定态解,对于定态,几率密度是与时间无关的.对于非定态则几率密度随时间而振荡,而可能发生的振荡频率则按照不同定态能级之间的能量差由式(6d)给出. 这些频率很清楚地是我们可以期待要发射或吸收辐射的体系的特征频率:也就是这些是体系将与之谐振的频率. 跃迁频率 $\omega_{n'n''}$ 反过来决定能级的位置,只是差一个附加常数,即我们可通过给基态指定的某一适当能量.(在我们的例子里我们取"势阱底"为零点.)

现在我们可以提出一个有雄心的计划:凡是可以把薛定谔理论作为一个很好近似的物理上有意义的各种情况,都求解薛定谔方程(适当地推广到应用于多粒子体系). 特别是,我们要寻找可以归一化的定态解:它们给出定态以及与之相

应的能级．不用说，实际上这个雄伟的计划远未完成：虽然我们可以相当好地处理简单的体系，但要精确求解复杂体系的薛定谔方程我们的数学能力是全然不够的．

9 考虑上述的计划时，我们也可以问这是否真正就是我所需要的．正如我们在第三章中仔细地讨论过的，严格讲"定"态根本不是稳定的．另一方面，我们的关于在匣子里的粒子的理论确实给出严格的定态．我们所列出的计划也应向我们提供严格的定态，这就与一些已知的观察结果相矛盾．这里我们遇到了薛定谔方程的一个明显缺点：它不描写辐射跃迁．因此薛定谔方程并非全部情况，某些东西被漏掉了．在这方面薛定谔理论与一个经典理论类似，在这个经典理论中只计入了电子和核之间全部静电相互作用而把运动粒子产生电磁辐射给忽略掉了．不过我们还是可以希望薛定谔理论在原子和分子物理中是一个很好的近似．这样我们可以期望由薛定谔方程所预示的定态将与"真正的"理论中的一个几乎是稳定的状态相对应，并且这个几乎是稳定的状态的"平均能量"将十分接近于由薛定谔方程所预示的精确能量值．

10 让我们在继续讲下去之前，先解释几个经常用到的术语．当我们希望找出一个体系的能级时，与时间无关的薛定谔方程(4b)是我们必须考虑的典型方程．让我们用符号形式来写这个方程

$$H\,\varphi(x)=E\,\varphi(x), \tag{10a}$$

其中 H 表示下列微分算符

$$H\equiv-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}+V(x) \tag{10b}$$

我们想要求出微分方程(10a)的解 $\varphi(x)$．对任何的能量 E 这个方程总是有解的，但并非所有这些解都是在物理上可接受的．所以我们将着重把物理上可接受的条件，即波函数

是平方可积[1]，作为问题的必不可少的部分．假使这样做，我们发现能量 E 不能是任意的．那些使方程(10a)具有物理上可以接受的解的 E 的数值称为微分算符 H 的本征值．相应的波函数称为算符的本征函数．

现在我们可以明白为什么薛定谔称他的论文为"量子化，即一个本征值问题．"

11 限制在一个具有无限高壁的势阱中的粒子的问题是一个有点不实际的问题．现在让我们比较一般地考虑一维本征值问题．假设势函数 $V(x)$ 没有一处是无限大，而是具有图 11A 所示的形式．我们假定 $x\to+\infty$ 时势函数趋向常数值 V_+，在 $x\to-\infty$ 时趋向常数值 V_-．用 V_0 表示势能的最小值．当然这个特定的势是一个特殊情况，但考虑这样的特殊情况是很有教益的．我们假设 $V_+\geqq V_-$．

我们将考察对于势函数为 $V(x)$ 的与时间无关的薛定谔方程(4b)的解的性质．让我们把这个方程写成

$$\frac{d^2}{dx^2}\varphi(x)=-\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)[E-V(x)]\varphi(x) \qquad (11a)$$

我们考虑能量参数 E 取各种不同的数值时的这个方程：

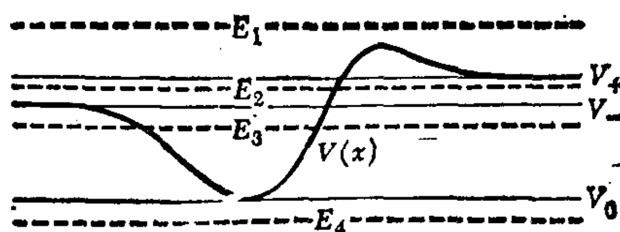


图 11A 一种特定的势函数，它在 x 趋向 $+\infty$ 或 $-\infty$ 时分别趋向于常数值 V_+ 和 V_-．我们将研究对于总能量 E 取不同数值时薛定谔方程解的性质．水平的虚线指出的四个能量，代表可能出现的情况．

1) 正如我们在第七章第 26 节中所发现的，在具有无限高壁的"势阱"的情况中，这个条件导致在阱外以及在边界上波函数为零的条件．

即对于 $E \leqq V_0$; 对于 $V_- \geqq E > V_0$; 对于 $V_+ \geqq E > V_-$; 和对于 $E > V_+$. 应该清楚地懂得对于所有的 E 值, 微分方程(11a)总是有解,但这些解一般并不都是物理上可接受的.

(一般的)复数的波函数的图示有一些问题. 一个可能性是画出波函数的绝对值. 另一个可能性是考虑方程(11a)的实数解. 我们注意到如果 $\varphi(x)$ 是方程(11a)的任意一个(复数)解, 则 $\varphi^*(x)$ 也是一个解, 因为 E 和 $V(x)$ 两者都是实数. 解 $\varphi(x)$ 的实部 $[\varphi(x)+\varphi^*(x)]/2$ 和虚部 $[\varphi(x)-\varphi^*(x)]/2i$ 也是方程(11a)的解,因此我们可以设想以这些实函数作图.

12 让我们首先考虑实数解在 $[E-V(x)]<0$ 的整个区间内的局部行为. 考察薛定谔方程(11a)表明在这样一个区间内波函数的二阶微商具有与波函数相同的符号. 这就导致如果波函数在一个区间内不为零,那么它就会"凸向 x 轴"的结果.

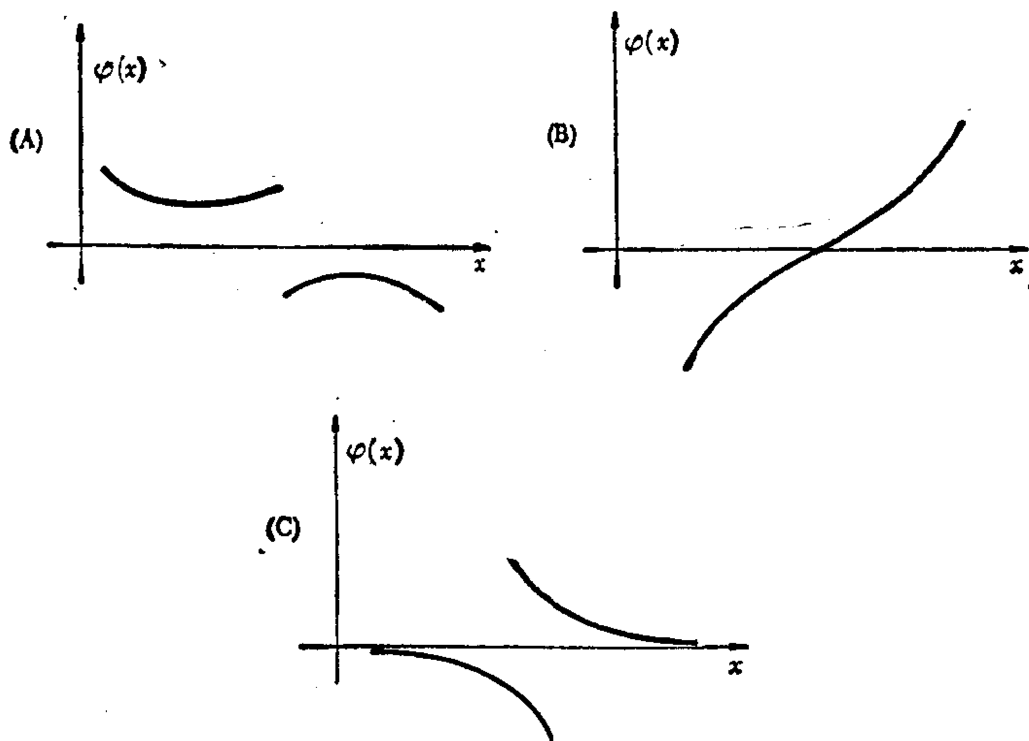


图 12ABC 上面各图中画出的几段曲线说明了在 $E<V(x)$ 的全部区间内(实数)波函数的局部行为. 在这样的区间内二阶微商具有和波函数相同的符号.

如图 12A 的二段曲线. 假使波函数通过轴则将在零的两边从轴"生长出去", 如图 12B. 波函数也可能或者从左边或者另外从右边渐近地趋于 x 轴, 即如图 12C 的二段曲线.

我们断定: 假使对所有 x 的值都有 $V(x)>E$, 则方程 (11a) 的解在物理上是不可能接受的, 因为波函数的绝对值无论在左边或右边或者可能在两边都无限地增长. 参照图 11A, 物理体系是不可能具有比 V_0 更小的能量 E 的.

13 下面我们来考虑波函数在整个 $[E-V(x)]>0$ 的区间内的性质. 此时波函数和波函数的二阶微商符号相反. 这就导致波函数在不为零的区间内必然是"从 x 轴向外凸." 这一点可由图 13A 的二段曲线来说明. 若波函数通过轴, 它将离开曲线在零点处的切线, 而在交点两边向轴弯曲. 这个性质由图 13B 所说明, 应将该图与图 12B 比较.

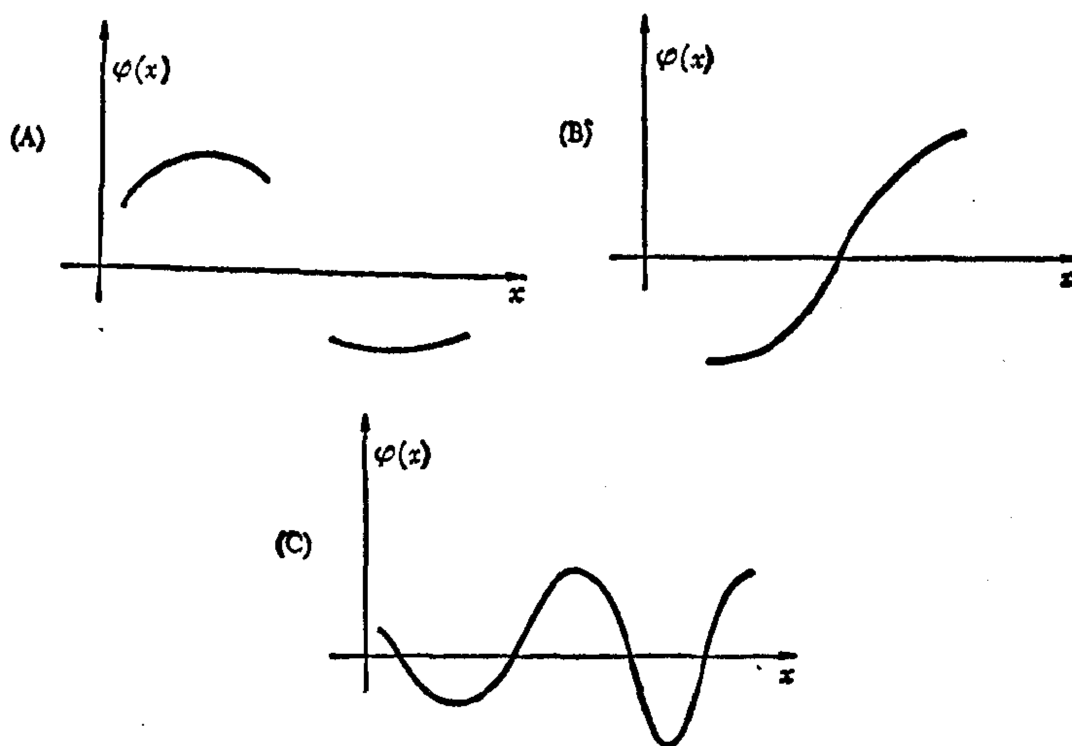


图 13ABC 上面图中的曲线段说明了在 $E>V(x)$ 整个区间内(实数)波函数的局部行为. 在这样的区间内波函数与其二阶微商符号相反. 读者可将这三个图与图 12ABC 仔细地作比较.

表示波函数的曲线中较长的一段可能多次通过 x 轴，这样我们就得到图 13C 所示的“振荡的”行为.

14 最后我们考虑在整个区间 $[E-V(x)]=0$ 的情况（这个极其特殊的情况只有在势函数 $V(x)$ 在整个区间内均为常数时才会发生）. 波函数的二阶微商必定为零，从而其一阶微商必定是一个常数. 代表波函数的曲线就是如图 14AB 所示的线段所说明的一根直线.

这里让我们注意到对于图 11A 所示那样的势函数，一个物理上有意义的波函数及其一阶微商不可能在同一点上同时为零，因为若发生这种情况，则波函数必定处处为零. 这个说明就是常微分方程理论中的一个定理. 根据这个理由图 12ABC, 13ABC 和 14AB 中的曲线段虽然可能穿过或渐近地趋于 x 轴，但决不会接触 x 轴.

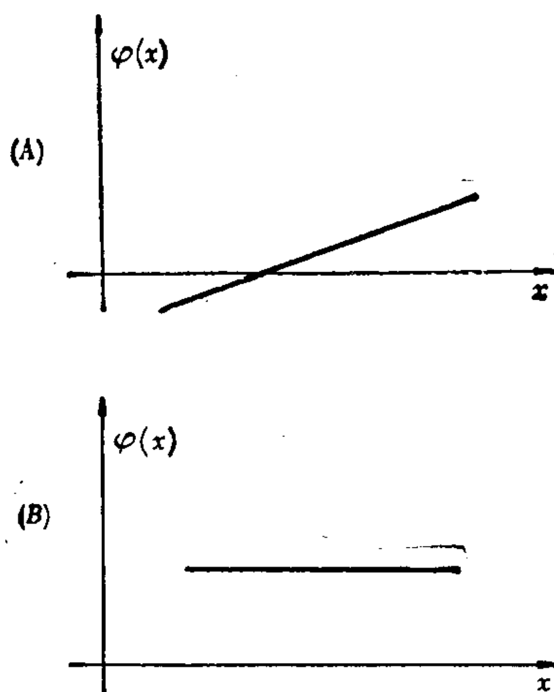


图 14AB 上图所示的线段说明了(实数)波函数在整个 $E=V(x)$ 区间的局部性质. 这是一个只有当势函数 $V(x)$ 在区间内是常数时才会发生的特殊情况. 波函数的二阶微商等于零，因此波函数由一根直线来代表.

15 让我们用关于波函数的局部行为的知识来讨论当势函数如图 11A 所示时，波函数对所有 x 值的整体行为. 现在我们必须对微分方程(11a)的解加上物理上有意义的波函数所应满足的条件.

参照图 11A，我们首先来考虑能量 E 满足条件 $E>V_+$ 的情况. 这样的一个能量 E_1 在图中用标有 E_1 的虚线来表示. 这个情况实际上多少有点特殊，因为对于所有的 x 我们都有 $[E-V(x)]>0$. 解在各处，特别在 $+\infty$ 和 $-\infty$ 处都是振荡的. 只要 $E>V_+$，当能量 E 低于势函数 $V(x)$ 的最大值时解在 $+\infty$ 和 $-\infty$ 处也还是振荡的：在这种情况我们遇到了势垒穿透问题. 因此对每一个 $E>V_+$，我们可以找到两个线性无关的，在无限远处是振荡的解，而这些解描述了行进的粒子(行波). 在第七章中，我们已经讨论过这样的解及其物理解释. 一个固定 E 的解不是归一化的，但我们可以用行进波解的(连续)迭加形式来构成不可归一化的解. 在第七章第 51 节中，我们约定把对应于 E 为有限值的解称为**非正规的波函数**，这样对任何 $E>V_+$ 我们就有二个线性无关的非正规波函数. 这些波函数，或者宁可说是可以由它们构成的归一化的波包，可以描述，例如，一个由“势垒”左边入射的粒子. 这个粒子部分地被反射回左边，部分地透射过势垒到右边. 同样，粒子也可以从右边入射.

16 接下来假设 $V_+>E>V_-$，在此情况下我们在右边有一个区间 $[E-V(x)]<0$ 而在左边有一区间 $[E-V(x)]>0$. 这是我们在第七章第 21—25 节中考虑过的同一类问题. 这里在右边区间内的两个线性无关的解中只有一个是物理上可接受的，即当 x 趋向于 $+\infty$ 时趋向于零的解(相应于图 12C 中右面的一段曲线). 当连续到左边去时，这个解在区间 $[E-V(x)]>0$ 内具有振荡性质. (当然，波函数及其一阶

微商都是到处连续的，否则波函数就不可能对应于薛定谔方程的整体解.）这样对于每一个$V_+>E>V_-$的E我们就有一个（非正规的）波函数，这个波函数描述一个由左边入射的粒子被势“驼峰”的反射，正如在第七章中讨论的问题一样.

17 让我们接下去考虑$V_->E>V_0$的情况．这样的一个例子就是在图11A中标有E_3的虚线所表示的能量．在此情况下我们在左边和右边各有一个$[E-V(x)]<0$的区间，而在中间有一个$[E-V(x)]>0$的区间．把这些区间彼此分隔开来的两个边界点就是经典的转向点：我们将用x_1和x_2来表示它们.

在x_1的左边波函数一定渐近地趋于x轴，而它的行为应该如图12C中左边线段所示的那样（波函数的符号除外，这是无关紧要的）．除非波函数的行为如此，否则当x趋向$-\infty$时它就要增大，而一个稳定地增大的波函数在物理上是不可接受的．在x_2的右边，波函数应该表现得象图12C中右边的线段那样．在x_1和x_2之间的中间区域里波函数显示出振荡行为，在这个区域内我们有两个物理上可接受的线性无关的解．现在的问题是把这些不同类型的解“匹配”起来以使我们获得物理上可接受的波函数，这个波函数到处连续并到处有连续的一阶微商[1]．对于一个任意的E，这一点是办不到的：只能对某些分立的能量E值才能求得物理上可接受的解（它是平方可积的）．这些能量的每一个都相应于体系的一个束缚定态.

18 可以容易地借助于图18ABC来理解这个现象．设想取一个任意的能量E使$V_->E>V_0$．“对左边”我们用取一个当x趋向于$-\infty$时渐近地趋于x轴的解来满足物理条件．在转向点x_1这个解必须与在x_1和x_2之间的振荡解相“匹配”.

1）假使我们找到了波动方程的一个整体解，当然就自动做到了“匹配”.

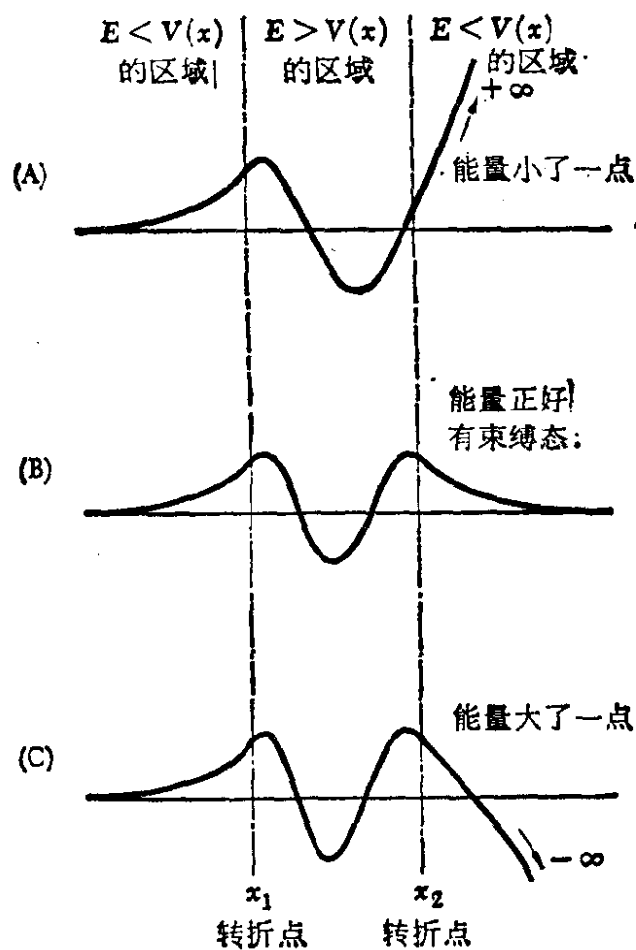


图 18*ABC* 表示薛定谔方程解的行为的简图：当 x 趋向于 $-\infty$ 时它就渐近地趋于零. 图中的三根曲线代表三个不同能量的解. 除非能量参数的值“正好合适”，否则当 x 趋向于 $+\infty$ 时，解就向 $+\infty$ 或 $-\infty$ 发散. 微分方程的非有界解不是物理学上可接受的：它们不是薛定谔问题的解. 对于曲线 B 能量值“正好合适”：当 x 趋向于 $+\infty$ 时，波函数就渐近地趋于零. 这条曲线代表一个束缚态的波函数.

由于波函数及其一阶微商都应连续，对这个区域我们就得到一个唯一的解. 这个解必须与 x_2 右边的解相“匹配”，我们就再次得到一个对于 x_2 右边的唯一的解. 除非能量 E 正好合适，这个解将不表现出图 12C 中右边线段的行为，而是相反地由轴向外伸展，在这种情况下总的解不是物理上可接受的. 波函数在左边和在右边都减少的条件，一般情况下是不相容

的，除非 E 是一组分立值中的一个．这些数值应比 V_0 大．我们早已断定对于 $E<V_0$，不可能有物理上可接受的解．

这样对于图 11A 所示的势函数问题，谱项图是在 V_0 和 V_- 之间的一些分立能级的集合(也可能是空集合，即没有这样的能级)，在能量 V_0 之上则是一个连续区．

19 刚才讨论的一类问题中，有一个一维的问题，较易于作解析处理，如图 19A 所示．这里我们有 $V_+=V_-$，因此势函数在每一段中是常数．在图的右面我们画出谱项图，可以看出在连续区下面有四个束缚态．在图的左边画出相应于这些束缚态的波函数．注意第一个波函数有一个极值(没有节点)，第二个波函数有两个极值(有一个节点)，而相应于最高的分立能级的第四个波函数有四个极值(有三个节点)．对于更深的势阱我们就会有更多的束缚态，对于无限深阱的极限情况我们就有无限多的束缚态，这正是第 4 节中讨论的问题．应将图 4B 和 19A 中的谱项图进行比较：在这两种情况下，开始的四个束缚态能级的位置虽然不全同，但却是相似的．

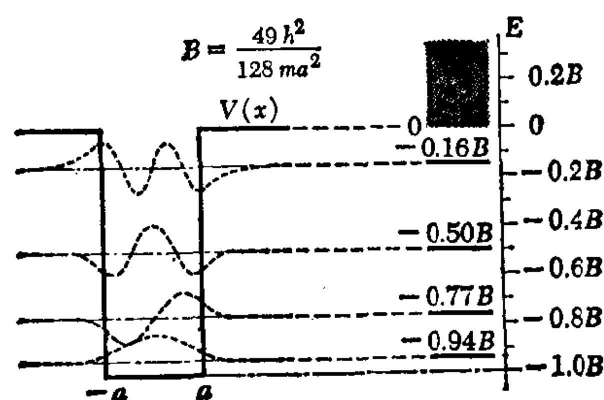


图 19A 粒子在一深为 B 的势阱中的情况．此图是根据 R. B. Leighton, *Principles of Modern Physics*, p. 154 (McGraw-Hill Book Co.; New York, 1959) 所给出的例子．在左面画势阱而在右面画谱项图．有四个束缚态(四个分立的能级)．相应的本征函数示于左边，迭加在势函数图上面．连续区开始于势阱的顶部，在谱项图中用灰色表示．

读者可能想试解一下这个问题，以求出图 19A 所示情况的束缚态：这并不特别困难.

现在我们知道了在薛定谔理论的基础上我们能够懂得为什么一个量子力学体系会有束缚态，以及为什么当超过一定的极限值时一般讲是一个可能能量的连续区. 体系超过连续区开始的能量值，体系就能离解. 在我们的简单的例子中离解的意思就是粒子表现为象一个远离"中心区域"传播的波包.

20 下面让我们指出如何理解我们在第三章第 38 节中遇到过的在连续区开始处上面存在能级的现象.（参看第三章图 38A 中的谱项图.）

我们考虑图 20A 所示的一维势函数问题. 它与图 19A 的问题的不同在于势函数在势阱外不是保持为常数，而是在离势阱一定的距离处阶跃式地减小到一个数值 $-B_\infty$. 我们假设在这些阶跃之外势函数仍保持为数值是 $-B_\infty$ 的常数.

图 20A 此图说明图 19A 所示情况的一个变形. 势函数在区间$(-b, +b)$内是一样的，但在此区间外上图所示的势函数是一个恒量 $-B_\infty<0$. 因此在现在的情况下，连续区从 $-B_\infty$ 开始，并且只有三个严格的定态. 然而，若 b 很大，相应于很厚的"势垒"，那么将会有第四个接近稳定的状态. 在上图将这个虚能级标作 E_4. 它相当于图 19A 中的第四个定态能级.

按照我们的理论现在连续区将如图 20A 右边的谱项图所示那样，在能量 $-B_\infty$ 处开始．对于一个不太小的 b 将有三个束缚态．只要常数 b 是大的，即当图 20A 中的二个势垒足够厚，那么这些能级 E_1, E_2, E_3, 就和图 19A 谱项图中前三个能级十分接近．让我们把我们的考虑局限于 b 非常大的情况．若 b 是无限大则图 20A 中的问题就变得和图 19A 中的问题相同．连续区就由能量 0 开始，并在能量 E_4 处出现第四个束缚态．对于有限的 b, 不论它多么大，我们只有三个严格的定态，而连续区从 $-B_\infty$ 开始．然而，如果设想势阱的宽度是典型的原子尺度，深度是 10 电子伏的数量级，粒子是一个电子，而 b 大于 1 公里．那末在这些条件之下，就很难看出图 20A 中的情况与图 19A 中的情况能有多大差别．常识告诉我们势阱周围的粒子的行为在这两种情况下一定十分相似，因此我们期望在图 19A 的谱项图中的第四个束缚态一定也总会在图 20A 的问题中以某种方式出现．对此情况的仔细的数学考察证实了这一点，我们不能在这里进行这样的考察．然而，让我们试指出一条可能的分析思路．

21 我们比较在两种情况下一个特殊的薛定谔波函数 $\psi(x, t)$ 随时间变化的行为．设想在时间 $t=0$ 时波函数和图 19A 中的相应于第四个能级 $E_4\cong-0.16B$ 的第四个本征函数一样．换言之，我们有

$$\psi(x, 0)=\varphi_4(x) \tag{21a}$$

其中波函数 $\varphi_4(x)$ 就是图 19A 中 E_4 能级上用点线所表示的波函数．在图 20A 中也用点线画出这个波函数．注意此波函数在势阱外相当快地趋向零．

对于图 19A 中的问题，很容易解出满足由式(21a)给出的初始条件的含时间的薛定谔方程(3b)．由于 $\varphi_4(x)$ 是薛定谔微分算符的本征函数，所以我们就有

$$\psi(x,\ t)=\varphi_4(x)\exp\left(-\frac{itE_4}{\hbar}\right) \tag{21b}$$

它表达了 $\psi(x,\ t)$ 的定态性质．现在我们来求在势阱内找到粒子的几率 $P(t)$；

$$P(t)=\int_{-a}^{a}dx|\psi(x,\ t)|^2=P(0) \tag{21c}$$

正如我们所见，这个几率与时间 t 无关，它再次反映了波函数 $\psi(x,\ t)$ 的定态性质．注意(21c)中的积分只取势阱内的部分，即由 $-a$ 到 a。

22 现在若我们试图对图 20A 所示的情况求解同样的问题，即用同样的初始条件(21a)，那么解就不是(21b)的形式，虽然可以说它近似地是这样的形式．假使我们真的找到了对于图 20A 中问题的与时间有关的波函数 $\psi(x,\ t)$，然后计算在势阱内找到粒子的几率 $P(t)$，那么就可以证实代替(21c)的是近似的关系式

$$P(t)=\int_{-a}^{a}dx|\psi(x,\ t)|^2\cong P(0)\exp\left(-\frac{t}{T}\right) \tag{22a}$$

其中 T 是一个正的常数．我们强调关系式(22a)是一个近似关系式：这只有在时间 t 不是“太大”时才有效．这个结果的详细证明离题太远，但我们将试图把它讲得有点道理．

(22a)式所示的结果的解释是，假使在 $t=0$ 时刻，把能量大致等于 E_4 的粒子放“在阱里”，那么粒子最终是要从阱中漏出来的．假使 T 是大的，也就是 b 是大的情况，那就要较长的时间粒子才会漏出，因此我们就有一个近似的定态．时间 T 就是这个态的平均寿命．假使我们让 b 趋向于 a，T 就变小了，而在极限 $b=a$ 时，能量 E_4 的“态”失去了它作为准定态的意义．

从这个结果看来我们在图 20A 的谱项图中把第四个能级 E_4 画在连续区内是有道理的：它相应于一个近似的定态．

这样的能级常称为虚能级.

可以定性的方式将式(22a)作为一个象我们在第七章已经讨论过的势垒穿透现象的结果来解释. 假使采用经典力学, 那么一个能量为 E_4 的粒子被限制在势阱里边, 它就会永远停留在阱内. 在量子力学的范围内就不是这样了: 粒子可以从阱的两边穿过势垒漏出来. 势垒越宽则所需时间越长, 因此常数 T 就越大. T 很大则粒子在阱内就要来回弹跳很多次, 因此粒子的行为就近似地象是处在一个定态中.

23 到目前为止, 在我们讨论中的每一种情况中, 可以将寻找定态的问题看作为在两个经典的转向点之间拟合一个合适的振荡波函数的问题来处理. 对于基态, 波函数有一个最大值, 而没有节点. 对于第二个态, 波函数有两个极值, 一个节点. 一般讲, 相应于第 m 个态的波函数就有 m 个极值和 $(m-1)$ 个

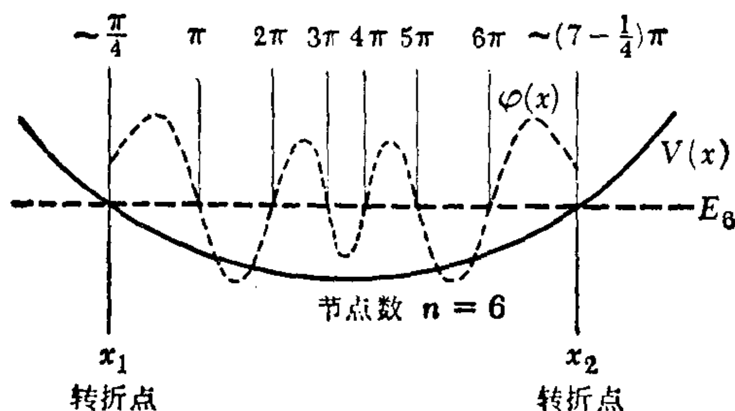


图 23A 说明我们所讨论的用来寻找定态的所谓 WKB 近似法. 为了求出第 $(n+1)$ 个态, 即第 n 个激发态, 我们试图去选取能在经典的转向点之间拟合 $\left(n+\frac{1}{2}\right)$ 个"半波"那样的能量. 在一点上的"局部波长"取决于该点的势能和总能量.

实线代表势能, 虚线代表对应于第六个激发态的波函数(在转向点之间). 在转向点以及节点的上面示出位相 $f(x)$ 的数值. 在这个特殊情况中(在转向点之间)总的位相变化服从关系式 $\Delta f \simeq \left(n+\frac{1}{2}\pi\right) = \left(6+\frac{1}{2}\right)\pi$.

节点．让我们用量子数 n 来标志定态，这里 n 就是波函数的节点(零)数目．这样基态的量子数就被指定为 $n=0$，而第 n 个激发态的量子数就被指定为 n．相应于量子数 n 的波函数有 $(n+1)$ 个极值．

现在让我们试着去寻找决定一个在势谷中的粒子的近似能级的方法．为此我们来考虑图 23A，它给出了对于这类问题的一个典型的势函数．

粗实线表示势能．粗的虚线表示第六个激发态的能量 E_6，而振荡的点线代表相应的波函数．只在转向点 x_1 和 x_2 之间[由 $V(x_1)=V(x_2)=E_6$ 所定义]画出了波函数．在此区间之外波函数渐近地趋向 x 轴．

24 我们试把图 23A 所示的那种波函数表示为如下式：

$$\varphi(x)=A(x)\sin[f(x)], \tag{24a}$$

这里 $A(x)$ 是一个正的振幅，而 $f(x)$ 是一个随 x 单调地增加的位相函数．每当位相函数 $f(x)$ 取值 $k\pi$ 时 (k 是一个整数)，波函数就有一个节点．让我们来考虑在转向点之间位相函数的改变 Δf

$$\Delta f=f(x_2)-f(x_1) \tag{24b}$$

看一下图 23A，我们发现对于图中所示的波函数其位相变化约为 $\left(6+\frac{1}{2}\right)\pi$．我们将遵循这个示意图，假设第 n 个激发态的波函数是这样的，即其位相函数在转向点之间的变化量是

$$\Delta f_n\cong\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi. \tag{24c}$$

为了便于得到一个明确的公式，我们作了假设(24c)．假使我们要更正确一点我们至多能说出一个不等式，即

$$(n+1)\pi\geqq\Delta f_n>n\pi \tag{24d}$$

读者可以容易地自己证明之．假使我们看一下图 $4C$ 我们发现在那里应取 $(24d)$ 的上限，而对于图 $19A$ 中的第三个激发态则较接近于下限．所以方程式 $(24C)$ 代表一种折衷．

25. 接着让我们试着去推导波函数的位相变化作为能量 E 的函数的近似表达式．首先考虑一个势能是具有值为 V 的常数的区间．在这样的一个区间内，对于 $E>V$，波函数的形式为

$$\varphi(x)=A\sin\left[(x-x_0)\frac{P}{\hbar}\right] \tag{25a}$$

其中 A 和 x_0 是常数，而

$$P=\sqrt{2m(E-V)} \tag{25b}$$

比较(25a)和(24a)，我们得到

$$f(x)=(x-x_0)\left(\frac{P}{\hbar}\right) \tag{25c}$$

当我们向右移动一个距离 dx，那么位相变化 df 是

$$df=\left(\frac{P}{\hbar}\right)dx=\frac{1}{\hbar}\sqrt{2m(E-V)}\,dx \tag{25d}$$

现在让我们把(25d)作为当 $V(x)$ 不是一个常数时的位相随 x 而变化的近似表达式．当势能 $V(x)$ 随位置变化越缓慢，则这个近似越是合理．在这个近似下两个转向点 x_1 和 x_2 之间的总的位相变化由下式给出

$$\Delta f=\int_{x_1}^{x_2}\frac{df}{dx}\,dx\cong\frac{1}{\hbar}\int_{x_1}^{x_2}dx\sqrt{2m[E-V(x)]} \tag{25e}$$

让我们把这个关系式用到能量为 $E=E_n$ 的第 $(n+1)$ 个定态的情况中去．总的位相变化也近似地由(24c)给出，如果我们使这两个关于位相变化的表达式相等，我们就得到

$$\int_{x_1}^{x_2}dx\sqrt{2m[E_n-V(x)]}\cong\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\hbar \tag{25f}$$

26. 方程(25f)是一个可以用来确定第$(n+1)$个定态的能量 E_n 的方程式．要这么做，我们首先求出转向点 x_1 和 x_2 作为

能量参数 E 的函数，这可由解方程

$$V(x_1)=V(x_2)=E, \quad x>x_1 \tag{26a}$$

得到.

我们用 $x_1(E)$ 和 $x_2(E)$ 来表示它的解. 接着我们计算积分

$$g(E)=\int_{x_1(E)}^{x_2(E)} dx\sqrt{2m[E-V(x)]} \tag{26b}$$

这就给出了一个 E 的函数 $g(E)$. 能量 E_n 就最后作为方程

$$g(E)=\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\hbar \tag{26c}$$

的解来得到，其中 $n=0, 1, 2, \cdots$.

我们刚找到的决定一个粒子在一个类似图 23A 所示的"势谷"中的能级的近似法称为 WKB 法[1]. 很多情况下它给出相当正确的结果，并且在我们对能级位置试图得出一个粗糙的概念时总是有用的. 这个近似的性质和第七章中用以推导一个势垒的穿透系数公式(36b)的性质很相似: 实际上在两种情况中都出现同样类型的积分.

注意到我们在量子力学范围内推导的方程(25f)和老的玻尔理论的所谓玻尔-索末菲量子条件完全相同是很有兴趣的. 这样我们就对为什么玻尔理论有时用起来相当令人满意有了一定的理解，并且我们还能够看出为什么玻尔理论有时可以严重地失败: 就是因为方程(25f)不是严格地正确而只是一个近似关系式.

二、谐振子. 分子的振动和转动激发

27 让我们把上述的近似法应用于最重要的本征值问题之

1) 根据 G. Wentzel, H. A. Kramers 和 L. Brillouin 定名. 参看 H. A. Kramers, "Wellenmechanik und halbzahlige Quantisierung," *Zeitschrift für Physik* **39**, 828 (1926).

一：寻找一维谐振子的能级．对于这个问题势函数$V(x)$为：

$$V(x)=\frac{K}{2}x^2 \tag{27a}$$

其中K是“弹簧常数”．若粒子的质量为m，则振荡的（角）频率ω_0在经典力学中为

$$\omega_0=\sqrt{\frac{K}{m}} \tag{27b}$$

要完成第26节中描述的量子化过程我们首先应找出转向点．它们相对于原点是对称的，因此我们可以写出$x_1=-x_0$，$x_2=x_0$，这里根据(26a)，我们有

$$x_0(E)=\sqrt{\frac{2E}{K}},\ E=\frac{K}{2}x_0^2 \tag{27c}$$

接着我们寻找如在(26b)中以

$$g(E)=\int_{x_1}^{x_2}dx\sqrt{2m[E-V(x)]}=\int_{-x_0}^{x_0}dx\sqrt{Km(x_0^2-x^2)} \tag{27d}$$

定义的函数$g(E)$．

引进一个由$x=x_0\sin\theta$定义的新变量θ，我们得到：

$$g(E)=2\sqrt{Kmx_0^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\cos^2\theta=\pi E\sqrt{\frac{m}{K}} \tag{27e}$$

这里我们用(27c)消去了x_0．把此式作为$g(E)$代入(26c)中，我们得到了关于谐振子的第$(n+1)$个定态的能量E_n很简单的结果

$$E_n=\left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega_0 \tag{27f}$$

其中$n=0,1,2,\cdots$是任何非负的整数．

28 对谐振子情况，也即是对于势函数由(27a)给出的薛定谔方程(4b)的严格的解，恰巧正好给出了(27f)的结果．

本书不是专门用于在特殊情况下求解薛定谔方程的，因此我们不去试图严格地求解谐振子问题．由于一个值得注意

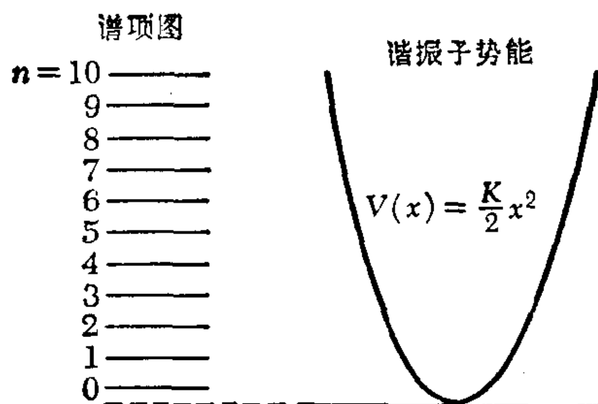


图 28A　一个谐振子的势能(在右边)和谱项图(在左边)。从势"阱"底量起第$(n+1)$个能级的能量由$E_n=\left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega_0$给出，其中$\omega_0$是经典频率。WKB法给出和严格理论相同的结果。

的偶然性，我们的近似方法实际上给出正确的结果，这是出于我们意料之外的。

图 28A 表示一个谐振子的谱项图(在左边)和势函数(在右边)．注意能级之间的等间隔特性．图中我们选定势阱底为能量的零点：当然这是一个任意的规定．

假使振荡的粒子带有电荷，那么我们可以期望在能级之间有辐射跃迁，计入辐射过程后，$n>0$ 的能级就不再是绝对稳定的了．可以证明对于电偶极子跃迁的选择定则是n变化一个单位．因而对于任一个这种跃迁所发射的量子应该具有经典频率ω_0．这也就是我们在经典理论的基础上所预期的．

29　谐振子的理论在物理学上是重要的，因为很多看来完全不相关的物理体系的运动方程都是与许多谐振子相互之间作用很微弱的、组成的体系的运动方程在形式上等同的．作一级近似，略去振子之间的相互作用，这种体系的量子理论，和相互完全独立的谐振子体系在分析上十分简单的理论，数学上是等价的．后一种体系是易于讨论的，因为每一个振子就象其它振子不存在那样地独立振荡着，很清楚只要我们能描

述一个这样的振子，我们就能描述任意多个这样的振子．

作为这种体系的例子，我们可以提出电磁场，一个弹性地振动着的固体，以及许多量子场．此外所有的分子都有一些振动模式可以用谐振子理论很好地近似描述．我们可以非常普遍地讲，谐振子理论适用于满足线性或近似线性运动方程的体系．

30 图 30*A* 说明一个实际的分子线性振子，即氢分子的近似性质．这个分子有两个质子在其中作相对振动的激发模式．可以用一个在图的右面部分画出的有效的核间势来理解这些模式．图中表示体系的势能(用电子伏为单位)作为核间距离的函数．这个有效势的存在及其与核间距离的函数关系是可以从理论上很好地理解的．我们将在下节讨论这个势．因此研究这个或任何另外的双原子分子的振动态，我们首先要寻找

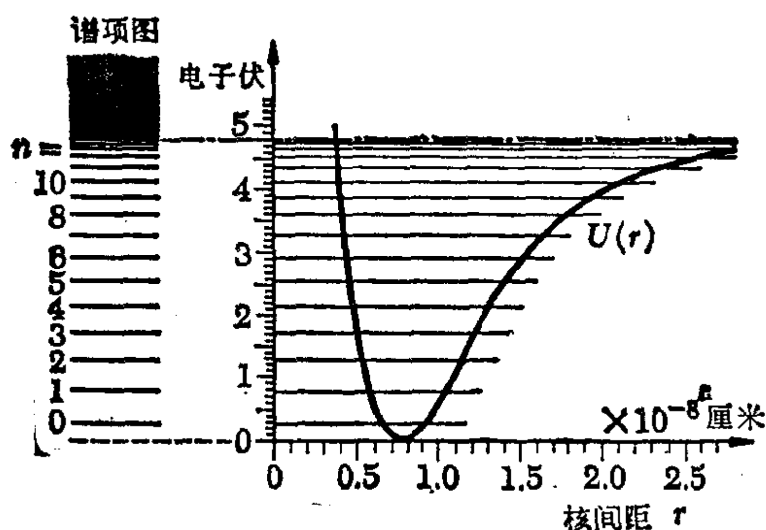


图 30*A* 图的右部表示氢分子的有效核间势能 $U(r)$．左边部分是相应的谱项图．对于最低的一些激发态，分子表现得象一个谐振子．势能曲线在最小值附近处是近似的抛物线形状，因此，下面的一些能级大致和谐振子中的能级位置相同．(参见图 28*A*．) 当核间距离增大时，势能就趋向一个常数值．谱项图中的连续区开始于这个相应于分子的离解能量的能级．

势能 $U(r)$ 并不描述一种"新"的力，它不过是电磁力的一种特殊表现形式．

有效势，然后我们求解含有这个势的一维薛定谔方程以求出振动态的能级.

正如图 28A 一样，我们选择了势阱底作为能量的零点. 当核间距离 r 趋向零时我们可以取势能趋向无限大. 然而，当 r 趋向无限大时，势能趋向一个常数，在图中是 $+4.8$ 电子伏. 分子在这个能量时离解，连续谱就从此处开始，如图中左边的谱项图所示. 所以势能并不和谐振子的势能一样，但是，假使我们只考虑离开势阱底不太高的地方，那么曲线就具有近似的抛物线形状. 事实上，任意一条有一个最小值并在最小值处二阶微商不等于零的光滑曲线，在最小值附近都是"近似的抛物线形状". 所以对于不太高的激发，我们可以期望体系近似地表现得象谐振子一样. 比较图 28A 和 30A 可以看出一个真正的谐振子和一个近似的谐振子之间的区别. 在图 30A 的谱项图中，能级不是等间距的，但对于小的激发，它们是近似地等间距的. 而且一个分子只有有限个振动态.

分子的离解能量是为使基态的分子离解所必须提供的能量. 从图 30A 我们发现氢分子的离解能量约为 4.5 电子伏：这是连续谱的下限和基态之间的能量差.

当这个分子处于基态时，核(质子)之间的距离约为 0.75 埃：基态波函数显然集中在与势的最小值相对应的 r 之处.

31 现在让我们来讨论图 30A 右面部分所示的有效核间势的意义. 我们是从一个研究分子结构的近似图象，即所谓的玻恩-奥本海默近似得出这个势能的. 其概念如下. 由于核(质子)比电子重得多，所以在分子中它们将以比电子的速度小得多的速度运动. 在一级近似中我们可以假设核是根本不动的，只是相互之间保持一个固定的距离 r_0. 为了明确起见我们将讨论氢分子，但类似的考虑也可用到其它分子上. 于是在这个一级近似中要解决的问题就是求出这两个电子在两

个质子的静电场中的基态. 设想我们对任意的核间距离 r 求出了这个问题的解, 那么我们就求得了这一体系的基态能量 $U(r)$ 作为 r 的函数, 即包括两个质子间的相互排斥静电能. 在 r 很小时, 能量 $U(r)$ 是很大的并且是正的, 因为当 r 趋零时, 两个质子间的静电排斥能量趋向于 $+\infty$. 在 r 非常大时, 能量 $U(r)$ 趋向常值 U_∞, 此即两个相距无限远的氢原子的基态能量. 恰巧有一个 r 值的范围如图 30A 所示, 在这范围内 $U(r)<U_\infty$. 函数 $U(r)$ 在点 $r_0\cong 0.75$ 埃处有一个最小值. 这样在假定质子不动的情况下分子最低的可能的能量就是 $U(r_0)$, 在玻恩-奥本海默近似法的第一步中, 这就是分子的基态能量.

32 然而, 质子确实是动的, 因此在玻恩-奥本海默近似中下一步就是计入这个运动. 假设质子相互间在"平衡距离" r_0 周围作振动, 就计入了这个运动. 这个(缓慢的)振荡运动中(当然这要用量子力学来描述)其有效势能由在第一步近似中得到的函数 $U(r)$ 给出.

因而函数 $U(r)$ 就是在玻恩-奥本海默第二步近似中的有效势能, 在这步近似中计入了两个质子的相对振荡. 所以, 我们用以理解分子结构的基本的相互作用就是氢分子中四个带电粒子之间的静电相互作用. 有效势能 $U(r)$ 就作为这个基本的相互作用的结果而出现, 所以它并不表示什么新型的力. 我们可以讲它是静电力的一种特殊形式. 这是一个应当了解的重要点.

33 关于如何去求出 $U(r)$ 的明显形式的问题已超出本书范围. 然而, 让我们试着用一个十分定性的方式来理解一下 $U(r)$ 怎么会有一个最小值. 为此, 必须使我们自己确信, 虽然在分子中电子与质子的距离并不比在原子中小, 但却存在着一些粒子组态, 其静电能量比两个分离得无限远的氢原子

小(即负值更大). 这肯定是分子键联的一个必要的虽然不是充分的条件.

考虑图33A所示的组态,其中两个电子和两个质子被置于边长为a的正方形的顶点处. 几条线表示六对粒子之间的静电相互作用. 对于这个特定的组态,总的静电势能E'_{pot}由下式给出

$$E'_{pot}=+2\frac{e^2}{a\sqrt{2}}-4\frac{e^2}{a}=\frac{e^2}{a}(\sqrt{2}-4) \qquad (33a)$$

这个势能应与相互之间隔开一个很大距离的两个氢原子的势能E''_{pot}作比较. E''_{pot}由下式给出

$$E''_{pot}=-2\frac{e^2}{a_0} \qquad (33b)$$

这里a_0是玻尔半径. 在取$a=a_0$这一特定情况中, E'_{pot}和E''_{pot}二个量之差是负的,即

$$\Delta E'_{pot}=E'_{pot}-E''_{pot}=\frac{e^2}{a_0}(\sqrt{2}-2)\cong-1.2R_\infty \qquad (33c)$$

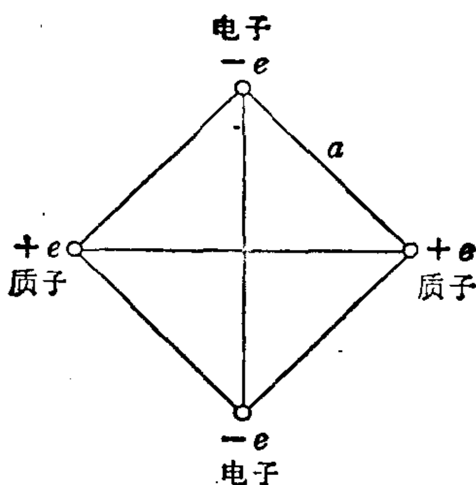


图33A 在图示组态中若$a=a_0$则势能将比分开距离很大的两个氢原子的总势能为小. 于是在上面的"分子"中的电子与质子的距离和在氢原子中是同样的,我们可以想象在两个氢原子靠近时会出现这种组态. 这个例子表明两个氢原子之间的力可以是吸引力,但无论如何这并不证明事实上可以存在稳定的分子.

这里 R_∞ 是里德伯常数，$R_\infty = e^2/(2a_0) \cong 13.6$ 电子伏.

这样，我们找到了一个特殊的组态，ΔE_{pot} 是负的. 然而，显然还存在着一些 ΔE_{pot} 也是负的“邻近的”组态：粒子并不一定要处在正方形顶点.

34 氢分子的总能量是势能和动能之和. 现在如果我们回忆起第六章第 14 节中曾讨论测不准关系与氢原子结构的联系，我们就会认识到应该给氢分子中的电子在分子中有“足够的空间”，因为否则测不准关系就要求它们的动量要大，因而它们的动能也要大. 在我们的对氢原子的讨论中，我们总结为：当电子位置的不确定度约为 a_0 时，即意味着它“占有”一个大小为 a_0 的区域，那么动能的量级为 R_∞. 把同样的考虑应用到氢分子上：假使动能是这个数量级，则我们就应让电子占有大小为 a_0 的区域.

再要深入一步，我们就必须对限制电子的各种区域进行实验，而对每一种选择我们都要考虑测不准原理的要求来计算势能和动能. 这多少有点复杂，在这里我们就不去这样做了. 解决这个问题的最好方法是试图去创造描写两个电子的适当的波函数，然后按照薛定谔理论去计算与这些波函数相关的总能量. 由于我们没有讨论过双粒子波函数，我们就没有尝试这个探讨的准备[1). 根据已经讲过的观点，读者或许可以相信作为核间距离 r 的函数的总能量 $U(r)$ 存在一个最小值. 正如我们讨论氢原子那样，能量最小值是一个折衷的结果：为使动能可以保持小些，应允许电子有充足的空间，但为了使势能可观，又要限制电子在一个足够小的范围内. 粗略地讲，总势能是负的并且和分子的“大小”成反比，而总动能是正

---

1) 第一个令人满意的分子键联的理论见 W. Heitler and F. London, “Wechselwirkung neutraler Atome und homöopolare Bindung nach der Quantenmechanik”, *Zeitchrift für Physik* **44**, 455 (1927).

的并且和分子大小的平方成反比. 对于分子的某个最佳大小，这两项的总和应该有一个最小值.

35 现在让我们试着来估计一个(双原子的)分子的"典型的"振动频率. 势能曲线在最小值(在 $r=r_0$ 处)附近是近似抛物线形的，所以我们可以试将势能函数 $U(r)$ 表示为:

$$U(r) \sim \left(\frac{r-r_0}{a_0}\right)^2 R_\infty + U(r_0). \tag{35a}$$

这是一个合理的推测. 当 $r=r_0$，右边取正确数值 $U(r_0)$. 当 $|r-r_0|=a_0$，势能比 $U(r_0)$ 大一个量 R_∞. 因为一个分子的大小约为 a_0 并且结合能约为 R_∞，所以我们能够期望势能大概就是这样的形式.

(35a)的右边是一个谐振子的势. 这个振子的"弹簧常数" K 是

$$K \sim \frac{2R_\infty}{a_0^2} = \frac{\alpha^2 mc^2}{a_0^2} \tag{35b}$$

设振子的有效质量为 M. 则分子的振动频率 ω_v 就是

$$\omega_v = \sqrt{\frac{K}{M}} \sim \alpha^2 \left(\frac{mc^2}{\hbar}\right) \sqrt{\frac{m}{M}} \tag{35c}$$

这里我们已经代入玻尔半径的表示式 $a_0=\alpha^{-1}(\hbar/mc)$. 我们强调估计式(35c)只是一个粗略的数量级上的估计.

我们在第二章中关于原子物理中特征量值的讨论中断言我们可以把量

$$\omega_e = \alpha^2 \left(\frac{mc^2}{\hbar}\right) \tag{35d}$$

看作为一个与原子或分子中的光学跃迁(即电子组态发生变化的跃迁)相联系的"典型的"频率. 这样我们可以把(35c)写成下列形式

$$\omega_v \sim \omega_e \sqrt{\frac{m}{M}} \tag{35e}$$

表 35A　一些双原子分子的振动频率

分　　子	频　率 (周/秒)	波　数 (厘米$^{-1}$)
C_2	4.921×10^{13}	1641.35
N_2	7.074×10^{13}	2359.61
O_2	4.374×10^{13}	1580.36
NO	5.708×10^{13}	1904.03
CO	6.506×10^{13}	2170.21
IBr	0.805×10^{13}	268.4
S_2	2.176×10^{13}	725.68

对于所有的分子量 M 为原子核质量的数量级，而 m 是电子质量. "典型的"电子频率 ω_e 位于电磁波谱的可见光区内. 正如我们所看到的，分子的"典型的"振动频率 ω_v 小了一个因子 $\sqrt{\frac{m}{M}}$. 因此它们将出现在近红外区，这个预期与观察是符合的.

36 让我们求出核质量为 M_1 和 M_2 的双原子分子的有效质量 M 的明显表示式. 这两个核以这种方式作相对振动，其质心处在连接两个核的直线上. 令 r 为核间距离，r_1 和 r_2 为二个核离开质心的距离，如图 36A 所示. 那末，这个体系的动能就是

$$T=\frac{1}{2}M_1\dot{r}_1^2+\frac{1}{2}M_2\dot{r}_2^2=\frac{1}{2}\left(\frac{M_1M_2}{M_1+M_2}\right)\dot{r}^2 \qquad (36a)$$

其中，上加点号表示对时间的微商. (35a)给出振子的势能作为 r 的函数，而(36a)给出动能作为 $\dot{r}$ 的函数. 这样，这个振子的有效质量 M 就是 $\dot{r}^2/2$ 的系数，即

$$M=\frac{M_1M_2}{M_1+M_2} \qquad (36b)$$

这就是代入(35c)中的表示式. 质量 M 称为两体体系的折合质量.

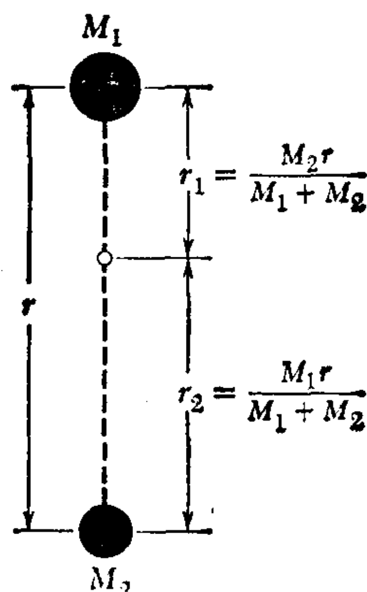


图 36A 双原子分子的图示. 核的质量是 M_1 和 M_2. 在联接二核的连线上的小白圆圈表示体系的质心. 在课文中我们考虑原子核作相对振动的振动激发.

37 由于我们对第 35 节中所估计的"弹簧常数" K 没有一个精确表示式,我们就无法求出双原子分子的精确的振动频率. 然而, 我们可以作出关于同位素效应的精确的预言. 首先考虑一个其核质量为 M'_1 和 M'_2 以及振动频率为 ω'_v 的分子. 接着考虑, 用另外的质量为 M''_1 和 M''_2 的同位素来替代原先的核所得出的一个分子,它除这一点外是与原先的分子相同的,也就是在化学上是相同的. 令这个分子的振动频率为 ω''_v. 两个分子的弹簧常数 K 是相同的(在玻恩-奥本海默近似的范围内), 因为我们求有效势能 $U(r)$时忽略了核的运动. 从此得出频率 ω'_v 和 ω''_v 的关系如下式:

$$\frac{\omega'_v}{\omega''_v}=\sqrt{\frac{M''_1M''_2(M'_1+M'_2)}{M'_1M'_2(M''_1+M''_2)}} \tag{37a}$$

已经发现这个预言十分正确地和观察结果相一致. 这就增强了对我们所提出的简单概念本质上是正确的信念.

38 现在让我们来考虑分子的转动激发. 对每一个分子来

说，都有一个有关的分立分子转动态的体系．在这些转动态中，分子作为一个整体围绕着某一轴转动．让我们试着估计一下与一些转动激发态联系的能量差的数量级．

为简便起见让我们考虑一个如图 36A 中所示的双原子分子．让我们设想在一个特定的转动态中，分子以角速度 ω_a 绕一个通过分子的质心并与分子对称轴(即联接二个核的直线)相垂直的轴转动．我们暂时忽略振动运动，从而我们把分子作为一个刚性的"哑铃"来处理．这样，根据图 36A 中的记号核 1 的速度就是 $\omega_a r_1$，而核 2 的速度就是 $\omega_a r_2$．因此转动运动的动能 T_r 就由下式给出

$$T_r = \frac{1}{2} M_1(\omega_a r_1)^2 + \frac{1}{2} M_2(\omega_a r_2)^2 \tag{38a}$$

如图 36A 所示，用质量 M_1 和 M_2 以及核间距离 r 来表示 r_1 和 r_2，我们就得到

$$T_r = \frac{1}{2}\left(\frac{M_1 M_2}{M_1+M_2}\right)(\omega_a r)^2 = \frac{1}{2} M(\omega_a r)^2 \tag{38b}$$

这里 M 是在方程(36b)中所定义的分子的折合质量．

分子对于转动轴的转动惯量 I 由下式给出

$$I = M_1 r_1^2 + M_2 r_2^2 = M r^2 \tag{38c}$$

让我们也求出分子对于转动轴的角动量 J．它由下式给出

$$J = M_1 r_1^2 \omega_a + M_2 r_2^2 \omega_a = M r^2 \omega_a = I \omega_a \tag{38d}$$

因此我们可以把分子的动能写成下面的形式

$$T_r = \frac{J^2}{2I} \tag{38e}$$

这里我们用关系式(38d)从表达式(38b)中消去了角速度 ω_a．

39 我们可以猜想我们在分子中遇到的角动量将典型地为 $\hbar$ 的数量级．由此得到，与转动激发态相联系的典型的能量将是下面的数量级

$$T_r \sim \frac{\hbar^2}{2I} \tag{39a}$$

用 ω_r 表示相应的频率,我们可以写出

$$\omega_r = \frac{T_r}{\hbar} \sim \frac{\hbar}{2I} \tag{39b}$$

根据(38d),由 $J=I\omega_a$ 给出角动量,因为我们假设 $J\sim\hbar$,即可得出 $\omega_a \sim \frac{\hbar}{I}$. 这样,角速度 ω_a 和由(39b)定义的特征转动频率 ω_r 就是同数量级的,这正和我们在经典模型基础上所期望的一样.

哑铃分子的完整的量子力学理论导出了一个关于能级的十分简单的公式. 每一个转动态都由一个非负整数的角动量量子数 j 所表征,而态的能量则由下式给出

$$E_j = \frac{j(j+1)\hbar^2}{2I} \tag{39c}$$

这里 $j=0, 1, 2, 3, \cdots$. 虽然我们在本书中将不去推导这个公式,但作者觉得无论如何提一下总是值得的.

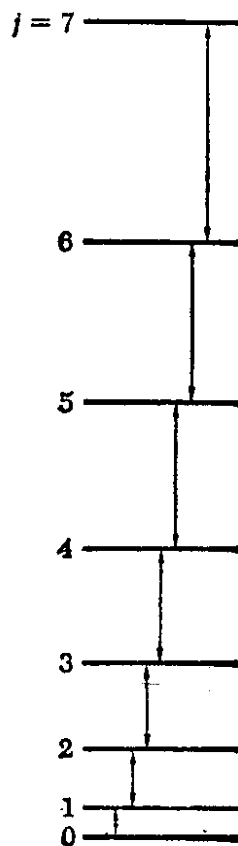


图 39*A* 谱项图示出双原子分子(把分子作为一个刚性哑铃来处理)的前八个转动能级. 按照式(39c),角动量 j 的状态的能量 E_j 由 $E_j=Bj(j+1)$ 给出,其中 $B=\hbar^2/(2I)$ 是分子的**转动常数**. 竖直的箭头表示 j 变化一个单位的电偶极子跃迁.

表 39B 一些双原子分子的转动常数 B_e

分　子	B_e (兆周/秒)	r (埃)
BrF	10700	1.76
KCl	3800	2.79
KBr	2400	2.94
$C^{12}O^{16}$	57900	1.13
OH	566000	0.97
NO	51100	1.15

常数 B(见图 39*A*)在这里用相应的频率 $B_e = B/h = h/(8\pi^2 I)$ 以兆周每秒为单位来表示. 在第三列中给出了核间距离 r.

40 在任何一个分子中核之间的距离约为玻尔半径a_0. 因此我们估计转动惯量为$I \sim Ma_0^2$, 假使我们将这个I的表达式代入(39b)中,我们得到

$$\omega_r \sim \frac{\hbar}{2Ma_0^2} \tag{40a}$$

用特征电子频率$\omega_e = \alpha^2(mc^2/\hbar)$来重写这个估计是有教益的. 因为玻尔半径由$a_0 = \alpha^{-1}(\hbar/mc)$给出, 我们可以把(40a)写成

$$\omega_r \sim \omega_e\left(\frac{m}{M}\right) \tag{40b}$$

作为数量级上的估计. (当然, 2这个因子, 在这样的估计中是不重要的.)

让我们把特征转动频率和我们在第35节中计算过的典型振动频率作一比较. 结合估计式(35e)和(40b), 我们可以写出

$$\omega_e : \omega_v : \omega_r \sim 1 : \sqrt{m/M} : (m/M) \tag{40c}$$

这里ω_e是"典型的"电子跃迁频率, ω_v是"典型的"振动跃迁频率而ω_r是"典型的"转动跃迁频率. 正如我们所看到的, 转动跃迁频率比电子和振动频率两者都要小得多. 它们处在远红外(微波)区域.

41 全面解释分子发射的十分复杂的光学带光谱的关键思想就是每一个分子都有三种不同的激发: 由电子频率ω_e表征的电子激发,由频率ω_v表征的振动激发和由频率ω_r表征的转动激发. 假使我们使情况过分简单化我们就能想象对应于三种不同的激发我们有三个能量体系. 这样, 一个分子的定态能量就是三项之和: 一个电子项,一个振动项和一个转动项. 在作出各种可能的能级之间的跃迁时,分子就发射或吸收光子.

在一个光学跃迁中分子的电子态(组态)变化了，并且一般讲在此同时振动和转动态也变化．所以可能的跃迁频率的数目是很大的，其光谱就表现为由间隔极小的线条组成的带．(作为一个例子，参看第三章图 6*B*.)

要单独研究振动和转动光谱，即研究分子的电子态不发生变化的跃迁，是可能的．在第二次世界大战之后，对于这一研究引入了一些新的方法，并建立了微波波谱学作为频谱学的一个分支以补充旧的光谱学分支．

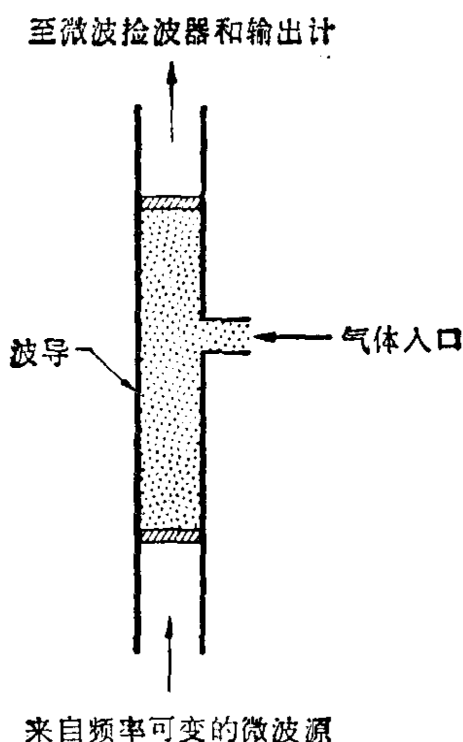


图 41*A* 一个可以在微波波谱学中使用的装置的很概略的图．要研究的分子以气体的形式充入一段波导中．辐射(在微波范围内)通过波导，而传输量由检波器和输出计测出．在分子的谐振频率上气体吸收微波辐射，测量出作为频率的函数的吸收就可决定谐振频率的位置．

所谓“微波区”，即波长范围大致在 1 毫米到 1 米之间的区域．

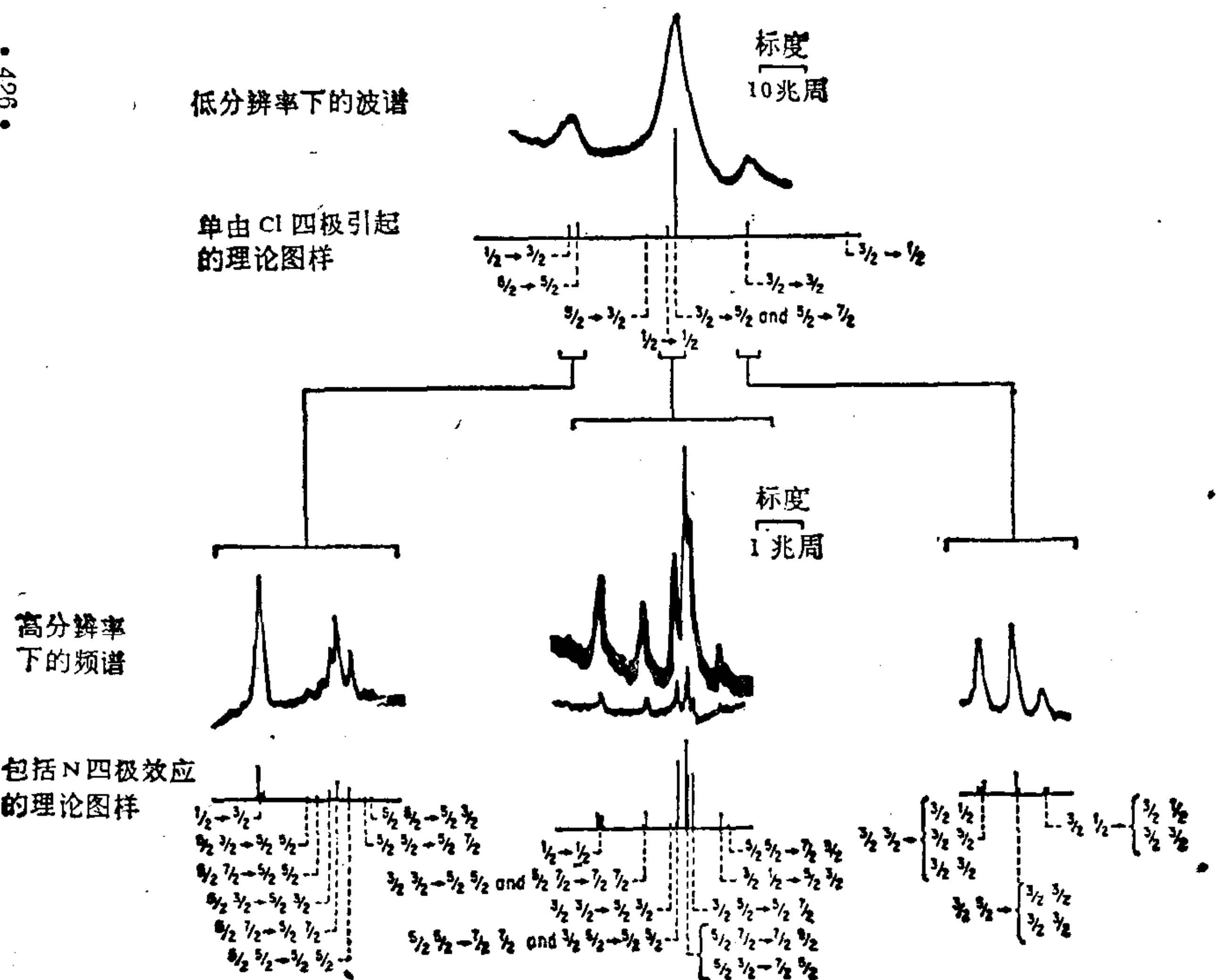


图 41B 在低的和高的分辨率下的微波波谱显示了在三原子分子 $Cl^{35}C^{12}N^{14}$ 中的 $J=1$ 到 $J=2$ 的跃迁．正如我们所见，此微波跃迁“线”呈现出一个精细结构：由一些间距很近的分量所组成．中间峰的频率是 2383.30 兆周/秒．锯齿状的曲线表示真正所测量到的：微波功率的吸收作为频率的函数．

下面的谱图给出了一个在微波波谱学中可以获得的高精度下的优良图象．还要注意到这一切可以在理论上说明得多么好．

此图出现在 C. H. Townes and A.L. Schawlow, *Microwave Spectroscopy*. (McGraw-Hill Book Co., New-York, 1955)．一书第 171 页上．也可以参看 C. H. Townes, A. N. Holden and F. R. Merrit, “Microwave Spectra of some Linear XYZ Molecules,” *Physical Review* **74**, 1113 (1948)．

三、类氢体系

42 现在让我们来考虑一个三维问题，即寻求氢原子能级的问题．在本课程中我们将不真正解出此问题，但考虑它的某些方面将是有启发性的．

让我们实际上考虑一个多少是更一般的问题．一个质量为m电荷为$-e$的粒子在由核电荷$+eZ$所产生的静电势中运动．我们将设想核是固定在原点不动的．实际上只有核是无限重时才固定不动的．然而，如果核质量M对“电子”质量m之比M/m很大时，在一级近似下，我们可以，把核当作是无限重的．

这样，对于我们的问题，与时间无关的薛定谔方程的形式就是

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\varphi(\mathbf{x})-\frac{e^2Z}{x}\varphi(\mathbf{x})=E\varphi(\mathbf{x}) \qquad (42a)$$

其中$x=|\mathbf{x}|$．

43 让我们用下式引入新的独立变量$\mathbf{y}$

$$\mathbf{x}=\frac{\hbar}{mc\alpha Z}\mathbf{y},\quad 其中\ \alpha=\frac{e^2}{\hbar c} \qquad (43a)$$

让我们用下式还引入一个新的“能量参数”λ，

$$E=(\alpha Z)^2mc^2\lambda \qquad (43b)$$

并且定义波函数$f(\mathbf{y})$为

$$\varphi(\mathbf{x})=f(\mathbf{y}) \qquad (43c)$$

用我们的新的变量和参数来重写微分方程(42a)我们得到

$$-\frac{1}{2}\nabla_y^2 f(\mathbf{y})-\frac{1}{y}f(\mathbf{y})=\lambda f(\mathbf{y}) \qquad (43d)$$

其中∇_y^2是关于变量$\mathbf{y}$的拉普拉斯微分算符．

方程(43d)是薛定谔方程(42a)的"无量纲的形式". 它是无量纲的意思是：物理常数 m, e, $\hbar$, c 和 Z 都不再在其中出现. 假使我们能解出(43d)，我们就可以用式(43a)到(43c)来重新引入旧的变量，所以很清楚两个方程式(43d)和(42a)是完全等价的.

44 这样我们就面对求解方程(43d)的纯粹数学问题. 我们将不去解这个问题，而只给出其结果如下[1]:

I. 薛定谔方程(43d)只有当参数 λ 的形式是

$$\lambda_n = -\frac{1}{2n^2} \tag{44a}$$

时才有平方可积的解，其中 n 是任意的正整数. 这个整数称为类氢原子的主量子数.（不要与我们在讨论量子力学的振子时引入的量子数 n 相混淆.）

II. 连续区从 $\lambda=0$ 处开始. 从而，按照(43b)式，在能量 $E=0$ 之上，原子就电离.

III. 对任意给定的 n 值，以及 $\lambda=\lambda_n$，微分方程(43d)就有 n^2 个线性独立解. 这些解可以借助于一个量子数 l 来分类，量子数 l 是描写波函数的空间对称性的. 例如，所有 $l=0$ 的解是球对称的. 量子数 l 分布在 0 到 $(n-1)$ 的范围内，对于每一对 (n, l) 方程有 $(2l+1)$ 个线性独立解，分别对应于不同的原子取向. 量子数 l 也可有物理解释：它是原子角动量的量度，所以这就称为轨道角动量量子数[2].

45 鉴于这些数学事实，现在我们可以断定，原子(在其非电离态)可具有的能级由下式给出

---

1) 关于氢问题的解当然在每一个高级或中级的量子力学书中都有推导. 这首先是由薛定谔在他的第一篇关于量子力学的论文："Quantisierung als Eigenwertproblem", *Annalen der Physik* **79**, 361(1926)中给出。

2) 应将此与第三章第 30～31 节及第 54 节作比较。

$$E_n = -\frac{1}{2}(\alpha Z)^2 mc^2\left(\frac{1}{n^2}\right) \tag{45a}$$

为了满足读者的好奇心，我们打算引证薛定谔方程(42a)的一个明显形式的解，即基态的波函数. 在这个情况下我们有$n=1$，因而$l=0$，这意味着波函数是球对称的. 这个波函数的明显表达式为：

$$\varphi_{10}(\mathbf{x}) = \sqrt{\frac{Z^3}{\pi a_0^3}}\exp\left(-\frac{xZ}{a_0}\right) \tag{45b}$$

其中 $a_0=\hbar/(mc\alpha)$.

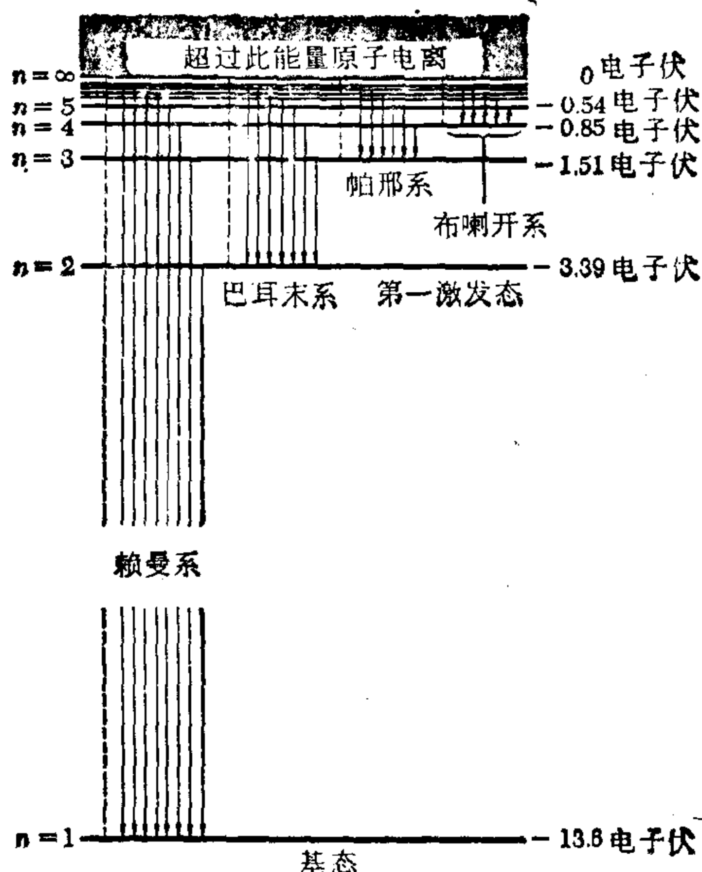


图 45A 氢原子的谱项图. 主量子数为n的能量E_n的一个很好的近似由$E_n=-R_H/n^2$给出，其中$R_H=(1+m/M_p)^{-1}R_\infty=13.5976$电子伏.

竖线表示可能的电偶极子跃迁. 可把这些跃迁整理成四个系列，均由早期的光谱工作者的名字命名. 赖曼线都处在紫外范围. 巴耳末系处在可见光范围内. 对可见的氢原子光谱的图象和一些巴耳末系的波长见第三章图1B.

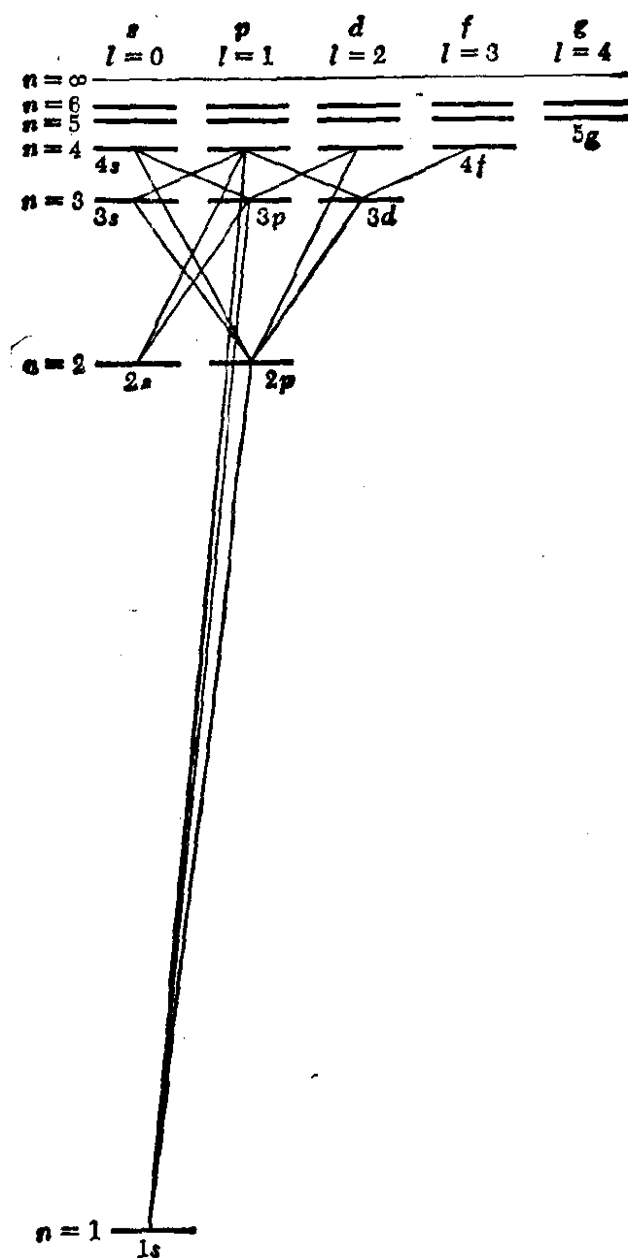


图 45B 一个类氢原子的谱项图．能级按不同的轨道角动量量子数 l 而排成列．示出了所有的主量子数为 4 或更小的能级之间的电偶极子跃迁．这些跃迁中 l 必须变化 1 个单位．注意 $2s$ 态不能由于电偶极子跃迁而衰减；该能级是亚稳的．

应将上面的谱项图与第三章图 28A 和 32A 中的碱金属谱项图比较．其间有很多相似之处．

读者可能愿意自己去验证一下波函数$\varphi_{10}(\mathbf{x})$确实满足方程(42a)，并且是归一化的，其意义是波函数的平方对整个空间的积分等于1.

46 到目前为止，我们的讨论一直都假定核固定在原点．我们可以很容易地把我们的讨论推广到核也运动的情况．令核的质量为M，并令电子的质量为m．则核-电子体系的折合质量μ根据我们在第36节中的讨论由下式给出

$$\mu=\frac{mM}{m+M}=m\left(1+\frac{m}{M}\right)^{-1} \tag{46a}$$

两个粒子在由其距离决定的势所描述的力的作用下运动，在其质心体系中讨论它们的运动的问题就完全等效于讨论带有折合质量的单个(虚构的)粒子的运动．这个粒子，在一个固定的力场中运动，力场就由原来作为粒子间距的势函数来描述．为了计入核的运动，我们就应该在所有的公式中用折合质量μ来替换质量m．体系的能级由下式给出：

$$E_n=-\frac{1}{2}(\alpha Z)^2\mu c^2\left(\frac{1}{n^2}\right) \tag{46b}$$

我们也可把它写成

$$E_n=-\left(\frac{\mu}{m}\right)Z^2R_\infty\left(\frac{1}{n^2}\right) \tag{46c}$$

其中R_∞是里德伯常数

$$R_\infty=\frac{1}{2}\alpha^2mc^2\cong 13.6\text{ 电子伏} \tag{46d}$$

我们应立即注意到在氢原子(对此$m/M\cong 1/1836$)的情况下，折合质量和电子质量很相近．正如我们可以从公式(46a)中看到的，其差别约为二千分之一．

让我们还注意到氘原子的折合质量是与氢原子的折合质量不同的，由于这个原因氘的光谱和氢的光谱稍为有一点差别．(见第二章的问题7.)很容易从光谱上观察到这个差别．

47 我们的公式(46c)描述了一般的"类氢体系"的能级，所谓类氢体系，我们指的是两个带相反电荷的粒子的束缚体系，只要其束缚是仅由两粒子间的库仑引力引起的．在(46c)中，令 $Z=2$，我们得到一次电离的氦的能级，而令 $Z=3$，我们就得到二次电离的锂的能级．由方程(46a)得出和电子质量十分接近的正确的折合质量，其中 M 代替氦核或者锂核的质量．

原子中的一个电子被一个 μ 介子代替时，这种"原子"就称为 μ 介子的原子．这是当一个负的 μ 介子在大块物质中慢下来而被核的库仑场俘获时形成的．首先让我们指出，一个"原子"的玻尔半径是和"电子"的质量成反比的．这就意味着一个 μ 介子的原子应该比一个普通的原子大约小200倍，因为 μ 介子质量约为200个电子质量．现在假定一个 μ 介子被，比如说，一个铝原子所俘获．通过发射电磁辐射，体系很快地进入到 μ 介子和铝核非常靠拢的状态：即 μ 介子的波包要比电子的波包更为集中在核周围．这样，μ 介子和铝核就在电子云里边构成一个小的 μ 介子的原子，很清楚，这个 μ 介子的原子是一个类氢体系．

在实验上，通过观察 μ 介子的原子所发射的电磁辐射，已经证实这些"原子"确实是以上述方式形成的[1]．考虑到(46b)(在此情况下的折合质量和 μ 介子的质量相近)，可以看出这个辐射总是处在X光区内．

第五章中有一个小标题是："只有一个普朗克常数．"这里我们注意到，实验证实了关于 μ 介子的原子的能级的理论预言是德布罗意关系的普适性的一个很好的证据．

48 让我们把对类氢"原子"的讨论概括如下：体系是由两个粒子组成，一个的电荷是 $-e$ 另一个的电荷是 $+eZ$．不必去

---

1) V. L. Fitch 和 J. Rainwater, "Studies of X-rays from Mu-Mesonic Atoms," *The Physical Review* **92**, 789(1953).

求出描写这个体系的两粒子薛定谔方程的显式解(我们甚至没有把它写出来),我们能够断定它的分立的能级由下式给出

$$E_n=(\alpha Z)^2(\mu c^2)\lambda_n \tag{48a}$$

其中 μ 是折合质量,α 是精细结构常数,而无量纲的 λ_n 则是由无量纲的单粒子薛定谔方程(43d)所定义的本征值. 求 λ_n 纯粹是一个数学问题,我们把它留给以后的课程,虽然我们已经揭示了这些数实际上由 $\lambda_n=-1/(2n^2)$ 给出.

换言之:假使我们知道氢光谱,我们也就知道氘,单电离的氦,双电离的锂的光谱,以及所有的 μ 介子的原子(一个 μ 介子被任意一个核的静电场所束缚)的光谱. 之所以如此是因为我们能够找出能级是怎样地必须取决于有关物理参量,诸如电荷数 Z,两个粒子的质量等. 我们的讨论说明了简单的量纲论证的威力.

四、提高课题:薛定谔理论中位置变量和动量变量[1]

49 现在让我们试着在简单的薛定谔理论中寻求在量子力学中起着经典力学的位置和动量变量作用的数学对象.

令 $\psi(x, t)$ 为归一化的薛定谔波函数. 在本节和下节中我们将考虑某一固定的瞬时 t 的波函数;因此为简短起见,我们可以省去时间变量而写成 $\psi(x)$.

由于 $|\psi(x)|^2$ 是一个几率密度,它规定了从物理上可观察得到 x 的几率分布,x 和 x^2 的平均值必须由下式给出

$$\mathrm{Av}(x)=\bar{x}=\langle\psi|x|\psi\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}dx\,x|\psi(x)|^2 \tag{49a}$$

$$\mathrm{Av}(x^2)=\langle\psi|x^2|\psi\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}dx\,x^2|\psi(x)|^2 \tag{49b}$$

1) 初读时可略去.

记号 $<\psi|x|\psi>$ 在量子力学中用得很普遍，读作"对于状态 ψ，x 的期待值."

现在假使 $\bar{x}$ 表示 x 的平均值，我们定义 x 的不确定度，或 x 的方均根偏差，为

$$\Delta x=\sqrt{\mathrm{Av}[(x-\bar{x})^2]} \tag{49c}$$

或

$$\begin{aligned}(\Delta x)^2&=\int_{-\infty}^{\infty}dx(x-\bar{x})^2|\psi(x)|^2\\&=\mathrm{Av}(x^2)-2\bar{x}\mathrm{Av}(x)+\bar{x}^2\end{aligned} \tag{49d}$$

据此就得到

$$(\Delta x)^2=\mathrm{Av}[(x-\bar{x})^2]=\mathrm{Av}(x^2)-[\mathrm{Av}(x)]^2 \tag{49e}$$

我们指出，波函数 $\psi(x)$ 在平均位置 $\bar{x}$ 处越是集中则 Δx 越是小. 位置是精确地知道的状态，即 $\Delta x=0$ 的状态，在物理上是不能实现的.

用类似于给出 x 和 x^2 平均值的公式(49a)和(49b)，就能计算出 x 的任何函数的平均值. 具体讲，势能的平均值为：

$$\begin{aligned}\mathrm{Av}(E_{\mathrm{pot}})&=\mathrm{Av}(V(x))=<\psi|V(x)|\psi>\\&=\int_{-\infty}^{\infty}dxV(x)|\psi(x)|^2\end{aligned} \tag{49f}$$

50 让我们很仔细地考虑上述内容的真实含义. 薛定谔波函数的几率解释迫使我们如方程(49a)那样去定义位置变量 x 的平均值. 这样，当给出了描述粒子的任何特殊状态的波函数以后，这个方程右边的积分使我们能求出量子力学的位置变量 x 平均值的数值. 但是，"量子力学变量 x 本身"的数值是什么呢？回答是一个量子力学变量是不会有一个数值的：它只能由一个可对任何给定的波函数计算其平均值的过程来定义.

位置变量 x 在薛定谔理论中是一个特别简单的变量，而

对于这个变量来讲，量子力学的变量是通过它们的平均值(对所有状态)来定义的这个基本原理的全部含义并不是直接显而易见的．符号 x 也作为一个独立变量在波函数中出现，所以定义(49a)可能并不使我们感到特别深奥．然而，考虑一下量子力学的动量变量(我们将用 p 来表示)．符号 p 并不“出现”在波函数中，由于这一点，我们首先要了解是否真正“存在”一个动量变量．为了解决这个问题，我们将通过对任一个可以对任何已知状态算出 p 的平均值的明确规定来定义量子力学动量变量 p．因此，真正的问题是我们能否用一种物理上合理的方法来定义平均动量．

51 为了使我们能适应上面的分析，首先来考虑一个归一化的波函数，这个波函数的形式在一个很大的区间内为 $\psi(x)=C\exp(ix\bar{p}'/\hbar)$．在这个区间外就趋向于零．对于这样一个波，平均动量应与 $\bar{p}'$ 十分接近，我们可以写出 $\mathrm{Av}(p)\cong\bar{p}'$．在上面提到的区间内，我们有

$$-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\psi(x)=\bar{p}'\psi(x) \tag{51a}$$

由于波函数是归一化的，我们有

$$\bar{p}'\cong\int_{-\infty}^{\infty}dx\,\psi^*(x)\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)\psi(x) \tag{51b}$$

在这里我们曾假设对积分的大部分贡献来自(51a)能成立的区域．于是，对于所考虑的特殊形式的波函数，我们通过计算积分(51b)就可以求得平均动量．现在，我们将假设对于所有(归一化的)波函数，这个积分正确地给出了平均动量．因此，我们假设：对于每一个归一化的薛定谔波函数 $\psi(x)$，

$$\begin{aligned}\mathrm{Av}(p)&=\langle\psi|p|\psi\rangle\\&=\int_{-\infty}^{\infty}dx\,\psi^*(x)\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)\psi(x)\end{aligned} \tag{51c}$$

其意义就是，在薛定谔理论中，动量变量 p 由一个微分算符来

表示．这就是在方程(51c)的积分中作用在位于它右边的波函数上的那个算符．换言之

$$p=-i\hbar\frac{\partial}{\partial x} \tag{51d}$$

52 因此，动量变量的平方由下列算符表示

$$p^2=-\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} \tag{52a}$$

动量平方的平均值则由下式给出

$$\begin{aligned}\mathrm{Av}(p^2)&=\langle\psi|p^2|\psi\rangle\\&=\int_{-\infty}^{\infty}dx\psi^*(x)\left(-\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\psi(x)\end{aligned} \tag{52b}$$

为了完全与公式(49c)到(49e)相似，我们用下列方程定义 p 的不确定度 Δp

$$\Delta p=\sqrt{\mathrm{Av}[(p-\bar{p})^2]} \tag{52c}$$

$$(\Delta p^2)=\mathrm{Av}[(p-\bar{p})^2]=\mathrm{Av}(p^2)-[\mathrm{Av}(p)]^2 \tag{52d}$$

其中 $\bar{p}=\mathrm{Av}(p)$.

注意导致我们在式(51c)中定义平均动量的同样论证用到如在公式(52b)中那样的 p^2 的平均值的定义上了．

53 如果现在我们察看一下表示式(49a)，(49b)，(49f)，(51c)和(52b)，我们就发现一个共同的因素：一个量子力学变量 Q 的平均值是由下列形式的表示式来给出的

$$\mathrm{Av}(Q)=\langle\psi|Q|\psi\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}dx\psi^*(x)Q\psi(x) \tag{53a}$$

这里 Q 或者是作用在处于其右边的波函数上的一个微分算符，或者就是 x 或 x^2 或其它的 x 的函数．事实上，这就是(在薛定谔理论中)定义量子力学变量的普遍方式：由诸如式(53a)的右边那样的表示式给出变量 Q 的平均，其中 Q 是一个作用在位于其右边的波函数上的一个适当的线性算符．(对于位置变量，线性算符就是"乘以 x".)此外：由在积分中用 Q^2

代替 Q 来得到 Q^2 的平均值，其中 $Q^2\psi(x)$ 就是我们让 Q 作用在 $\psi(x)$ 上二次后所得到的东西.

54 我们通过一些进一步的例子来说明这些思想. 令粒子的质量为 m. 于是粒子的动能 E_{kin} 就由微分算符

$$E_{\text{kin}}=\frac{p^2}{2m}=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} \tag{54a}$$

表示.

用算符 H 来描述粒子的总能量，它就是描述动能和势能的算符之和. 这样，在薛定谔理论中能量算符 H 就是一个微分算符

$$H=\frac{p^2}{2m}+V(x)=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+V(x) \tag{54b}$$

和我们在本章第 10 节中所讨论的一致.

55 读者应注意到：直至 51 节，我们对动量在薛定谔理论中的意义是什么，一直是模糊的. 只要我们涉及形式为 $\exp(ixp/\hbar)$ 的波，很清楚，出现在指数中的 p 就是动量. 然而，我们必须对所有的（归一化的）薛定谔波函数普遍地定义动量，这正是我们通过关系式(51c)和(51d)所完成的.

我们也许想知道动量是否可以用另一种方式来定义. 关于这一点的仔细考察表明，如果要让所选择的动量变量应该具有与我们在经典物理中的动量概念相一致的合情合理的物理解释，这一条件就要求我们的定义；从这个意义讲，它是独一无二的.

56 平均动量的定义(51c)的说理可以根据下面的厄任费斯脱定理而得到极大的加强，我们在这里将只叙述而不证明这个定理[1]：

---

1) P. Ehrenfest, "Bemerkung über die angenäherte Gültigkeit der Klassischen Mechanik innehalb der Quantenmechanik," *Zeitschrift für Physik* **45**, 455 (1927).

量子力学的变量的平均值与在相应的经典描述中的相应的经典变量满足同样的运动方程．具体讲，这个理论说：

$$\frac{d}{dt}\mathrm{Av}(x)=\frac{1}{m}\mathrm{Av}(p) \tag{56a}$$

$$\frac{d}{dt}\mathrm{Av}(p)=-\mathrm{Av}\left[\frac{dV(x)}{dx}\right] \tag{56b}$$

只要借以计算上述平均值的薛定谔波函数 $\psi(x, t)$ 满足薛定谔方程

$$H\psi(x, t)=i\hbar\frac{\partial\psi(x, t)}{\partial t} \tag{56c}$$

其中 H 是式(54b)中所给出的微分算符．

薛定谔波函数 $\psi(x, t)$是与时间 t 有关的，其与时间的关系由薛定谔方程(56c)描述．那么，x 和 p 的平均值也将与时间有关，可以证明(56a)和(56b)应该成立．证明并不特别困难．我们在求平均值的积分内进行对时间的微商．然后采用薛定谔方程(56c)及其复共轭形式消去 ψ 和 ψ^* 的时间微商．用分部积分法来整理各项，我们就得到方程(56a)和(56b)中所叙述的结果．有兴趣的读者可能会想要在这点上详细地完成这个过程；我们将不给出详细的证明，因为它们多少有一点冗长[1]．

57 我们方才叙述的理论可以毫无困难地推广到三维情况，这个理论对我们理解量子力学的概念是十分重要的．它解释了，每当我们可以忽略变量的不确定度，即不计及量子力学中典型的变量统计弥散时，经典力学就可以作为量子力学的极限情况．当然，我们希望具有这种经典的和量子力学之间的对应性；而且，对于我们的动量变量，能够证明厄任费斯脱理论适

1) 读者可以在 E. Merzbacher, Quantum Mechanics (John Wiley and Sons, New York, 1961), p. 41 和 L. I. Schiff, Quantum Mechanics, 3rd ed. (McGraw-Hill Book Co., New York, 1968), p. 28 中看到证明.

用，这一事实强有力地表明我们这样选择动量定义是正确的.

经典力学可以作为量子力学的一个极限情况这一点就是玻尔对应原理的核心. 这是一个重要的原理，因为假使量子力学要作为一个全面的描述，它就应该能够说明所有的物理现象，包括那些也能够经典地描述的现象. 历史上对应原理曾作为早期发展量子力学的响导. 我们可以讲，它对可能产生的一些新理论给予一种制约，但不应认为对应原理唯一地决定了这些新理论. 不可能对于“量子化”有任何规则，也就是说，对于如何从经典描述过渡到量子力学描述不可能有什么事先的规定. 很明显，下面的说法是没有意义的："为了寻找正确的(量子力学的)方程就必须首先叙述错误的(经典的)方程，然后就用某种魔术般的动作使错误的方程过渡到正确的方程." 倒不如说，物理学的正确方程是在已知实验事实的引导下聪明地猜测出来，然后这些猜测再受到进一步的实验考验.

58 对任一量子力学变量 Q 来讲，对一个给定的波函数计算出的量

$$\Delta Q=\sqrt{\mathrm{Av}(Q^2)-[\mathrm{Av}(Q)]^2} \tag{58a}$$

可以作为在由这个波函数所描写的状态所知道的变量 Q 的精确性的量度. 变量 Q 在而且只在 $\Delta Q=0$ 的一个特殊状态有精确值. 作为这个概念的一个例子，我们可以提一下能量变量 H 对于每一个定态来讲是精确知道的：它具有数值 E，而 E 就是这定态的能量. 对于一个非定态，我们就有 $\Delta H>0$.

一般讲，测不准关系是对同时知道两个不同变量的精确度上的限制：它对两个变量 Q' 和 Q'' 是以包含 $\Delta Q'$ 和 $\Delta Q''$ 的一个不等式形式来表示的. 现在我们有一个由方程(49e)给出的 Δx 的精确定义，和一个由方程(52d)给出 Δp 的精确定义。我们可以不太困难地证明精确的测不准关系

$$\Delta x \Delta p \geqq \frac{\hbar}{2} \tag{58b}$$

即证明不等式(58b)对所有的波函数都成立，而对于某些波函数来讲，(58b)成为一个等式. 这里我们将不去做这个证明，因为我们对为什么象(58b)这样的关系式必须成立已有了很好的定性的理解，这对本课程来讲已足够了.

问　题

1. (a) 考虑一个粒子限制在一个如图 4A 所示的无限高壁势阱中的问题. 让我们研究由表示式(6b)所给出的波函数，取 $n'=17$ 和 $n''=18$. 对下述各时间画出由方程(6c)所给出的几率密度: $t=0$; $t=t_0/4$; $t=t_0/2$; $t=3t_0/4$; 和 $t=t_0$, 这里 $t_0=(4\mathrm{ma}^2)/(35\pi\hbar)$. 这些图将暗示粒子在势壁之间来回作周期运动. 此运动的周期是 t_0.

(b) 考虑一个质量为 m 和能量 $E_c=\frac{1}{2}(E_{17}+E_{18})$ 的经典粒子在同样的势阱中的运动，并对此运动的周期和上面求出的 t_0 作比较.

(c) 此题(a)部分中的波包并没有特别好地被限制着. 事实上它扩展到阱外约超出阱的大小 1/2. 为了产生一个更加类似经典点粒子的界线分明的波包，我们需要将大量的本征函数迭加起来. 假使要位置限定得很好的话，那么动量并且从而能量就将限定得很差. 现在注意第 n 能级的能量是和 n^2 成比例的，而两个相邻能级的间距则大致上和 n 成比例. 对于一个平均能量高的波包，有可能把大量的本征函数迭加起来，从而合理地很好地限定粒子的瞬时位置，而使能量的分数弥散也是小的. 这里我们遇到了另一个过渡到经典极限的例子. 势阱中的一个波包可以表现得象一个经典粒子，只要它的平均能量比基态能量高得多.

我们不能在这里研究向经典极限过渡的全部细节，让我们仅仅研究问题中的一个方面. 令 $n'=n$, 以及 $n''=n+1$. 求出由迭加(6b)所代表的波包运动的周期，并将此周期和一个能量 E 为 $E_{n+1}\geqq E\geqq E_n$ 的经典粒子运动的周期作比较. 特别考虑当 $n\to\infty$ 时的极限.

2. 为了引起争论，作者提出下述主张(受到某些通俗读物中一些

“解释”量子力学的某些企图的启发). 由波函数 $\psi(x, t)$ 代表的定态的几率密度 $p(x)=|\psi(x, t)|^2$ 可以理解为代表一个粒子的几率密度的**时间平均**，该粒子是一个具有定态的能量并在势场中作经典运动的粒子. 换言之：粒子作经典运动，但假使我们对这个运动在一个大于其运动的自然周期的时间内作平均，那么我们就得出几率密度 $p(x)$. 对于一个作三维运动的粒子，例如氢原子中的一个电子，我们可以对表示定态的波函数的绝对值平方作出类似的解释. 粒子作经典运动，但我们的测量仪器太粗糙了，无法跟踪运动的细节，因此作为代替，我们就观察原子中电子的几率分布，而这一点可以理解为起因于长时间经典运动的平均.

读者将注意到这个主张按字义上来解释是可以立即予以驳斥的. 由此作者就退后一步. 他改而主张虽然这个波函数的平方的解释并非严格地正确，这无论如何是一个考虑粒子的量子力学运动的**很有用的**方法：倘若从近似的意义上来解释它，它就给我们真正洞察到什么正在进行着.

读者的任务是全面驳斥这些想法；幼稚的第一个主张和修改过的第二个主张两者. 这样做读者就要考虑到本章初的讨论，以及在第四和第五章中我们对“双缝实验”的讨论.

3. 方程(22a)中的积分范围是从 $-a$ 到 $+a$. 设想我们代之以从 $-\infty$ 到 $+\infty$ 的积分. 则这个积分将随时间 t 怎样变化，在 $t=0$ 时其值为多少?

4. 我们应该使自己信服，一个吸引势场并不一定导致束缚态. 要做到这一点，我们考虑图 59A 中所示的特殊例子. 令 B 为势阱的深度，并令阱宽为 a，粒子的质量为 m. 试证明当量 $G=a^2Bm/\hbar^2$ 比某个一定的数值 G_0 为小时，则没有束缚态，而当 $G>G_0$ 时，就至少有一个束缚态. 试求此常数 G_0. 注意这些考虑只能用于有一个壁为无限高的势阱. 对于一个如图 19A 所示的势阱，则无论势阱多么浅，总至少存在一个束缚态.

按照这个论点，试论证，为什么下述每一条件都是有利于发生束缚态：(a)质量 m 大. (b)势阱深. (c)势阱宽. 应对比图 19A 所示的更为一般的势阱，适当地画出图来，说明你的论点.

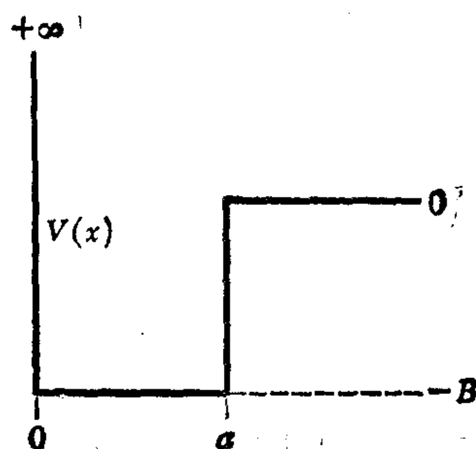


图 59A 此图是关于第 4 和第 5 题的. 在第 5 题中，实线代表根据中子-质子体系的一个过分简化的模型所得的势能. 虽然如此，这个模型对理解氘核的某些性质以及低能中子-质子散射的某些特征还是有用的. 横坐标是中子和质子之间的距离.

根据这个例子，我们可以理解为什么两个原子并不总是构成一个稳定的分子，尽管它们之间的作用力在一定的距离下可能是吸引力.（假使作用力处处是斥力，有时就是这种情形，那么自然就不会有任何束缚态.）我们可以把本题图中所示的势能作为图 30A 所示的更实际的分子势能的理想化.

5．作为氘核（这是一个中子和一个质子的束缚态）的一个简单的一维模型，让我们假设中子-质子势能就如图 59A 所示那样，其中 $a=1.85\times10^{-13}$ 厘米，而 $B=41.6$ 兆电子伏. 试求此模型中氘核的束缚能，并与实验值 2.21 兆电子伏作比较. 当然，这样好的符合并不是这个理论的胜利，因为在确定 a 和 B 的合理的数值时我们曾经用过观察到的束缚能，以及其他观察数据. 我们所考虑的势能并不是真实的，虽然它正确地复现了中子-质子相互作用的某些特征. 没有解决从"第一级原理"中求出有效势能的问题. 注：质量 m 是质子-中子体系的折合质量，$m=M_p/2$.

6．在氯化氢（HCl）的振动光谱中，可以发现谱线实际上都是间隔很小的双重线. 这些双重线中的短波谱线所具有的强度约为长波谱线强度的三倍. 对出现在（波数）约为 5600 厘米$^{-1}$ 附近的谱线，测出其二个组元的距离约为 4 厘米$^{-1}$. 试解释这个现象，并从理论上推导两个组

元之间的距离．解释双重线的两个组元的相对强度．

7．在研究和碘-氯分子中转动跃迁相关联的频率时，测量到了下列各频率(以兆周每秒表示)

ICl^{35}	6980 兆周	27,366 兆周
ICl^{37}	6684 兆周	26,181 兆周

上边一行属于含有同位素 Cl^{35} 的分子的，而下边一行则属于含有同位素 Cl^{37} 的分子．在二种分子中，碘核都是同位素 $_{53}I^{127}$．

(a) 给出了上边一行的频率，你能否解释下边一行的频率？

(b) 若测量中所用样品是用天然存在的氯来制备的，自然会观测到所有四个频率，你能否预言上行谱线的强度和下行谱线的强度之比？

(c) 考虑一个双原子分子转动能级的一般同位素效应．令 ω_r' 是核质量是 M_1' 和 M_2' 的分子的一个转动跃迁频率，并令 ω_r'' 为一个化学上等同的分子的相应的频率，但此分子是由核质量为 M_1'' 和 M_2'' 的别的同位素所构成．我们可以不用详细的分子理论再次把 ω_r' 和 ω_r'' 联系起来．求证两频率之比具有下列形式

$$\frac{\omega_r'}{\omega_r''}=\left[\frac{M_1''M_2''(M_1'+M_2')}{M_1'M_2'(M_1''+M_2'')}\right]^k$$

并决定正确的指数 k 值．应将你的表达式仔细地和表达式(37a)作比较，(37a)描述了振动光谱的同位素效应．在两种情况中，对同位素质量的依赖关系是不同的．

8．考虑原子量为 A 的原子所构成的“典型”晶体．设晶体是一个边长为 L 的立方体．试对下列频率作出数量级估计：(a)晶体的最低(振动的)谐振频率．(b)晶体的最高谐振频率．将结果写成这样的形式，即把频率和基本常数 α, $\beta=m/M_p$ 和 $\hbar/mc^2$ 以及常数 A 和 $N\sim L/a_0$ (其中 a_0 是玻尔半径，而 M_p 是质子的质量)的依赖关系清楚地表示出来．(c)举出一些特殊的数字例子，把其中的频率用兆周/秒来表示．

9．在第二章第 50 节中，我们说过原则上可能推导出这样一个晶体中的声速 c_s 和光速 c 之比的表达式，使 c_s/c 只用四个常数来表示：精细结构常数 $\alpha\cong 1/137$，电子-质子质量比 $\beta=m/M_p$ 以及晶体原子的原子量 A 和原子序数 Z．c_s/c 的精确表达式的推导是一个难以对付的问题，但我们能很容易作出数量级上的估计以说明 c_s/c 对 α, β 和 A 的主

表 59B

同位素种类	$J=1\leftarrow 0$ $v=0$ 转动频率(兆周/秒)
$C_{12}O^{16}$	115271.204 ± 0.005
$C_{13}O^{16}$	110201.370 ± 0.008
$C_{12}O^{18}$	109782.182 ± 0.008
$C_{14}O^{16}$	105871.110 ± 0.004
$C_{13}O^{18}$	104771.416 ± 0.008
$C_{12}O^{17}$	112395.276 ± 0.060[b]

表 59*B* 实验测得的具有不同同位素成分的一氧化碳分子的转动频率．表中的部分取之于 B. Roseblum, A. H. Nethercot, Jr, and C. H. Townes, "Isotopic mass ratios, magnetic moments and sign of electric dipole moment in CO," *The Physical Review* **109** 2228 (1958)．所引用的数据给出了对于微波波谱学中可以达到的精确度的一个很好的图象．

解出第 7 题的读者可能希望把他的结果去和上表给出的数据作核对．两者将符合得颇佳但却不完美．我们的理论把双原子分子作为刚体处理是过分简单化了．为了对实验数据的说明达到已知的精密度，就需要一个更复杂的理论处理．

要依赖关系．试导出这样的数量级关系式，并以铜的情况来检验你的公式．($A=63.6$, $c_s=4700$ 米/秒.)

10．(a) 对如图 30*A* 所示的势能 $U(r)$，我们指出当量子数 n 增加时，相邻能级的间距就减少．试定性地解释为什么是这样的．

(b) 画一条代表严格的谐振子势能的抛物线．在同一图上另外再画两条对原点对称的代表两个"近似简谐的"势能曲线，并且使这三者在原点(势能的最小值)的曲率半径相同．这两条曲线要这样地画，以使其中第一条的相邻能级的间距随量子数 n 而*增加*，而第二条的相邻能级的间距则随量子数 n 而*减少*．不必明确地求出各能级，但你应解释为什么这两条曲线具有所述的性质．

11．正如我们在第 47 节中所解释的，可以用一个简单的比例，从单电离的氦原子能级得出二次电离的锂原子能级，其比例因子接近于 9/4．两个离子都是类氢单电子体系．为了引起讨论，现在作者想主张应该可以用类似的比例方法从中性的氦原子能级得出单电离的锂的能级，因为两者都是双电子体系，仅仅在核电荷量值上有差别．换言之，

相应的谱线的波长之比应该是一个常数，就象在双电离的锂和单电离的氦的情况那样．然而，实验结果并非如此．中性氦和单电离锂的谱项图是十分相似的，但相互间却不能用一个简单的比例来求得．试清楚地解释为什么简单的比例论证对单电子体系是行得通的，而对双电子体系就行不通．

12．氢中 $2p$ 态的平均寿命是 0.16×10^{-8} 秒．那么在单电离的氦中 $2p$ 态的平均寿命是多少？

13．参照上题，由铝中捕获负 μ 介子所形成的 μ 介子的原子，其 $2p$ 态的平均寿命是多少？

14．试计算一个 μ 介子的铝原子由 $3s$ 态向 $2p$ 态跃迁时所发射的光子的波长．

15．试求下述原子的"玻尔半径"：(a)一个 μ 介子的铝原子．(b)一个 μ 介子的铅原子．并将这些半径和核的半径作比较．

作这样的比较是有趣的，因为如果"玻尔半径"结果是和核半径可比拟的，那么我们就明显地不可以把核当作一个没有广延的点电荷，这就意味着 μ 介子的原子的能级不能够用一个象(46b)那样的公式来精确表示．实验上已发现重的 μ 介子的原子的能级与(46b)所预期的有很大的偏离．通过系统地观测这些偏离，关于核中电荷分布以及核的大小就可作出一定的结论．

16．[1] 试根据第 56 节所指出的思路，证明该节中所提到的厄任费斯脱理论．关于另外的启发可参看第七章第 50 节．

17．[1] (a) 将厄任费斯脱理论应用于一个势函数由 $V(x)=(K/2)x^2$ 给出的谐振子的情况，并得出 $\mathrm{Av}[x(t)]$ 和 $\mathrm{Av}[p(t)]$ 所满足的两个微分方程．解此二方程并用 $\mathrm{Av}[x(0)]$ 和 $\mathrm{Av}[p(0)]$ 来表示 $\mathrm{Av}[x(t)]$．对此解和相应的经典问题的解作比较．

(b) 对一个定态 $\mathrm{Av}[x(t)]=0$，但是对一个非定态，一般讲 $\mathrm{Av}[x(t)]$ 是时间的振荡的非零的函数．记住第 27 节中的讨论，根据基于本题(a)中的结果，试论证谐振子的能级应该是等间距的，且其间距为 $\hbar\sqrt{K/m}$．注意我们在第 27 节中的讨论只告诉我们能级间距必须近似地是一个常数，虽然恰巧能级间距确实是常数并等于 $\hbar\sqrt{K/m}$．

1) 这两个问题是与提高课题有关的，初读时可略去．

18．让我们考虑一个“哑铃”式双原子分子．我们在第38—40节中讨论了这种分子的转动激发．让我们假定分子的电荷中心和它的质心并不重合．这样分子就具有一个电偶极矩，所以当它转动时，在经典的概念上来讲，我们期待它将发射电磁辐射，其频率与经典的角速度ω_0相等．

根据量子力学，分子的能级由式(39c)给出．如果分子发射或吸收电偶极子辐射时，假定量子数j就改变一个单位是合理的．试用分子的初态的角动量量子数j来表示所发射的辐射的频率，并将此结果与经典地导出的公式作比较．在j的数值很大时，我们理应接近“经典极限”．情况确实是这样吗？

第九章 基本粒子及其相互作用

一、碰撞过程和波动图景

1 在最后一章中我们将讨论当代物理学中最基本的最核心的问题的某些方面，这些问题涉及到基本粒子及其相互作用．在物理学的这个领域中，我们遇到大量的至今尚无解答的问题．我们希望有一个理论，根据这个理论我们能够“了解”为什么会存在各种基本粒子以及为什么它们会具有它们所具有的性质．换句话说，我们希望能够说出几条很基本的原理，根据这些基本原理就能够解释大量所观察到的现象．这种希望是否合理？当然没有任何逻辑根据．很可能发生的是我们注定要靠一些唯象理论，这些理论用比一组表格和图表稍微经济一点的方式总结许多实验事实，但却缺乏在基本理论中我们愿意看到的那种概括性、概念上的简单性和优美．作者感到最不愉快的事莫过于预期到这种可能性．他宁愿相信在某种意义下事情最终是简单的，并且他由于回顾物理学的历史发展过程而获得某种鼓舞．物理学作为知识的一个部分，曾以非常快的速率扩大，我们现在拥有的关于细致现象的资料的数量是惊人的．但更为惊人的是我们能够（如同我们所做的那样）用相当简单的理论来说明各种现象的细节．作者这么说并不想暗示理论物理学是一门意义不大的学科，但作者的确感到我们的理论（如现在所理解的）所依据的基本原理应具有十分显著的概念上的简单性这一特征．如前所述，至今尚无一个“简单”而综合性的基本粒子理论．本章我们将试图

给读者介绍一些已采用过的方法的思想，以及在物理学的这个领域中所遇到的一些争论和问题.

2 我们有关基本粒子的大量知识来源于一些碰撞实验. 因此在这里谈一谈有关这些实验的解释是很适当的. 在碰撞实验中，从加速器出来的一束 A 粒子冲击到(固态、液态或气态形式的) B 粒子靶上，观察每一次从一个 A 粒子与一个 B 粒子碰撞所射出的粒子. 如果在碰撞过程中不出现新粒子：A 粒子仅仅被 B 粒子所散射，则我们说碰撞是弹性的. 如果出现其它粒子，则我们就说是非弹性过程.

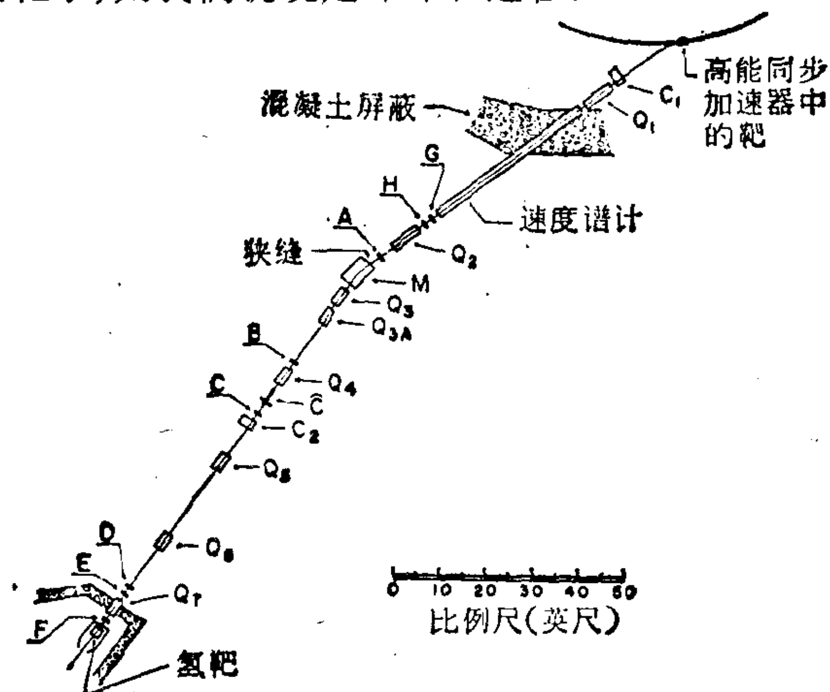


图 2*A* 测量反质子-质子的弹性和非弹性散射的各种截面实验的总设计图. 反质子从加速器(顶端右方)的靶中射出，然后被偏转和聚焦于液态氢靶上(底部左方). C_1, C_2 和 M 是偏转磁铁. Q_1—Q_7 是聚焦磁铁. A—H 是闪烁计数器. $\hat{C}$ 是切伦科夫计数器. 液态氢靶中发生的事件，通过其周围的计数器进行观察. (图中未画出这些计数器.) 相当精致地安排计数器和磁铁的目的是为了确定反质子束，以及甄别并消去靶中反质子以外的粒子所引起的事件. 测量时反质子的能量是 1.0, 1.25 和 2.0 千兆电子伏.

示意图取自 R. Armenteros et al., "Antiproton-Proton Cross Sections at 1.0, 1.25, and 2.0 Bev." *The Physical Review* **119**, 2068 (1960). 关于进一步的细节可查阅上述资料. 结果可见本章图 5*A*.

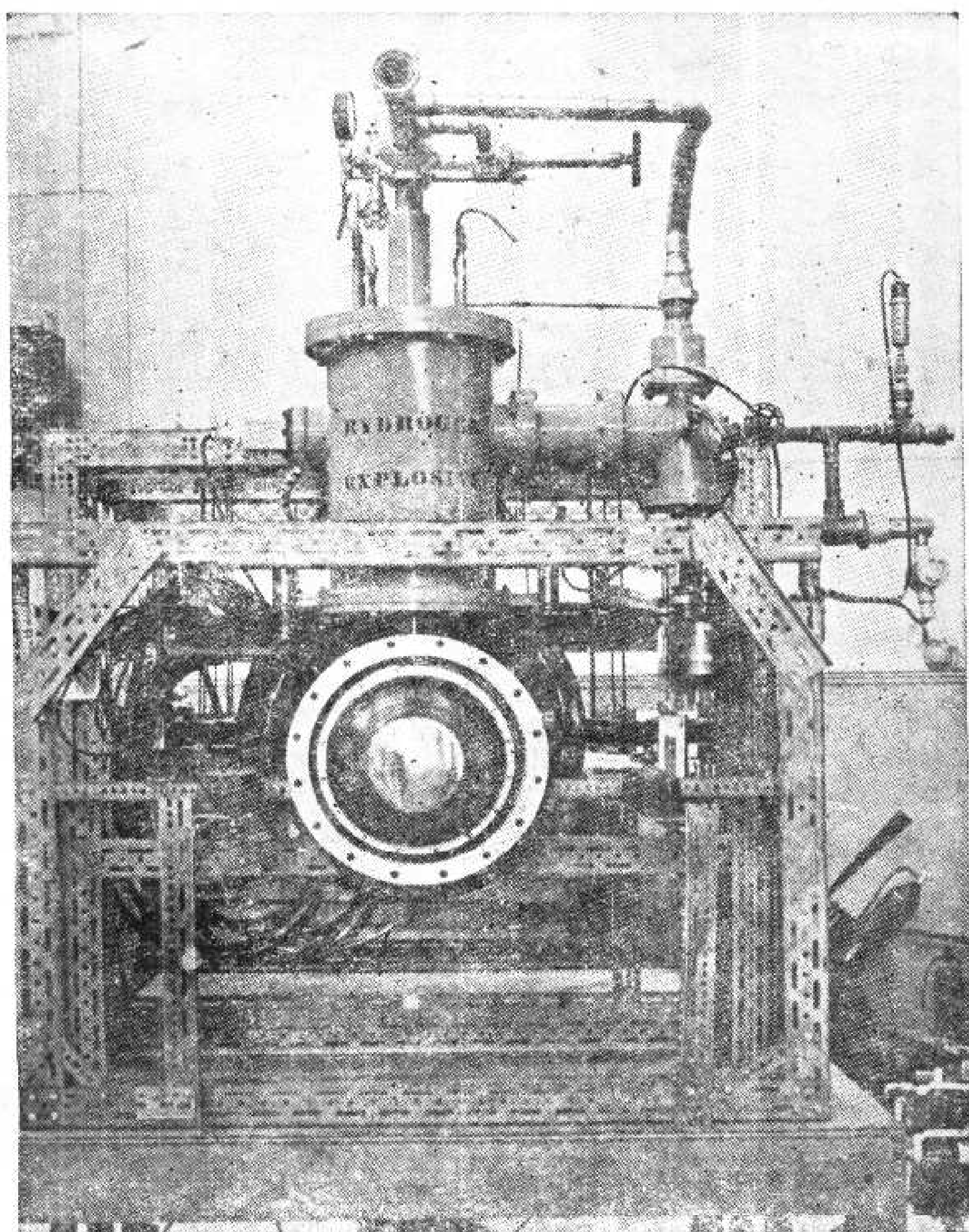


图 2*B* 图 2*A* 实验所用的液态氢靶的照片。氢放在位于装置中央部分的容器中。反质子垂直于照片平面而射入

观察结果一般表示成各种截面. 我们首先考虑其中最简单的一种,即总截面. 这个量用 σ_T 表示. 为了对 σ_T 下一个操作上的定义,我们设想靶是一个非常薄的 B 粒子杂乱分布的平面层. 设层中粒子的均匀密度(平均地讲)是单位面积中有 n 个粒子. 于是把总截面定义如下:

$$\sigma_T = \frac{P}{n} \tag{2a}$$

其中 P 表示一个垂直于层入射的 A 粒子与一个 B 粒子经历某些相互作用后离开入射束的几率. 这个定义要求该平面层是足够地薄, 以致观察到的几率 P 比 1 要小很多 (在第 4 节中将详细叙述这一点).

3 可以用下述模型来想象总截面. 对每一个 B 粒子可指定一个面积为 σ_T 的圆盘,圆盘的取向与入射的 A 粒子束垂直,并且想象它具有这种性质:每一个 A 粒子射中一个圆盘就离开射束, 而未射中者则不受影响. 再来考虑我们的单位面积有 n 个 B 粒子的薄靶层. 在面积为 F 的区域中圆盘所覆盖的总面积等于 $nF\sigma_T$. 这意味着靶层中有 $n\sigma_T$ 部分是"不透明"的,有$(1-n\sigma_T)$部分是"透明的". 因此入射束中的一个A 粒子离开入射束的几率为 $P=n\sigma_T$. 也可以照这样来解释关系式(2a),但读者应明白,不透明的圆盘仅仅存在于我们的想象之中. 截面是 A 粒子与 B 粒子相互作用趋势的非常便利的量度,但决不能认为它涉及到任何粒子的几何性质.

4 考虑将关系式(2a)推广到靶层不一定薄的情形. 令 $P(n)$ 表示 A 粒子射入投影面密度 n 均匀分布的一层 B 粒子靶层后离开入射束的几率, 那么量 $T(n)=1-P(n)$就是透过靶层的几率. 假定将一个投影面密度为 n_1 的靶层放置在另一个投影面密度为 n_2 的靶层后面, 则组合层的面密度将是 (n_1+n_2). 一个粒子穿过这两层的几率显然由下式给出

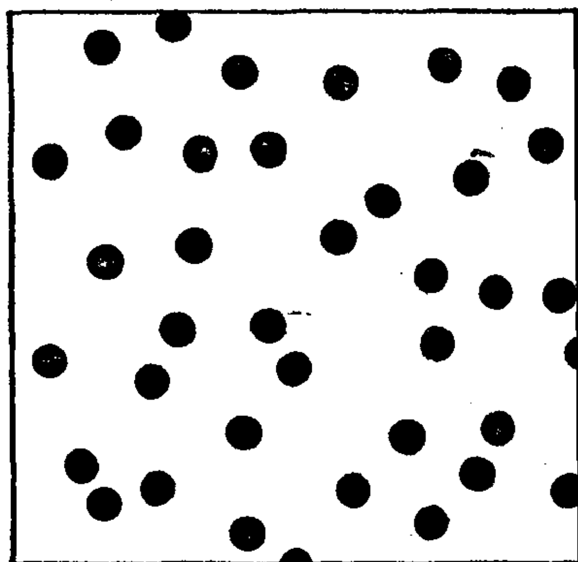


图 3A　我们可以用总截面 σ_T 来表示(靶中的)B 粒子从入射束中除去 A 粒子的有效程度．对于每一个 B 粒子有一个面积为 σ_T 的圆盘与之相联系，这样当且仅当一个 A 粒子(想象为一个点)射中此圆盘时，它才与 B 粒子发生相互作用．上图表示一很薄的 B 粒子层的这种假想圆盘．如果单位面积有 n 个 B 粒子，则单位面积中总的"阻挡"面积将是 $n\sigma_T$．从而一个 A 粒子穿过这种薄层的几率为 $(1-n\sigma_T)$．当然，不应该从字面上来理解上面的图形．B 粒子实际上并不是小圆盘也不是小圆球．

$$T(n_1+n_2)=T(n_1)T(n_2) \tag{4a}$$

这个方程对一切正实数 n_1 和 n_2 必须成立，它的通解为

$$T(n)=\exp(-Cn) \tag{4b}$$

其中 C 为实常数．这样，我们有

$$P(n)=1-\exp(-Cn) \tag{4c}$$

注意到

$$\lim_{n\to 0}\frac{P(n)}{n}=C \tag{4d}$$

若将此关系式与关系式(2a)(已假定它在 n 很小时成立)相比较，就得到 $C=\sigma_T$．从而我们有

$$P(n)=1-\exp(-n\sigma_T),\quad T(n)=\exp(-n\sigma_T) \tag{4e}$$

可见透射束的强度随靶的厚度按指数递减．实际上可以获得各种厚度的薄箔靶层．为了测量总截面我们来做一个简单的衰减测量：用计数器测定作为箔厚度函数的透射束强度的分数减少，然后用关系式(4e)计算散射截面．

5 用同样的方法，可以定义其它各种类型的截面．例如设 A 粒子能与 B 粒子起反应而产生一个 C 粒子和一个 D 粒子：



$$A+B\to C+D \tag{5a}$$

那末，由下式定义这过程的反应截面 $\sigma_{AB\to CD}$:

$$\sigma_{AB\to CD}=\sigma_T P_{AB\to CD} \tag{5b}$$

其中 $P_{AB\to CD}$ 是一个 A 粒子与靶中的一个 B 粒子相互作用而从入射束中除去并产生反应(5a)的几率．假定(5a)是唯一的反应，亦即唯一能发生的非弹性过程．但一个粒子也可受

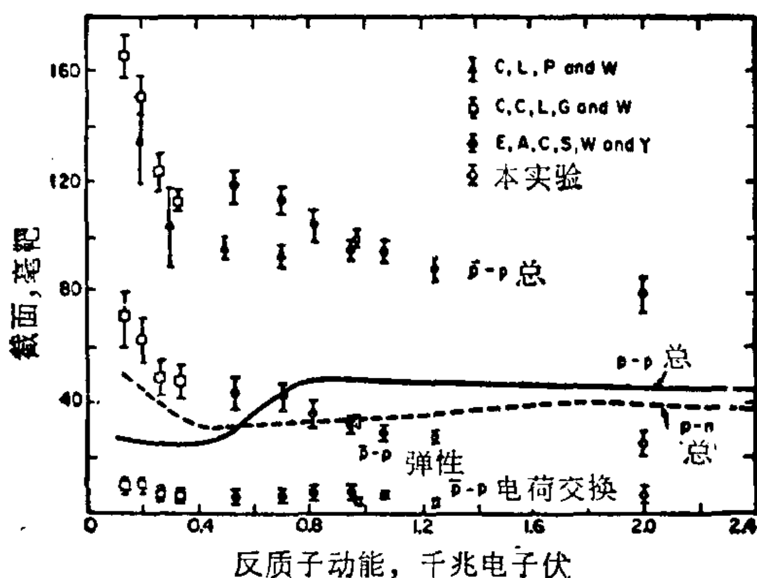


图 5A 图形表示反质子–质子截面作为反质子动能的函数。空心圆所表示的三实验点是从图 2A 所述实验获得的．图中列出了质子–质子散射截面以便进行比较。注意，反质子–质子总截面大约是质子–质子总截面的二倍．

本图取自 R. Armenteros et al., "Antiproton-Proton Cross Sections at 1.0, 1.25, and 2.0 Bev," *The Physical Review* **119**, 2068 (1960).

到弹性散射而从入射束中除去．我们定义弹性截面 σ_e 如下

$$\sigma_e=\sigma_T P_e \tag{5c}$$

其中 P_e 是从入射束中除去一个粒子的碰撞事件是弹性的几率．三种截面的关系如下

$$\sigma_T=\sigma_e+\sigma_{AB\to CD} \tag{5d}$$

因为显然我们有 $P_e+P_{AB\to CD}=1$.

6 在核物理学和基本粒子物理学中表示截面时采用靶和毫靶作为单位，其中

$$1\text{ 靶}=10^{-24}\text{ 厘米}^2,\quad 1\text{ 毫靶}=10^{-3}\text{ 靶} \tag{6a}$$

图 6*A* 表示对镉的中子总截面作为中子动能的函数．图 6*B* 表示中子与银碰撞的类似的图形．注意，这些曲线中说到的都是化学元素，因此，它们都是对天然存在的各种同位素的平均结果．

看看这些图形就会立即明白，总截面与核的“几何”性质毫不相干．例如注意截面对能量的引人注目的依赖关系．对镉来讲截面从中子能量为 0.176 电子伏处的峰值 7200 靶降至 1 电子伏处的 20 靶．银的截面曲线同样显示出对能量有强烈的依赖关系，在 0.52 电子伏处有一个非常显著的共振峰．

再考虑截面的大小．银与镉原子核的大小大体相等．根据由质量数 A 给出的核半径公式

$$r\cong A^{1/3}\times(1.2\times10^{-13}\text{ 厘米}) \tag{6b}$$

可以估计出银与镉的核半径 $r\sim5.8$ 费米(因为 $A\sim110$)，从而其相应的几何截面 πr^2 约 1.0 靶．这比图 6*A* 中的截面峰值约小七千倍．

读者还应参看本章的图 24*A* 和 24*B*．图 24*B* 表示质子对正负 π 介子的弹性散射截面．图 24*A* 主要表示的是核反应 $A^{27}+p\to Si^{28}+\gamma$ 的反应截面．注意其很多尖锐的共振峰．

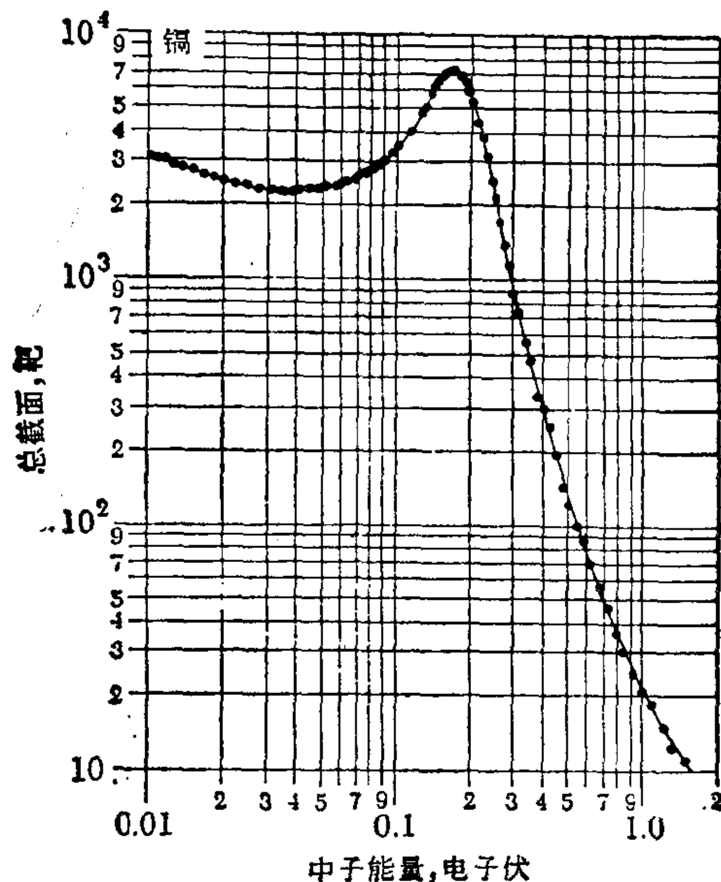


图 *6A* 曲线表示镉对中子的总截面作为中子能量的函数. 注意此曲线所指的是天然存在的镉的，从而截面是镉的各种同位素的截面的平均值. 这样的截面从基本理论的角度来看意义不大，因为基本理论关心的是个别同位素的截面. 但平均截面在工程应用中是一种有用的概念. 由于镉对低能中子的截面大，它被普遍用来控制核反应堆的反应速率.

上述曲线是 *Reviews of Modern Physics* **19**, 259(1947) 中由 H. H.Goldsmith, H. W. Ibser, and B. T. Feld 汇编的 "Neutron Cross Sections of the Elements,"中一个图形之一部分.

7 前面讨论的截面(作为能量的函数）提供某些关于基本粒子在碰撞过程中相互作用的知识. 我们如果再测量从碰撞区域出射的粒子的角分布，则可获得更加多的知识. 为简单起见,考虑入射束中 A 粒子被靶中 B 粒子弹性散射，用置于不同位置但离靶的距离为一定的计数器，测量在不同方向上散射的 A 粒子的强度. 在这一系列测量中保持入射粒子束的

强度不变. 我们用微分截面 $\sigma_\theta(E;\theta,\varphi)$ 表示测量结果. 这个量是用以说明观察方向的适当的极角 θ 和 φ 的函数. 正如我们曾明确指出的,它同时又是能量的函数.微分截面是这样定义的,当靶是一个 B 粒子面密度为 1 单位的靶层时,$\sigma_\theta(E;\theta,\varphi)d\Omega$ 等于入射的 A 粒子散射到以极角 θ 和 φ 为中心方向,大小为 $d\Omega$ 的立体角中的几率. 同一计数器离靶的距离相同而方位不同时,它的计数速率正比于微分截面.

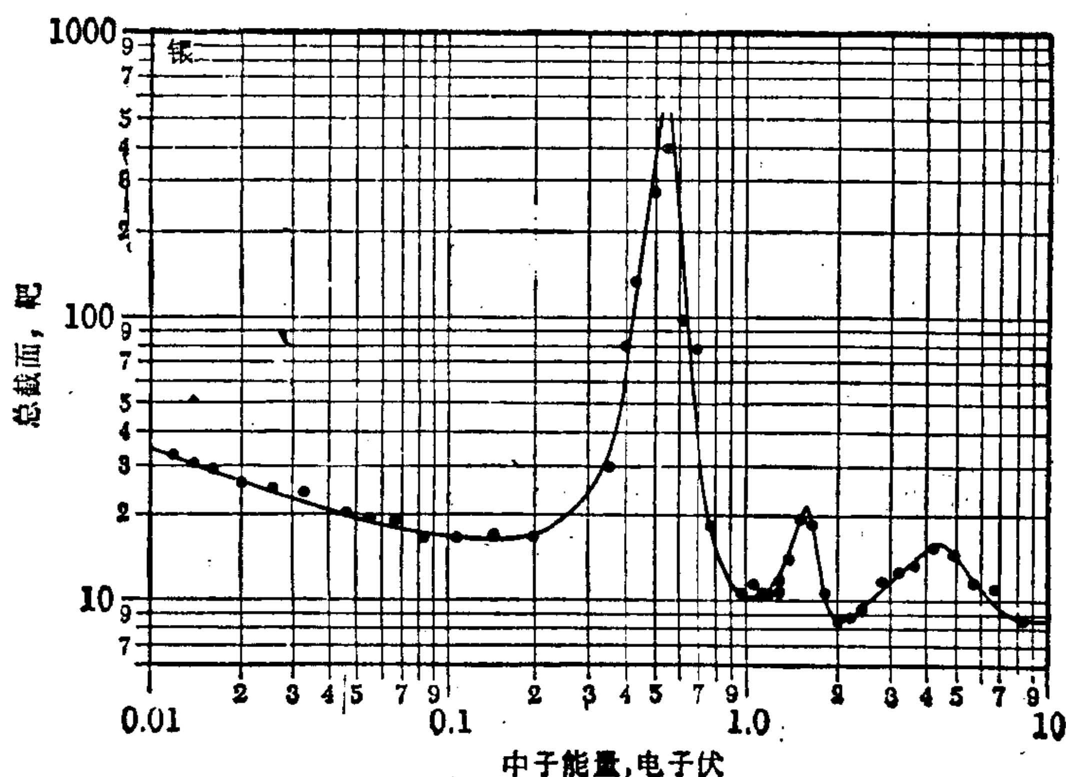


图 6B 曲线表示天然银元素对中子散射的总截面作为中子能量的函数. 注意其明显的共振峰. 从本图以及类似的图 6A 不难看出,散射截面与核的大小并无特别的关系. 银和镉的曲线很不相同, 但两者都显示随能量而剧烈地变化. 碰撞的波动理论能很好地说明观察到的截面曲线的普遍性质.

上述曲线取自 *Reviews of Modern Physics* **19**, 259(1947). 由 H. H. Goldsmith, H. W. Ibser, and B. T. Feld, 编辑的 "Neutron Cross Sections of the Elements," 一文中图形的一部分. 应查阅此论文作为该领域中早期工作的参考.

在实际的大多数散射情况中，微分截面仅依赖于能量和入射束与被散射的 A 粒子方向的夹角. 若以 θ 表示该角，则可将微分截面写成 $\sigma_e(E;\theta)$，因为它不依赖于另一个极角[1].

将微分截面对所有的方向积分就可得总弹性散射截面. 如上所述，如果微分截面不依赖于角 φ，则可得

$$\sigma_e(E)=\int_{\circ} d\Omega\sigma_e(E;\theta)=2\pi\int_0^{\pi} d\theta\sin\theta\sigma_e(E;\theta) \qquad (7a)$$

用类似的方法可以定义非弹性散射过程的微分截面.

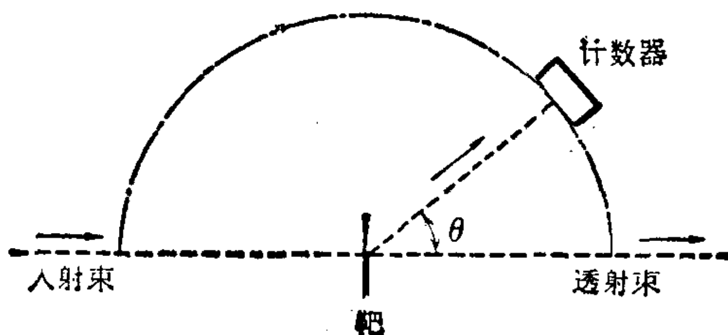


图 7.4　散射实验的概略的表示. 从加速器射出的一束粒子冲击到一个靶上. 用一计数器测定散射到各方向的粒子的相对数量. 此图表示检测散射角 θ 上的粒子. 在这类实验中可以测定散射过程的微分截面.

8 作为能量的函数的各种散射截面组成了我们从散射实验获得的原始资料. 于是我们面临着从这些资料来推知多半还不太清楚的相互作用的某些性质的问题. 或者，我们或许已经有了一个理论，那么就用此理论计算所预期的散射截面，然后将它与实验结果比较.

如前所述，我们关于基本粒子的大多数资料来自对散射实验的分析. 为此已经发展了一些特殊的数学方法. 在这里

1) 我们用的符号虽然是相当标准的，但并不完满，因为微分截面和前面讨论的总截面用的是同一符号，这两类截面仅仅以该量的符号中有无角变量来区别.

讨论这些数学方法将会离题太远．不言而喻，从散射截面寻找“核力”的问题实际上远远不是简单的，虽然在原则上是很直截了当的(在某种意义下)．

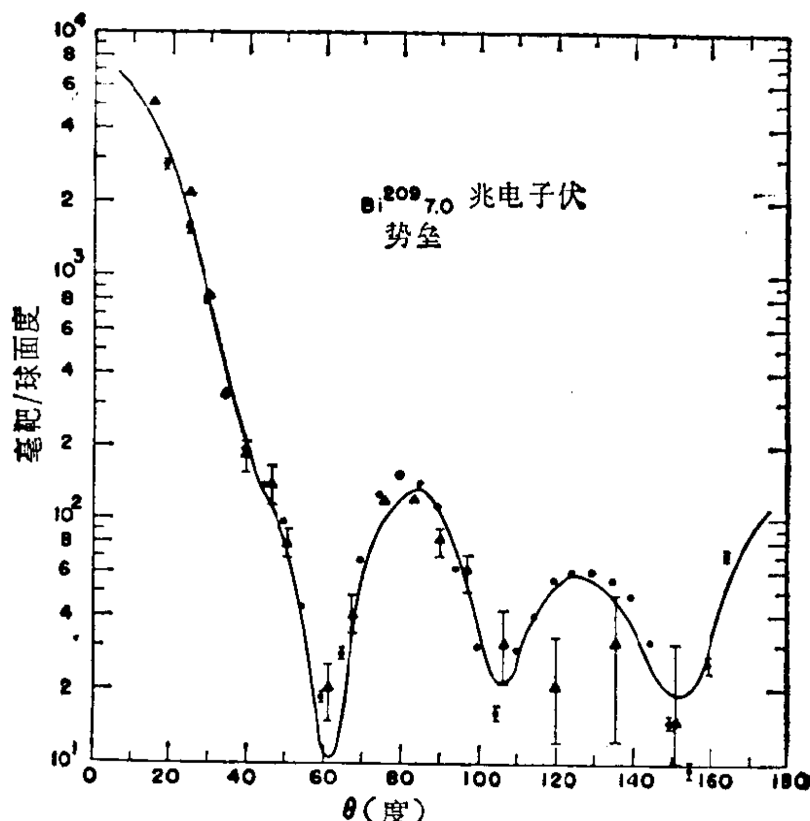


图 8A 铋同位素 Bi^{209} 对中子的弹性散射的微分截面．图形表示实验点和根据某种模型计算的理论曲线．横坐标是散射角，纵坐标是微分截面，单位是毫靶每球面度．中子的动能是 7 兆电子伏图形取自 C. D. Zafiratos, T. A. Oliphant, J. S. Levin and L. Cranberg, “Large-Angle Neutron Scattering from Lead at 7 Mev.” *Physical Review Letters* **14**, 931(1965)．

9 如果用经典理论来解释散射事件，我们就会说入射粒子在靶粒子的力场中被偏转．量子力学中认为散射就是波的衍射的一种表现．事实上，在第五章中我们正是这样讨论电子衍射的．我们曾这样解释观察到的现象，即入射电子波被晶体中的所有原子所衍射．在某些方向上衍射波形成相长干涉，这就是观察到的强度极大值的方向．这样，散射就表示德布

罗意波被障碍物也就是晶体中的原子所衍射.

现在读者应注意，我们对电子衍射的描述具有一种不应有的"不对称"的特点. 我们是说入射电子波被"障碍物"所衍射，但"障碍物"同样是物理粒子，大家知道，所有物理粒子都是波. 显然，这里随意认为某些粒子是波，而另外一些粒子是经典的"障碍物"，这是不能自圆其说的. 我们在电子衍射实验中所观察到的是入射电子波与代表晶体中的原子的波包的相互作用. 如果要前后一致就必须认为散射是波与波相互作用的结果。

在本章的后面，我们将进一步钻研这种思想. 这里请注意这种新见解不会使我们过去对电子衍射的讨论失效. 重要的是入射电子波遇到某物而与该物的相互作用导致波的衍射. 只要我们把注意力只集中于入射粒子上，入射粒子所遇到的是什么就无关紧要了，不管它是一个"经典粒子"还是一个集中的波包.

10 现在让我们试提出散射的波动理论的最简单的纲要. 考虑一种可能的最简单的情形，亦即代表一个 A 粒子的波在一个中心固定的对称力场中作弹性散射(衍射). 我们可以想象这个力场可由一势场得出，这势场随距力场中心的距离增加而迅速地趋于零. 现在的问题与第七章讨论过的势垒问题具有某些相似性. A 粒子处于势函数随位置而改变的区域中，其结果是入射的平面波将被势场所衍射.

根据上述模型可将靶中的 B 粒子用一球对称势场来代表，虽然我们知道同样也应当把 B 粒子描述为一个波. 然而事实上两粒子散射的正确的量子力学描述在数学上与我们的模型是等价的，因此我们的模型丝毫不坏. 如果仔细想一下现在所进行的工作，就会认识到我们以前已经做过了类似的工作. 在第七章中讨论 α 放射性时，我们是这样来描述的，亦

即一个"量子力学的"α 粒子在力的势场中运动．在讨论分子的振动时，我们考虑了单个粒子在近似简谐的分子势场的影响下的运动．在上述的每一种情况下，真实的问题总涉及至少两个粒子的运动，而用来代替它的模型问题则是单个粒子在势场中的运动，势场描述它与所有其它粒子的相互作用．

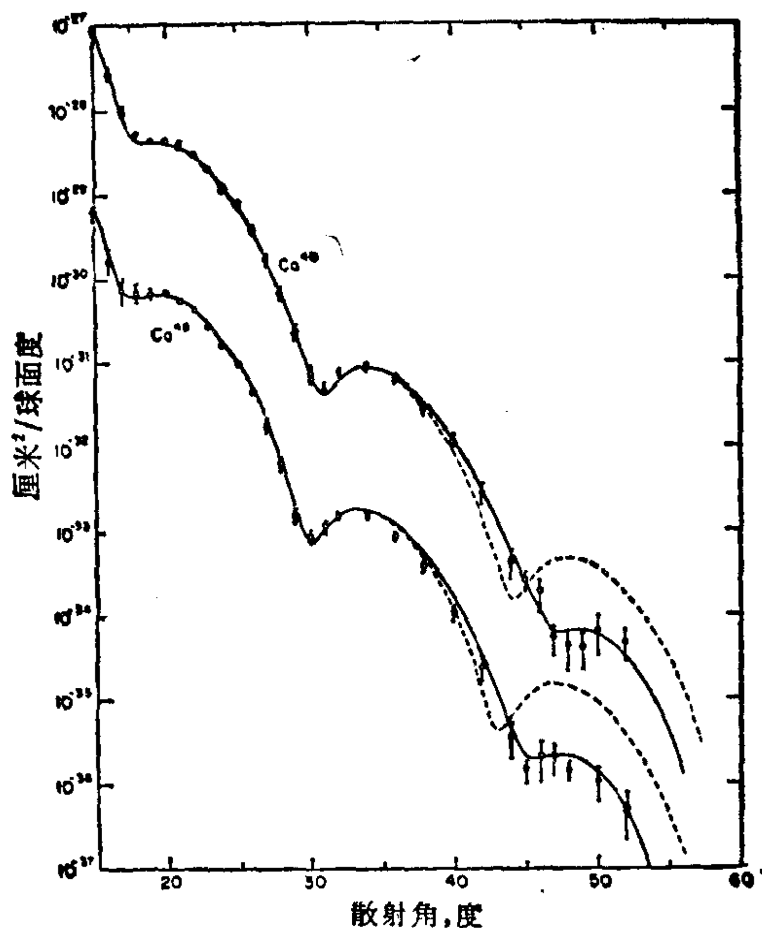


图 8B　图形表示钙元素的两种不同的同位素对电子的弹性散射的微分截面．纵坐标表示微分截面，单位是：厘米²/球面度．已将 Ca^{48} 的数据乘 10，将 Ca^{40} 的数据除以 10．（这两根曲线很相似，因而已经采用这些比例因子来将它们分开．）电子能量为 750 兆电子伏

对这些散射起作用的是电子和核的电磁相互作用，测量的目的是探索核的电荷分布．注意微分截面随散射角的变化很大（10^9 倍）

图形取自 J. B. Bellicard et al., "Scattering of 750-Mev. Electrons by Calcium Isotopes," *Physical Review Letters* **19**, 527 (1967).

11 假定有一平面波取如下形式

$$\psi_i(\mathbf{x},\ t)=C\exp(i\mathbf{x}\cdot\mathbf{p}_i-i\omega t) \tag{11a}$$

它代表一个 A 粒子入射到单个 B 粒子(在坐标原点即$\mathbf{x}=0$)上. 这里 $\mathbf{p}_i$ 是波的动量,ω 是能量[1],C 是归一化常数. 平面波将被 B 粒子所衍射. 我们来猜测描述衍射波在离原点很远处的波函数形式. 我们将论证函数

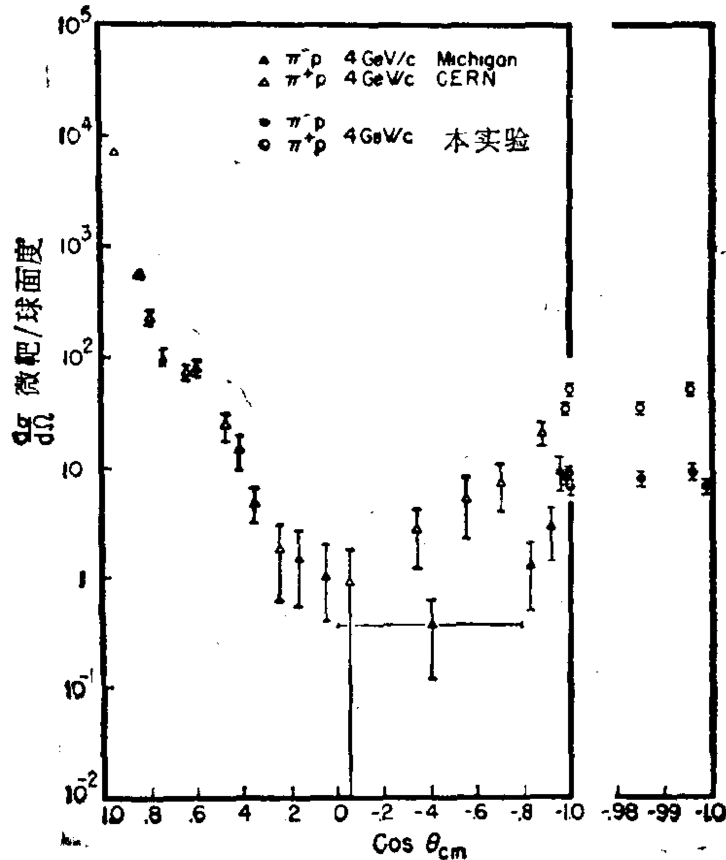


图 8C π 介子动量为 4 千兆电子伏/c 时 π 介子-质子弹性碰撞的微分截面图. 横坐标表示在质心坐标系中散射角的余弦. 纵坐标表示微分截面, 单位是微靶每球面度. 反向(亦即 $\cos\theta_{\mathrm{cm}}$ 接近于 -1)区域的散射截面表示在右方分开了的水平标尺上. 注意, 正负 π 介子的数据均标了出来;各种不同实验点的标记在图形的顶部.

图形取自 W. R. Frisken et al., "Backward Elastic Scattering of High-Energy Pions by Protons," *Physical Review Letters* **15**, 313 (1965).

---

1) 采用使 $\hbar=1$ 的单位.

$$\psi_s(\mathbf{x},\ t)\cong Cf(\theta)\frac{1}{x}\exp(ixp-i\omega t) \qquad (11b)$$

是一个合理的选择．以 x 表示离原点的距离，以 p 表示入射粒子的动量的值，亦即 $x=|\mathbf{x}|$，$p=|\mathbf{p}_i|$．θ 是位置矢量 $\mathbf{x}$（从原点到观察点）的方向与入射动量 $\mathbf{p}_i$ 的方向之间夹角，$f(\theta)$是 θ 角的某一函数．

现在研究波函数 ψ_s 的各种特点，来看它是否能代表散射波．散射波的振幅正比于入射波的振幅 C，这样，我们的猜测反映了响应是线性的这种合理的假设．散射波的频率 ω 与入射波的频率相同，这意味着 A 粒子的能量守恒，它正应如此，因为所要考虑的是在 B 粒子的固定力场中的弹性散射．

显然，因子 $\exp(ixp-i\omega t)$ 描述一向外传播的球面波．任一点的相速度都沿矢径指向离开原点的方向．一个表示被散射粒子的波显然必须具有这种性质．表示式(11b)中的因子 $1/x$ 描述散射波的振幅随距离的增加而减少．波的强度正比于波函数的绝对值的平方．散射波的强度是向外几率通量（或者说是一系列重复测量中得到的粒子通量）的量度，它必须随距离按 $1/x^2$ 减少．因此振幅必须如我们所已假设的那样按 $1/x$ 减少．

12 我们看到，物理上的简单考虑要求描述被散射波的波函数必须具有式(11b)的形式．函数 $f(\theta)$ 称为**散射振幅**．显然，它描述被散射粒子的角分布．我们如下地论证散射振幅与微分截面的关系．考虑中心位于原点并通过 $\mathbf{x}$ 的球面上包含 $\mathbf{x}$ 点的一个面元．设 dF 为面元的面积．散射粒子穿过该面积的几率 dP 必定正比于 dF 和波函数 $\psi_s(\mathbf{x},\ t)$ 的绝对值的平方的乘积，因此可写成

$$dP=k|\psi_s(\mathbf{x},\ t)|^2dF=k|C|^2|f(\theta)|^2\left(\frac{dF}{x^2}\right) \qquad (12a)$$

其中 k 为某固定的比例常数. 因为 dF/x^2 是小面积对原点所张之立体角的大小,故可写成

$$dP = k|C|^2|f(\theta)|^2 d\Omega \tag{12b}$$

注意 dP 是散射粒子从立体角 $d\Omega$ 的小锥体中射出的几率.

其次考虑由(11a)给出的入射波. 设想一个中心位于原点的单位面积的圆盘,入射粒子的动量 $\mathbf{p}_i$ 垂直于它. 入射粒子穿过该圆盘的几率必定等于

$$P_i = k|\psi_i|^2 = k|C|^2 \tag{12c}$$

其中 k 是(12a)和(12b)两式中的同一个常数.

考虑表式(12b)和(12c)我们可得如下结论, 在一系列重复散射实验(其中 A 粒子总具有相同的原始动量 $\mathbf{p}_i$)中,从立体角 $d\Omega$ 的锥体内射出的散射粒子数与入射到单位圆盘上的粒子数之比等于

$$\frac{dP}{P_i} = |f(\theta)|^2 d\Omega \tag{12d}$$

回忆第七节中对微分截面 $\sigma_e(\theta)$ 的讨论可知, 比值 $\frac{dP}{P_i}$ 正好就是微分截面与 $d\Omega$ 的乘积. 由此得到一个重要关系式

$$\sigma_e(\theta) = |f(\theta)|^2 \tag{12e}$$

这说明微分截面就是散射振幅的绝对值平方.

13 若要得到散射振幅 $f(\theta)$ 的理论表示式, 当然必须精确地求解衍射问题. 这意味着必须求解薛定谔方程或其它适用于该问题的某些方程. 对于我们的模型必须求解具有势场的薛定谔方程, 该势场是由于 B 粒子的存在而作用于 A 粒子的. 量子力学的波动方程具有无限多个解, 故还须寻找能够描述散射情况的正确的解. 我们必须加上的条件是在远离原点处波函数必须具有如下形式

$$\psi(\mathbf{x},\ t)\cong C\exp(i\mathbf{x}\cdot\mathbf{p}_i-i\omega t)+Cf(\theta)\frac{1}{x}\exp(ixp-i\omega t) \tag{13a}$$

这就是说，在远离散射中心的地方，波函数是平面"入射波"和出射的散射波的迭加．这里我们不准备求解这个问题．可以在很一般的条件下证明，对于每一选定的入射动量 $\mathbf{p}_i$，存在着波动方程的一个唯一的解答在远离原点处渐近于(13a)．因此在给定的动量和相互作用(势场)下，散射振幅被唯一地确定了．一般讲它依赖于入射动量的值 p; 如果要强调这点，则可把散射振幅写成 $f(p;\theta)$．一旦确定了散射振幅，就可以按(12e)式求出微分截面．

14 我们考虑一个重要而简单的特殊情形，就是散射振幅与散射角 θ 无关亦即 $f(\theta)=f=$常数的情形．那么微分截面将是 $\sigma_e(\theta)=|f|^2=$常数，角分布是球对称的．这种情况易发生于低能散射，也很容易定性地说明其原因．当入射波的波长与使波衍射的"物体"的大小相比为小量时，角分布势必很复杂，亦即是随 θ 而迅速变化的函数．可以认为衍射发生于整个物体上，以致于物体的每一"部分"都发送出一个衍射波，在给定的方向上，这些波根据其相对位相彼此进行相长或相消干涉．如果波长与物体相比为小量，那么观察方向的微小改变就可使相对位相有相当大的变化，从而微分截面随角 θ 而迅速变化．然而，如果波长与物体相比为大量，那么这些"几何"干涉效应就不会发生，散射振幅将是随方向而缓变的函数．在极低能的极限情况下，波长与散射物体的大小相比是非常大的，散射振幅与角度无关，散射是球对称的．

15 在 $f(\theta)=f=$常数的情况下，散射波

$$\psi_s(\mathbf{x},\ t)=\frac{Cf}{x}\exp(ixp-i\omega t) \tag{15a}$$

仅通过参数 C 依赖于入射波，C 表示入射波在原点的振幅．特别是，散射波与入射动量 $\mathbf{p}_i$ 的方向无关，这正是在散射物体远小于波长的情况下我们所预期的．

假定我们将(11a)式给出的平面波用其对 $\mathbf{p}_i$ 的所有方向的平均值来代替，也就是考虑一个新的散射问题，其中入射波的形式如下

$$\psi_{i0}(\mathbf{x},\ t)=\frac{1}{4\pi}\int_{\bigcirc} d\Omega_p C\exp(i\mathbf{x}\cdot\mathbf{p}_i-i\omega t) \qquad (15b)$$

如果选择 $\mathbf{x}$ 与 $\mathbf{p}_i$ 的夹角 θ 作为 $\mathbf{p}_i$ 的一个极角，很容易计算这个对所有方向的积分．于是可得

$$\psi_{i0}(\mathbf{x},\ t)=\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}d\theta\sin\theta C\exp(ixp\cos\theta-i\omega t)$$

$$=\frac{C}{2ixp}(\exp(ixp)-\exp(-ixp))\exp(-i\omega t) \qquad (15c)$$

若散射波不依赖于入射动量的方向，一个具有 ψ_{i0} 形式的入射波将如同(11a)的平面波一样产生相同的散射波．我们可以把波 ψ_{i0} 看作入射平面波的球对称部分．只有入射波的这一部分导致(15a)式的球对称波 ψ_s．

16 入射平面波的球对称部分 ψ_{i0} 具有一有趣的形式．察看表示式(15c)并注意到它是一个出射球面波与一个入射球面波的和．因为平面波既描述向着原点的运动又描述背离原点的运动，所以它“包含”着这两个波．两个波的振幅大小相同，这是必然的，否则向外的粒子通量与向内的粒子通量两者将不相等．由于假定是弹性碰撞(其中 A 粒子被保留下来)，所以向内和向外的粒子通量(A 粒子)必须相等．

现在考虑在 $f(\theta)=f=$常数情况下，对表示式(13a)的球面平均，这个平均由下式给出

$$\psi_0(\mathbf{x},\ t)=\psi_{i0}(\mathbf{x},\ t)+\psi_s(\mathbf{x},\ t)$$
$$=\frac{C}{2i\varkappa p}[(1+2ipf)\exp(i\varkappa p)$$
$$-\exp(-i\varkappa p)]\exp(-i\omega t) \tag{16a}$$

我们可以把上式解释为以球面波 ψ_{i0} 作为入射波时，描述散射情况的波函数的渐近形式．细看(16a)式可知，波函数 $\psi_0(\mathbf{x},\ t)$ 也具有入射部分和出射部分．若散射过程是弹性的，这两个波的振幅的绝对值必须相等，于是就导致关于散射振幅 f 的一个重要条件

$$|1+2ipf|=1 \tag{16b}$$

将方程(16b)的通解写成如下的形式是方便的

$$f=\frac{1}{2ip}(e^{2i\delta}-1) \tag{16c}$$

其中 δ 是任何实数．量 δ 称为(s 波)相移．它一般是动量大小 p 的函数．

17 我们来研究球对称散射情形的弹性截面能有多大．微分截面等于 $|f|^2$，可以在所有方向上对微分截面积分得到总弹性截面 σ_e．从而有[考虑到(16c)]

$$\sigma_e=\frac{\pi}{p^2}|e^{2i\delta}-1|^2 \tag{17a}$$

对一固定的 p，当 δ 取形式 $\delta=\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi$ 时，其中 n 是任何整数，该量取极大值．极大值等于

$$(\sigma_e)_{\max}=\frac{4\pi}{p^2} \tag{17b}$$

上述公式对 $\hbar=1$ 的单位制成立．很容易将常数 $\hbar$"恢复"．由于截面的量纲是面积，必须在分子中出现 $\hbar$ 的平方．在厘米·克·秒或米·千克·秒单位制中，就有

$$(\sigma_e)_{\max}=4\pi\left(\frac{\hbar}{p}\right)^2 \tag{17c}$$

所以，球对称散射截面的极大值是入射粒子的德布罗意波长 $\frac{\hbar}{p}$ 的平方的 $\frac{1}{\pi}$ 倍. 对较小的动量，这截面可能很大. 因此在散射的波动图象基础上，我们就能容易地了解第 6 节中提到的大散射截面，这样大的散射截面或许曾使读者感到不理解.

18 如上所述，相移 δ 是入射动量大小 p 的函数. 因为入射能量 ω 是 p 的单调函数，因此我们不妨把 δ 当作能量的函数. 于是我们把相移写成 $\delta(\omega)$ 以强调其对能量的关系.

相移作为能量的函数只要它经过一个 $\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi$ 的值，截面将取(17b)给出的极大值. 我们称散射在这种点产生**共振**. 现在研究散射振幅和散射截面在共振附近的行为. 若共振处的能量用 ω_0 表示，则对某些整数 n_0 我们有 $\delta(\omega_0)=\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi$.

利用定义余切的关系式，

$$\cot(\delta)=\frac{\cos(\delta)}{\sin(\delta)}=\frac{i(e^{i\delta}+e^{-i\delta})}{(e^{i\delta}-e^{-i\delta})} \tag{18a}$$

来改写(16c)式，读者立即会相信，可将(16c)写成

$$f(\omega)=\frac{1}{2ip}\left(e^{2i\delta(\omega)}-1\right)=\frac{(1/p)}{\cot[\delta(\omega)]-i} \tag{18b}$$

在点 $\omega=\omega_0$ 处，我们有 $\cot[\delta(\omega_0)]=0$. 在 $\omega=\omega_0$ 附近将 $\cot[\delta(\omega)]$ 按 $(\omega-\omega_0)$ 的幂次展开. 若仅保留线性项则得

$$\cot[\delta(\omega)]\cong-\frac{2}{\Gamma}(\omega-\omega_0) \tag{18c}$$

其中根据习惯，已将 $\cot[\delta(\omega)]$ 在 ω_0 的导数写成 $-\frac{2}{\Gamma}$.

假定相移在共振附近随能量而增加，这意味着 $\cot[\delta(\omega)]$ 随能量增加而减少以及(18c)中引进的参数 Γ 是正值. 将近

似式(18c)(仅在共振附近成立)代入(18b)式得

$$f(\omega)\cong-\frac{1}{p}\left(\frac{\Gamma/2}{(\omega-\omega_0)+i\Gamma/2}\right) \tag{18d}$$

以及

$$\sigma_e(\omega)\cong\frac{4\pi}{p^2}\left(\frac{(\Gamma/2)^2}{(\omega-\omega_0)^2+(\Gamma/2)^2}\right) \tag{18e}$$

读者将认出公式(18e)就是第三章中的布赖特-维格纳共振公式(21d),我们在那里曾用一条不同的推理推出它．量 Γ 是共振的宽度．在第三章中，我们曾把共振与激发能级联系起来,在这里我们仍坚持这个思想,而且量 $1/\Gamma=\tau$ 是表现为共振的激发能级的平均寿命．

二、粒子的意思是什么？

19 在进一步考虑相互作用问题之前，我们先来分析一下关于粒子是什么的想法．设想我们试图简洁地陈述粒子集合中的成员的合理分类．

在某种意义下一个粒子就是一"单个的"凝聚性的客体，它具有确定的本体，并可在一给定的时间局限于空间的有限区域内．它被一定的物理属性所表征，我们可以试探性地要求粒子有一定的质量，一定的电荷，一定的内禀角动量等等，并且当它单独在空间时应是绝对稳定的．

20 在这些规定之下,我们将承认质子、电子、正电子、中微子、光子以及稳定核都是粒子．但是，这种接纳方法立即引起一些问题．中性原子以及所有基态离子也满足以上判据，那么应该被接纳．同样的判据也适用于所有的基态分子和基态分子离子，如果要公平，我们必须也把这些客体包括在粒子之中，那么粒子集合就变成令人苦恼地庞大了．另一方面我们

必须拒绝诸如具有 α 放射性的镭核 ${}_{88}Ra^{226}$ 这样的客体为粒子，因为它是不稳定的．这样做是不能令人满意的，因为我们必须承认它是几乎稳定的(半衰期达 1622 年)，并且从化学家的观点来看，镭原子是与钡原子同样地合格．更坏的是，我们会被迫把中子排斥在粒子以外，中子是质子的孪生兄弟，我们认为它是原子核的组成物之一．在一个稳定的核内，中子同质子同样地稳定，但是当它单独存在时它就要衰变．然而中子的平均寿命是 17 分钟，按核或原子的时间标度，这是很长的时间了(即比起 10^{-24} 或 10^{-8} 秒来是很长的)．有许多现象发生的时间与 17 分钟相比是很短的，在研究这些现象的实验中，中子的行为还同一个稳定的粒子一样．例如，我们可以进行晶体对中子的衍射实验．

最后，还可以用下面的论点来反对上述接纳原则，那就是很可能发生这样的情况，我们已接纳的某些"稳定"核，事实上是不稳定的，虽然它们的寿命是如此之长以致我们还不曾开始认识到它们的不稳定性．这可能导至以后排斥那些早已接纳为粒子的客体．

21 由上所述不难知道，要合乎情理，我们必须修正我们的接纳判据．我们现在将接纳那些具有"不太大的不稳定性"的客体，在新的规定下，我们接纳中子和镭核．这意味着我们也放弃了粒子必须具有确定的质量的要求，因为由第三章知道，如果一个体系具有一定的寿命 τ，那么其能量(这种情况下指粒子的静止能量)只确定到数量级为 $\hbar/\tau$ 的不确定范围内．换句话说，如果粒子的平均寿命是 τ，那么，其静止质量的不确定度必须约为

$$\Delta m \sim \frac{\hbar}{\tau c^2} \tag{21a}$$

对于中子这个不确定度是非常地小；它约为 10^{-27} 原子

质量单位.

22 一旦我们在绝对稳定性的要求上作出让步，就会发觉很难确定究竟可以允许一个粒子有多大的不稳定性. μ 介子的半衰期约为 10^{-6} 秒，这在宏观尺度上是短的，但在核时间标度上却是很长的. 带电的 π 介子也是这样，其半衰期约为 10^{-8} 秒. 因此必须接纳它们. 中性 π 介子的平均寿命约为 10^{-16} 秒的数量级，这同 10^{-24} 秒相比仍很长，而且中性 π 介子显然同带电 π 介子相关联的. 因此我们也要接纳中性 π 介子以及诸如 K 介子和一些超子等. K 介子和超子的平均寿命一般是 10^{-10} 秒的数量级. 注意，由方程(21a)给出的相应的静止质量的不确定度，同它们的静止质量相比仍然是很小的.

23 我们现在必须确定是否应该接纳所有在激发态的原子、分子和核子. 赞同接纳它们的论点是，很多激发态的寿命比中性 π 介子的寿命长很多或者说事实上比中子的寿命长很多. 一些激发态放出物质粒子而衰变. 另一些则放出光子而衰变. 如果我们接纳了 $_{88}Ra^{226}$ 的"基态"，这个"基态"同样通过放出一个粒子而衰变，那么拒绝激发态为粒子是合理的吗？而且或许某些超子还应该认为是核子的激发态呢？（超子全都衰变成几个其它粒子，其中一个而且仅仅一个是核子）. 我们感到很难抵制这些论点，因此我们将接纳这些"激发态".

24 根据这个观点我们知道，这样接纳的成员数已远超过百万个大关，这是使人难以同意的. 如果我们原先的意图是形成一个适当小的并易于驾驭的合格的粒子的集团，那么这个目的现在已经遭到挫折. 况且，我们对接纳"激发态"的最后让步，提出了对我们整个接纳方案的某些严重怀疑. 为了看清楚这一点，我们来考虑从实验上确定一个激发态(即一个体系在基态以上的能级). 在第三章中我们解释了激发态如何

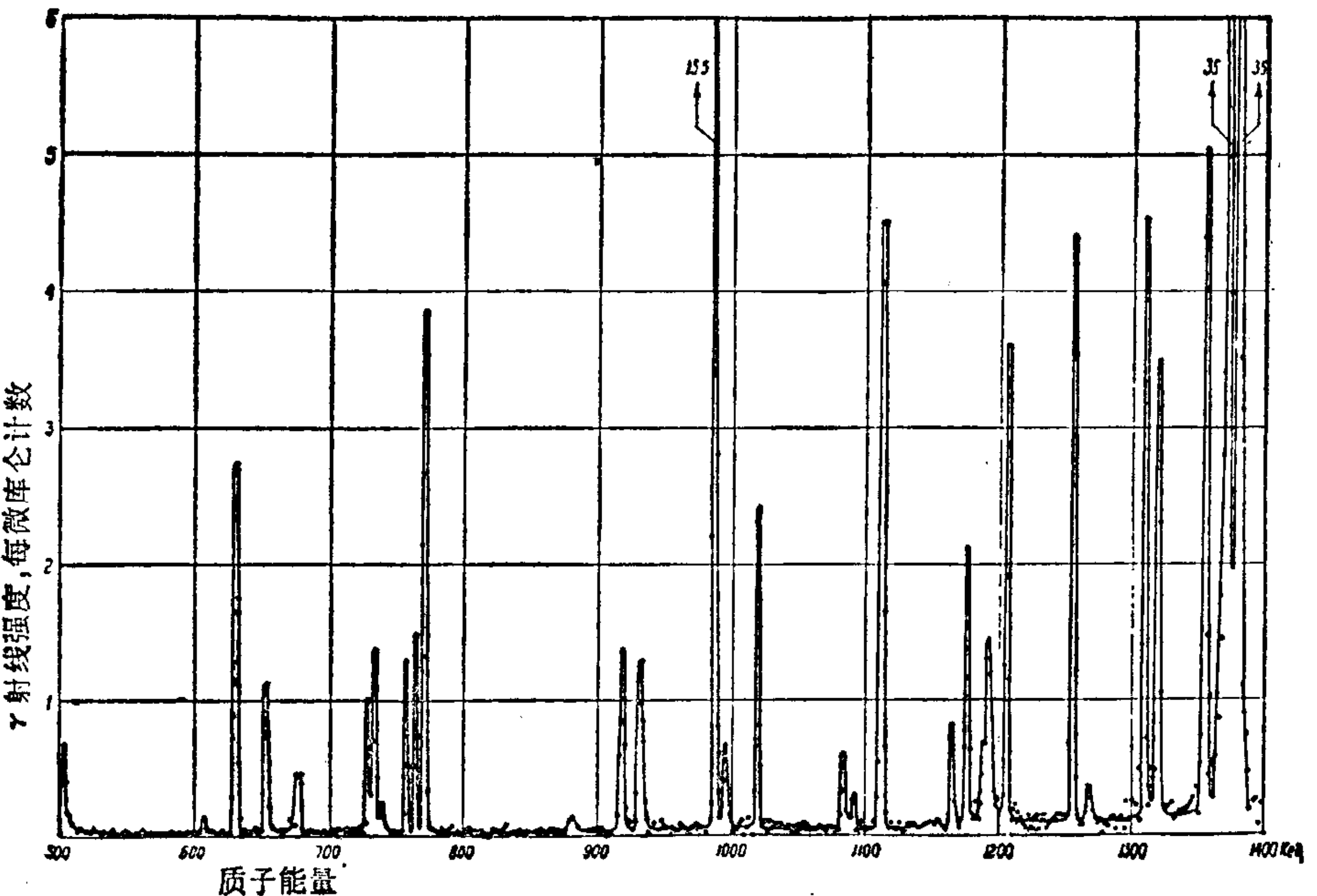


图 24.4 图示的核反应 $A^{27}+p \rightarrow Si^{28}+\gamma$ 的产额曲线取自一篇论文 K. J. Broström, T. Huus, and R. Tangen, "Gamma-Ray Yield Curve of Aluminum Bombarded with Protons," *Physical Review* **71**, 661 (1947). 纵坐标是反应截面的量度，横坐标是入射质子在实验室参照系中的动能，单位是千电子伏. 尖峰为共振. 它们揭示了在反应中产生的硅核的激发态的存在.

表现为散射过程中的共振．一个原子对光的共振散射就是一个例子．如果我们测量原子作为光的散射者的效率，我们发现它作为光频率的函数在相应于基态和激发态的能量差的频率处有尖锐的极大值．这个现象并不局限于光的散射：在物质粒子的散射也会遇到这种情形．图 24*A* 就是一个例子．纵坐标代表截面的量度，从而曲线表示实验测得的质子被铝吸收的截面作为能量的函数．截面的尖峰显示反应中产生的硅核的激发态的位置．

共振峰的宽度 T 是相应激发态在能量上不确定性的量度．只要共振是很尖锐的，那么把共振解释为激发态的表现就是清楚明白的．我们已经同意这些激发态是“粒子”．现在

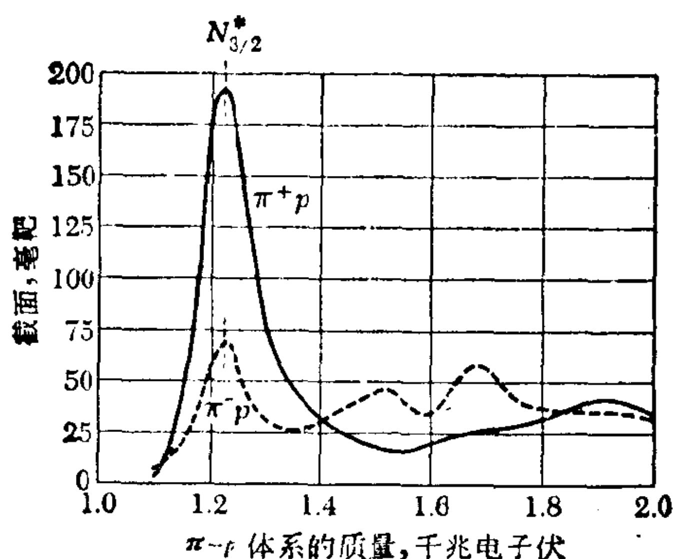


图 24*B*　两曲线表示正负 π 介子被质子散射所测得的截面，纵坐标是总截面，单位为毫靶．横坐标是 π 介子和质子在质量中心参照系中的总能量．这样表示能量是很方便的，因为明显的峰的位置直接相应于“粒子”或共振态的质量．

注意在大约 1.238 千兆电子伏处的大峰，此能量相应于一个在实验室参照系中数值约为 195 兆电子伏的 π 介子的动能，在该坐标系中入射的 π 介子与一个静止的质子相碰撞．

我们已将这些共振用符号 $N^*_{3/2}$ 来表示．在文献中也常常用记号 $\Delta(1238)$．

来看图 24B，它表示π介子在质子上散射的截面作为能量的函数．正π介子的截面具有一个显著的尖峰，并且在高能区域有一微小的“隆起部分”．负π介子的截面具有三个不很明确的峰．所有这些峰都相应于粒子吗？现今很多物理学家都倾向于说它们是粒子．这些“粒子”(？)的质量就是峰值的横坐标．

25 我们所面临的困难是界线应划在什么地方．我们肯定不愿意把截面作为能量函数的曲线中每一个小的“隆起部分”说成是相应于一个粒子；但是另一方面，如果我们接受按照共振必须“充分地”狭的任何规则来定义一个粒子，那么这种规则就是有些任意性的．换句话说：如果一个客体被接纳到粒子集合中，那么其寿命不能太小，但我们在哪里划此界线呢？

我们来重新检查我们的目的．很可能若想一般地严格地定义什么是粒子，那么什么结论也不能真正得到．我们的企图已导至了一类具有百万成员的客体，其中包含着诸如象π介子和蛋白质分子这样性质很不同的客体．按普通的说法，可以把这些客体合理地称为粒子，但是如果在我们的基本理论中试图把π介子和蛋白质分子处理成等同的东西，我们将很难期望深刻地认识到有关基本相互作用的任何知识．某些粒子显然是复合的体系，在我们的基本理论中应该这样描述它们：即应当根据其更基本的组分的相互作用来“解释”它们．

从实用的观点出发，我们可以考虑一个日益增多的粒子分层体系．根据我们所考虑的物理现象的类别，我们关于复合体系的“基本组分”的概念也随之改变．按普通习惯说分子是几个原子的束缚态，原子是一个核和一些电子的束缚态，一个核是质子和中子的束缚态．而且，质子、中子和电子并不明显地是其它什么东西的束缚态：它们很可能是一些最终的基本粒子．这样，它们在基本理论中是特别令人感兴趣的对象．

表 26A　轻子

粒子		电荷	质量 兆电子伏
e^- e^+	电子 正电子	$-e$ $+e$	0.511 0.511
μ^- μ^+	μ 介子	$-e$ $+e$	105.7 105.7
ν_e $\bar{\nu}_e$	e-中微子 e-反中微子	0 0	0 0
ν_μ $\bar{\nu}_\mu$	μ-中微子 μ-反中微子	0 0	0 0

μ 介子是不稳定的，按如下方式衰变: $\mu^\pm \to e^\pm + \bar{\nu} + \nu$ (在中微子中其中一个大概是 μ 中微子，另一个是 e 中微子) μ 介子的平均寿命是 2.20×10^{-6} 秒，其余的粒子是稳定的. 轻子的自旋角动量都是 1/2.

表 26B　主要的介子八重态

粒子	质量 兆电子伏	平均寿命 秒	主要衰变方式
π^+ π^- 带电 π 介子	139.60	2.61×10^{-8}	$\mu^+ \quad \nu_\mu$ $\mu^- \quad \bar{\nu}_\mu$
π^0 中性 π 介子	134.98	0.89×10^{-16}	$\gamma \quad \gamma$ $\gamma e^+ e^-$
K^+ K^- 带电 K 介子	493.8	1.23×10^{-8}	$\mu^\pm \quad \nu$ $\pi^\pm \quad \pi^0$ $\pi^\pm \quad \pi^+ \quad \pi^-$
K^0, $\bar{K}^0$ 中性 K 介子 K_1	497.9	0.87×10^{-10}	$\pi^+ \quad \pi^-$ $\pi^0 \quad \pi^0$
K^0, $\bar{K}^0$ 中性 K 介子 K_2		5.68×10^{-8}	$\pi^0 \quad \pi^0 \quad \pi^0$ $\pi^+ \quad \pi^- \quad \pi^0$ $\pi \quad \mu \quad \nu$ $\pi \quad e \quad \nu$
η η 介子	548.6	? $<7 \times 10^{-20}$ $>7 \times 10^{-21}$	$\gamma \quad \gamma$ $\pi^0 \quad \pi^0 \quad \pi^0$ $\pi^0 \quad \gamma \quad \gamma$ $\pi^+ \quad \pi^- \quad \pi^0$ $\pi^+ \quad \pi^- \quad \gamma$

上述介子的自旋角动量是 0，重子数是 0，两个中性 K-介子 K^0 和 $\bar{K}^0$ 衰变时，它们有如两个寿命不同和质量差别极小的粒子 K_1 和 K_2 的"混合物".

表 26C　主要的重子八重态

粒　　子		质　量 兆电子伏	平均寿命 秒	主要衰变方式
p	质子	938.256	稳定	—
n	中子	939.550	1.01×10^{3}	$pe^{-}\tilde{\nu}$
Λ	Λ 超子	1115.58	2.51×10^{-10}	$p\pi^{-}$ $n\pi^{0}$
Σ^{+}	Σ 超子	1189.47	0.81×10^{-10}	$p\pi^{0}$ $n\pi^{+}$
Σ^{0}		1192.56	$<10^{-14}$	$\Lambda\gamma$
Σ^{-}		1197.44	1.65×10^{-10}	$n\pi^{-}$
Ξ^{0}	级联粒子	1314.7	3.0×10^{-10}	$\Lambda\pi^{0}$
Ξ^{-}		1321.2	1.7×10^{-10}	$\Lambda\pi^{-}$

这些粒子的自旋角动量均为1/2，重子数均为+1．存在由上述粒子的反粒子组成的反重子八重态．反粒子具有与以上相同的质量、自旋和平均寿命，但电荷和重子数的符号相反．

26　现考虑在我们的全部粒子中的（真正的?）基本粒子的子集合．我们的第一原则是这个较小的和更高级的集合中不接纳任何“显然是复合的”客体．在第一章中我们曾讨论了关于一个粒子是复合的还是基本的这一性质的一些实验判据．所有的原子、分子和比质子重的核很清楚都是复合的，因此排除在我们的新的集合之外．这样就剩下大约一百个“非明显复合的”粒子．我们接纳质子、中子、反质子、反中子、长寿命超子及其反粒子、π 介子、K 介子、μ 介子、中微子、电子和正电子以及光子．除质子、反质子、电子、正电子、光子和中微子外，所有这些粒子均不稳定；但是，鉴于前面的讨论，我们将不采用绝对稳定作为接纳的条件．

基本粒子分为四类．光子是第一类的唯一成员．其它各

类为轻子、介子和重子(包括反重子). 表 26A—C 列举了轻子和最合格的介子以及重子的某些性质(也参看附录表 B).

27 在图 27A—B 中用图解表示了表 26B—C 中所列的介子和重子，这种图解同第三章中讨论的谱项图极其相似. 在图上用一小段横线代表每个粒子，图的纵坐标是静止质量 (单位: 兆电子伏), 横坐标是电荷(横线的中点指出粒子的电荷).

按照现在通行的想法，应把粒子的图解认为完全相似于原子的谱项图. 每个图解对应于一些密切相关粒子组成的一个"多重态"，在某种意义下可把这些粒子看为是这个具有多重态的"一般"粒子的一些不同状态.

图 27C 表示八个粒子的反重子多重态，这八个粒子是图 27B 中八个重子的反粒子. 在同一图解中包含了图 27A 中所示的介子的反粒子: 我们说介子的八重态是自共轭的. 这样负 π 介子就是正 π 介子的反粒子，负 K 介子就是正 K 介

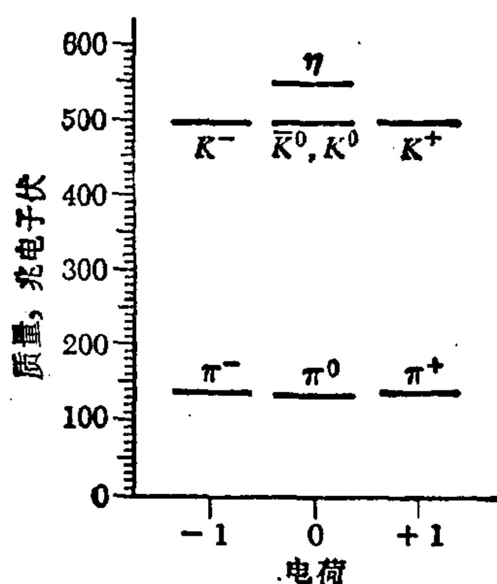


图 27A π 介子和 K 介子所属的介子八重态的质量谱，这些粒子的重子数和自旋角动量全都是零. 图解中用双线表示的两个中性 K 介子 K^0 和 $\overline{K}^0$ 在图解的精度内具有相同的质量. 一些成对的粒子-反粒子对称地在相应于零电荷的垂线的两边. π^0 粒子和 η 粒子是它们自己的反粒子. $\overline{K}^0$ 是 K^0 的反粒子.

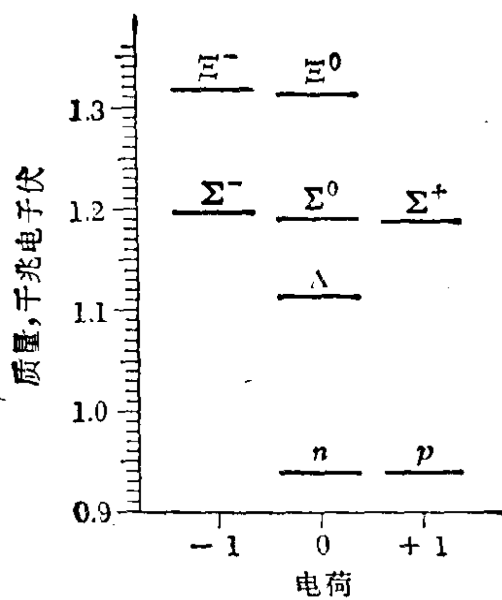


图 27*B* 质子(p)和中子(n)所属的重子八重态的质量谱．这些粒子的重子数均为+1，自旋角动量均为 1/2．可把此图解释为表示与这个多重态相联系的"一般粒子"的八个不同态的一个谱项图。

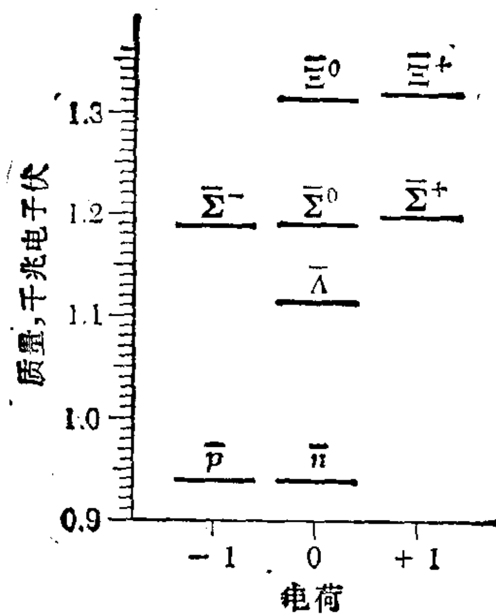


图 27*C* 包括图 27*B* 所示的粒子的反粒子的反重子八重态的质量谱．多重态中右边的粒子的重子数均为−1，自旋角动量均为 1/2．

如果把重子图解对相应于零电荷的竖线反射，就获得反重子的图解，反之亦然。

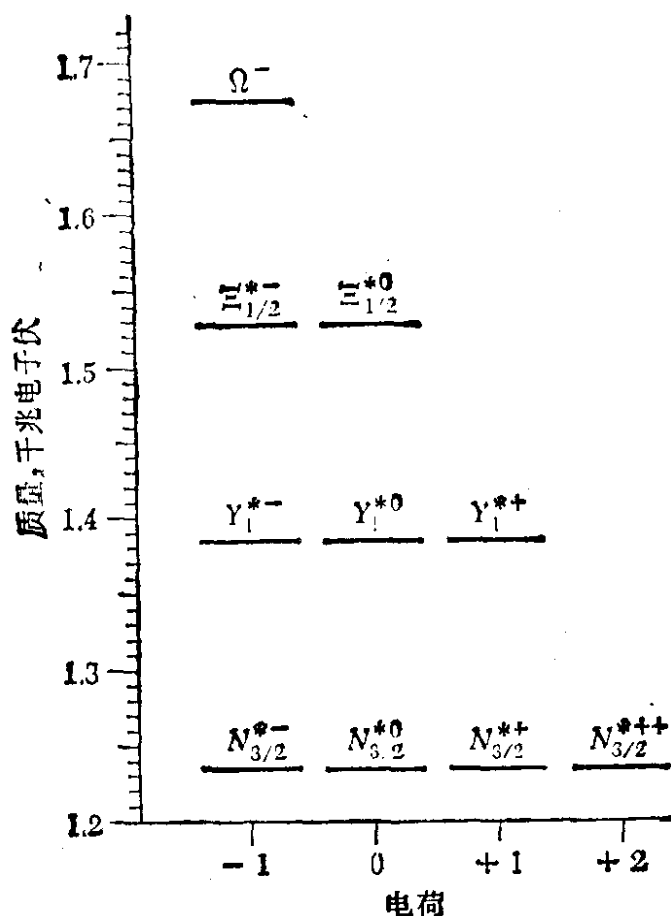


图 27*D* 表示包括在π介子–核子散射中最突出的共振态的十个重子的多重态谱项图(π介子–核子的截面见图 24*B*)。图解中用$N^*_{3/2}$标记共振态(文献中也有用 Δ 符号表示这些粒子的)。图中所示粒子的重子数均为+1,自旋角动量均为 3/2。

上述的粒子图样的规则性是很显著的。目前尚未完全了解其详情。在十个粒子的多重态中应包含π介子–核子共振态,这可以在称为八重法的对称原理的基础上说明之。事实上在实验发现之前理论上已预言到负Ω粒子。这个粒子的平均寿命是1.5×10^{-10}秒。图解中所有其它粒子的寿命均极短。

子的反粒子．K^0 和 $\overline{K}^0$ 所表示的粒子形成一个粒子–反粒子对．中性π介子和η介子是它们自己的反粒子．

图 27*D* 表示一个具有十个重子的多重态，这十个重子中包括图 24*B* 中以 $N^*_{3/2}$ 标记的共振态．关于这些粒子（共振态）是否基本粒子，可能还有某些疑问，但是今天大多数物理学家愿意把它们列入基本粒子。

28 我们将自然界中的相互作用分为强相互作用（“核力”属于这一类），电磁相互作用，弱相互作用和万有引力相互作用．介子、重子和反重子之间的相互作用都很强．光子和轻子不受强相互作用影响：它们的行为由电磁相互作用和弱相互作用所决定．强相互作用粒子(现在常称为“强子”)也参加电磁相互作用和弱相互作用，其中的很多不稳定粒子“通过”弱相互作用而衰变，从而具有以原子核时间标度衡量是很长的寿命．

基本粒子的相互作用受到若干很显著的守恒定律和对称原则控制．这些守恒定律中的一个是总电荷在所有相互作用中守恒[1]．存在类似的重子数守恒定律．如果我们指定光子、轻子和介子的重子数为0，表26C中的重子的重子数为+1，以及相应的反重子的重子数为−1，那么我们就可以说在所有相互作用中，总重子数守恒．这个原理在某种意义上可以“解释”质子的稳定性．因为它是重子中最轻的，所以它不可能衰变成任何其它粒子而不破坏守恒原理．

29 一般相信，上述的守恒定律对所有的相互作用均成立．也已知道还有其它的守恒定律，它们看来是表征不同类型的相互作用的．在强相互作用和电磁相互作用中称之为超荷的守恒就是一个例子．可以这样来指定每个强相互作用粒子的超荷量子数（它是个整数），使得总超荷在所有强相互作用和电磁相互作用过程中总是守恒．在弱相互作用中超荷并不守恒．图29A—D中的图解表示对所选择的强相互作用粒子如何指定超荷量子数的．

我们来考虑说明超荷守恒的含意的一些例子．

$$\underset{(0)}{\pi^-}+\underset{(+1)}{p}\to\underset{(+1)}{K^0}+\underset{(0)}{\Lambda^0} \qquad (29a)$$

1) 电荷守恒是电磁理论中的一个基本原理．见 Berkeley Physics Course, Vol. II, *Electricity and Magnetism*, 第4页的讨论．

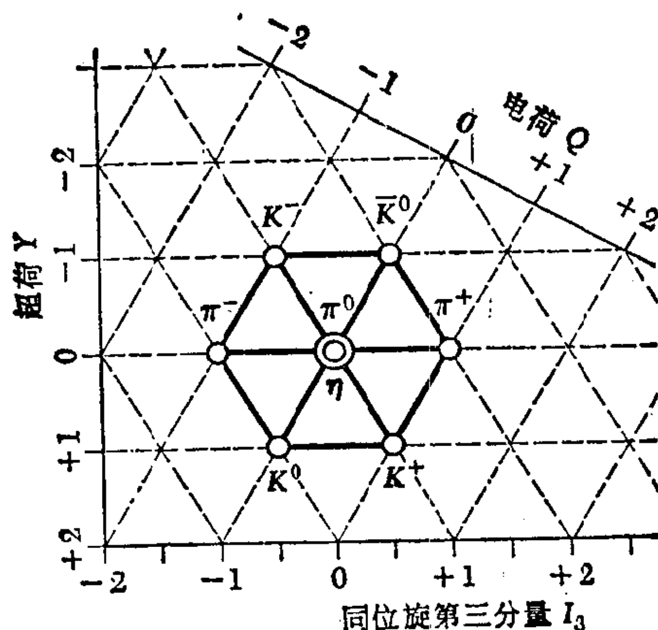


图 29A　表示其质量谱为图 27A 的介子八重态中的粒子的电荷和超荷的图解. 总超荷在任何强相互作用或电磁相互作用中守恒. 总电荷在所有的相互作用中守恒.

如果把粒子画在如上的六角坐标网上，则图样就特别清爽明白. 对称性的八重法理论预言图样应如上所示的这样，特别是理论预言了图解中央有两个粒子，这里是指 π^0 粒子和 η 粒子.

横坐标表示另一个常用的量子数称为同位旋的第三分量. 这个量(用 I_3 表示)在所有的强相互作用和电磁相互作用中也守恒.

图解中的粒子的重子数均为 0，自旋角动量均为 0.

根据超荷守恒原理是允许的，已熟知每当能量足够大的负 π 介子同质子碰撞时，上述反应很易发生(粒子符号下的数字代表它们的超荷). 反应



$$\underset{(0)}{\pi^-}+\underset{(+1)}{p}\to\underset{(0)}{\pi^0}+\underset{(0)}{\Lambda^0} \qquad (29b)$$

根据超荷守恒原理是禁止的. 这特别指明，在 π 介子-质子碰撞时除非能量足够地高使得按反应(29a)可以产生 K 介子，否则是不可能产生 Λ 粒子. 从未观察到反应(29b)的事例. 反应



$$\underset{(+1)}{n}+\underset{(+1)}{p}\to\underset{(0)}{\Lambda^0}+\underset{(+1)}{p} \qquad (29c)$$

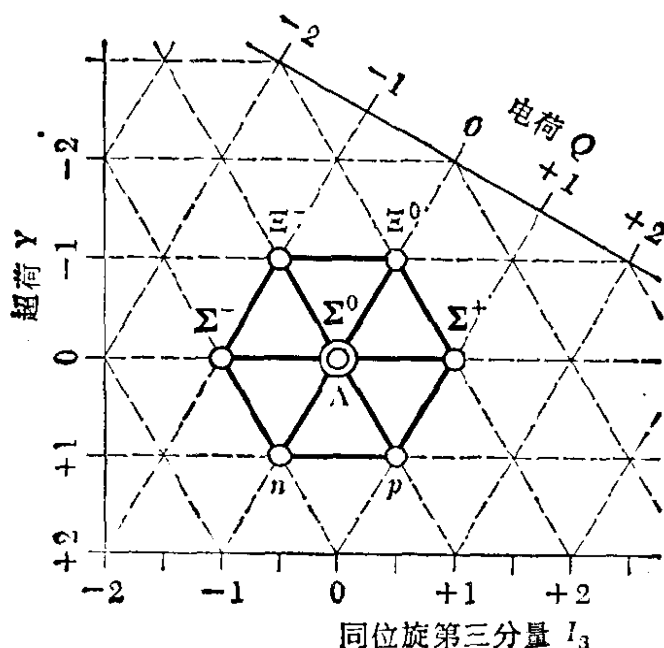


图 29B 质子和中子所属的重子八重态的八重法对称图解. 应该清楚地懂得，在超荷对电荷的图解中的粒子图样是由这些量的实验值决定的. 因此，这个图解表示的是实验结果，然而它同八重法对称理论符合得很好. 注意，这个八重态结构与图 29A 中的介子八重态的结构相同.

上述所有的粒子的重子数均为+1，自旋角动量均为1/2.

也是禁止的. 实验上已完全确立在自然界中从未发生过作为强相互作用的上述反应.

Λ 粒子的一种衰变方式是



$$\underset{(0)}{\Lambda^0} \rightarrow \underset{(0)}{\pi^-} + \underset{(+1)}{p} \tag{29d}$$

它违反超荷守恒. 这种衰变的原因是弱相互作用，这种衰变发生速率相对较低就表示了这一点. 可以这样来解释 Λ 粒子的长寿命(在"核"时间标度上平均寿命 10^{-10} 秒是长的了)，重子数和超荷的守恒原理禁止它通过除弱相互作用以外的任何其它方式而衰变.

30 图 29A—D 中的图解反映实验上所观察到的粒子的性质. 它们具有十分引人注目的形状. 很清楚，我们这里已经

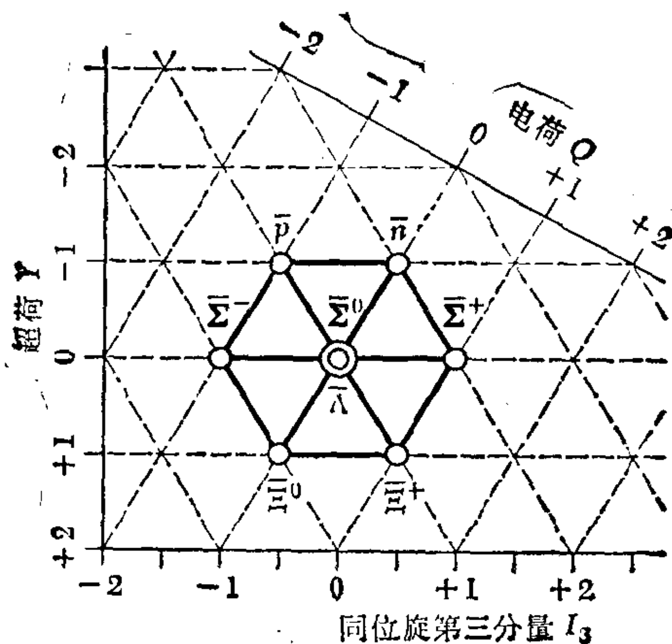


图 29*C* 相应于图 29*B* 所示的重子的反重子八重态的八重法对称图解．这里在粒子符号上方加一横来表示反粒子．图中所示粒子的重子数均为－1，自旋角动量均为 1/2.

反粒子具有与相应粒子符号相反的电荷及超荷。

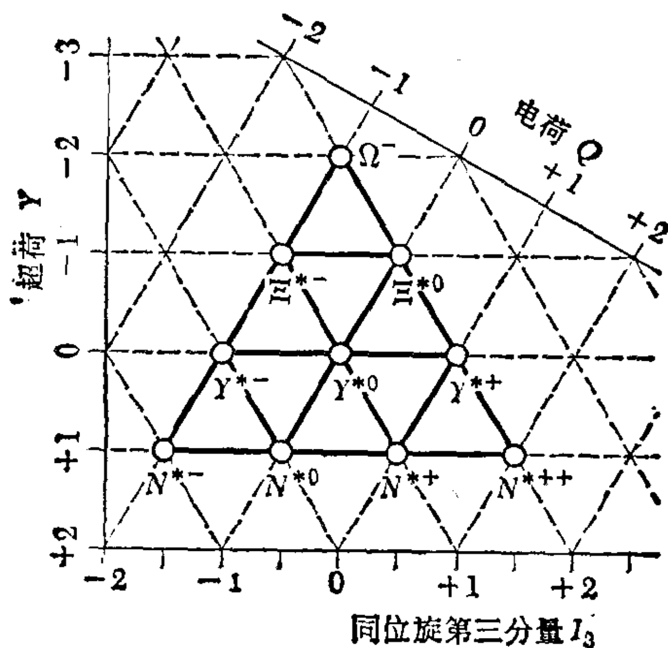


图 29*D* 主要 π 介子-核子共振态所属的重子十重态八重法对称图解．该图解表示对十重态中的粒子如何指定超荷．这些粒子的质量列在图 27*D* 中。

初步看到自然界的某些隐藏着的对称性．如果看看图 27D 中的谱项图，我们会得到同样的印象：注意能级间的非常有规则的间隔．

目前我们对实验已经发现的所有这些引人注意的对称性和规则性的"背后"是什么了解得非常有限．但我们究竟有了一个在图 29A—D 中的对称性图解的唯象理论（称为八重法）．在这个理论的基础上，我们可以找到所有可能的对称性图解，关于与图解相联系的粒子我们也有很多可谈．盖曼(Murray Gellman)早先对图 27D 和 29D 中用 Ω^- 表示的粒子存在的预言得到实验证实，是对这个理论的最有力的支持[1]．

31 上述基本粒子（加上另外的一些）全都好象是"同等地基本"：它们之中没有一个是"复合的"．但有人仍然推测可能存在更基本的实体．盖曼曾提出介子和重子或许是由至今未知的粒子所形成的复合体系，他建议把这种未知粒子称为夸克．这并非是一个轻率的不负责任的建议：盖曼曾注意到，如果夸克（和反夸克）果真存在，则介子和重子的某些性质特别是支配其相互作用的对称原理，就可以用一种漂亮的方式来解释．按照盖曼的想法，这些粒子应该带有 $\pm e/3$ 和 $\pm 2e/3$ 的电荷，其中 e 是质子的电荷，在这方面它们与全部已知的粒子显著地不同．图 31A 表示夸克的对称图解．

对夸克的寻找一直继续进行，但至今尚未找到．与核子相比夸克必定是很重的：否则在加速器实验中早就会"看到"它们了．由此可断言，如果核子确实是（三个）夸克的一个束缚态，那么，这个结合能与核子的质量相比必定是很大的．从而核子将是一个非常紧密束缚的体系，在这方面它们根本不

1) V. E. Barnes et al., "Observation of a Hyperon with Strangeness Minus Three," *Physical Review Letters* **12**, 204 (1964).

同于我们熟知的束缚体系，即原子、分子和原子核（原子、分子和原子核的结合能与体系的质量相比是较小的）．所以可以有把握地说，即使有朝一日发现核子是复合的，其含意也肯定不同于，例如，氘是复合的含意．

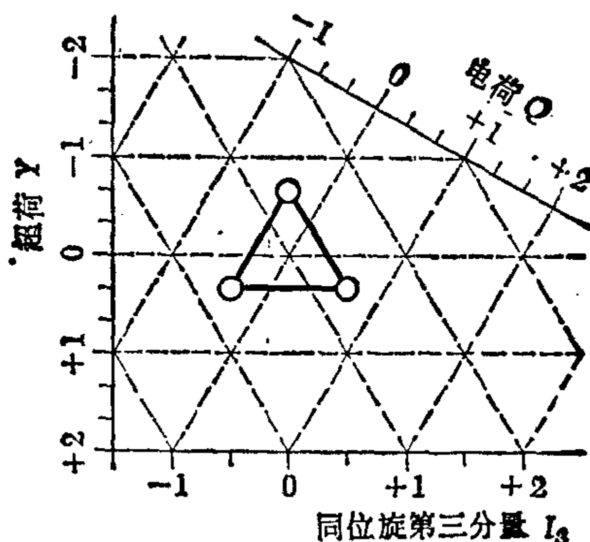


图 31*A* 如果夸克确实存在，它就会具有如上的八重法对称图解．这个三重态中粒子的重子数可能均为+1/3，并可推测出自旋角动量均为1/2．注意，其中两个粒子带−1/3电荷，而第三个粒子带+2/3电荷．相应的反夸克的三重态的对称图解可将上图解对相应于零电荷的线反射而得到．反夸克的重子数可能为−1/3．图 29*A* 的八重态中的介子可认为是一个夸克和一个反夸克的束缚态．可把图 29*B* 的八重态中的重子认为是三个夸克的束缚态．

如果夸克理论与现实有任何关系，必须存在至少一个稳定的带分数电荷的粒子．在实验上从未观察到这种粒子，很可能带分数电荷的粒子并不存在．迄今，夸克的想法还纯系推测．

三、量子场论的基本概念

32 我们来考虑理解粒子间相互作用的某些理论尝试．我们将继续探讨第 9 节中得出的概念，亦即把散射现象认为是波与波相互作用的表现．相互施以作用力的两个粒子的经典概念，在量子力学中相应于粒子的德布罗意波相互作用的概念．

这是什么意思呢？它的意义是一个粒子的德布罗意波的存在会影响另一个粒子的德布罗意波的传播. 这种情形仅在德布罗意波传播所在介质是非线性时才能发生，亦即介质的“响应”是非线性的. 在线性介质中用一个线性微分方程描述波的传播，任何两个波的线性迭加将是另一个可能的波. 一个波的存在并不影响另一个波的行为.

33 我们来讨论真空即空的空间的性质. 当十九世纪发展电磁理论时，是用另一个名字，即“以太”来称呼真空的. 当我们考虑波时自然会问，是什么东西“振动”. 一个上世纪的物理学家会说是以太振动. 麦克斯韦方程组描写了电磁波在以太中的行为. 那个时代的物理学家试图用机械模型来了解电磁学，并认为电磁波与固体中的弹性波有着某种类似，这种情况看来是自然的. 为建立这种解释曾花了相当大的努力. 结果以太的机械性质无疑与任何真正的固体和液体的性质十分不同，但是这种情况本身并不与理论相矛盾.

人们可以根据认识论强烈地反对以太的机械理论：考虑以太的机械性质是不必要的，它无助于我们对电磁学的了解. 不需要任何机械解释，麦克斯韦方程组本身就能告诉我们有任何实验意义的经典电磁理论的全部内容. 例如，如果要描述无线电波从一个天线到另一个天线的传播，只要在适当边界条件下求解麦克斯韦方程组就足够了，至于我们是否有一个波传播的机械模型是无关紧要的. 物理学家们逐渐认识，在研究电磁学中要紧的只是麦克斯韦方程组. 因此放弃了建立机械模型的努力，“什么东西真正地在振动”的问题被认为是在运用上无意义的问题.

34 狭义相对论的发展大大加速了机械以太理论的死亡. 我们来回想这方面的原因. 如果以太确实具有任何与通常的固体或液体类似的性质，那么当然可以期望存在一个惯性系，对

于这个惯性系以太是静止的，至少是局部地静止．另一方面，每一个有关的实验看来都指出，无法确定相对于以太的绝对运动状态：所有的惯性系彼此完全等价．当然后面这一点是狭义相对论的基石之一．如果真的是这样(我们坚信如此)，那就是说，运动的以太与静止的以太有相同的物理特性，这无疑是任何通常的固体或液体所不具备的性质．由于以太的这个基本的"非机械的"性质，试图再给以太加上别的机械性质，看来就无意义了．

35 今天已从物理世界中排除了机械以太．"以太"这个词本身，由于它的"坏的"含义已不再出现在物理学教科书中．相反，我们夸张地谈到"真空"，从而表示我们对波在其中传播的介质缺乏兴趣．当我们研究电磁波或德布罗意波时，我们不再提什么在"真正地振动"这样的问题．所有我们要做的是建立这些波的*波动方程式*，通过这些方程式可以预言实验上观察得到的现象．如我们早已说过，如果这些波动方程式要描述相互作用的粒子，它们必须是非线性的．这些波动方程式的建立以及从它们得出一些实验预言是*量子场论的目的*，可以认为量子场论是基本粒子的基本理论．在这理论中用*量子场*来描述波，在某种意义下这理论是波的经典理论的量子力学推广．

用量子场描述相互作用的思想，在很多方面是吸引人的．我们可以适当地试图了解这个理论的一般特点．一个完全的讨论需要比较复杂的数学工具，而在这里，我们尚不具备它们，所以详情从略．

36 我们来十分普遍地考虑描述两个(或多个)粒子相互作用的问题．我们为了表明看法，先在经典物理的范围内考虑这个问题．在*非相对论*理论中可以引进粒子间由位置决定的作用力．作用于一个粒子的力依赖于该粒子的位置以及在同一

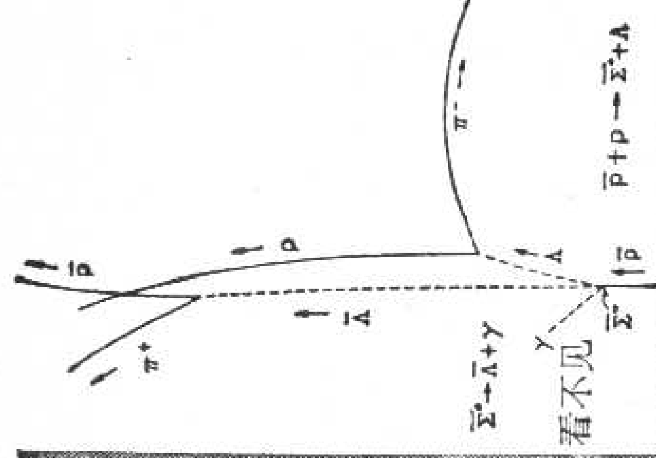


图 36 Λ 表示一个中性反 Σ 粒子的产生和衰变的气泡室照片．上角的示意图表示反应过程并标明了各种不同的径迹．中性粒子(在示意图中用虚线表示)当然不留下可见的径迹．带电粒子的径迹是弯曲的，因为气泡室是在垂直于图平面的磁场之中的．

由反质子和质子碰撞产生反 Σ 中性粒子和 Λ 粒子的反应是一种强相互作用．反 Σ 中性粒子通过电磁相互作用衰变为一个反 Λ 粒子和一条 γ 射线．照片中的其它衰变过程均显示弱相互作用．

时刻其它粒子的位置．在这种情形下力的作用是瞬时的：如果一个粒子的位置突然改变，另一粒子将立即觉察到相应的力的改变．

我们相信自然界的每一个基本理论必须与狭义相对论原理一致．我们注意到上述那种相互作用同这些原理有明显的矛盾．信号的传播速度不能大于c，因此力的作用不可能是瞬时的．如果一个粒子的位置或运动状态突然改变，必须经历一定的时间这一改变才能被其它粒子察觉到，必须经历的最短时间将是光信号在两粒子间所经历的时间．

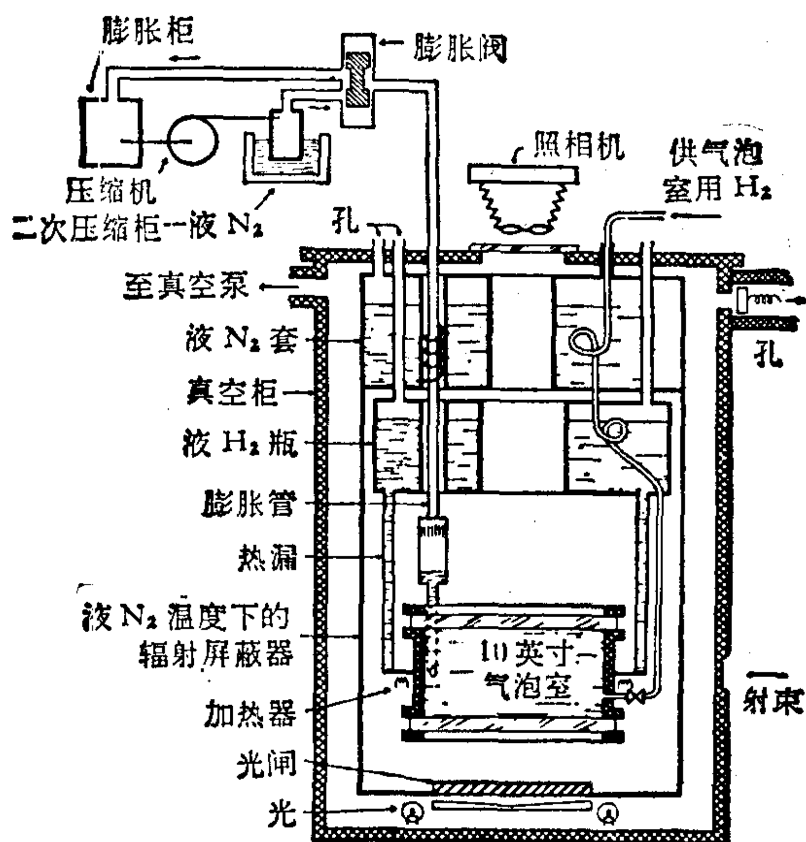


图 36B 液态氢气泡室示意图。气泡室在液态氢突然减压下启动．在减压下液体的温度将在沸点之上，但并不立即发生沸腾：液体在短时间内处在过热状态．带电粒子穿过液体将沿路径引起局部汽化．形成一条由很小的气泡组成的可见径迹，气泡室上面的照相机将拍下此径迹的照片．然后重新将压强回升，从而所有的径迹消失．气泡室就准备好作下一次拍照。

建立一个有相互作用的经典粒子的相对论不变性理论不是一件无意义的事，这就要求对于有关超距瞬时作用的非相对论观念作一个深刻的改变.

37 引进(经典的)场是摆脱困境的一个可能的方法. 每个粒子是一个场源，这个场可在空间传播，但传播速度永不能大于c，这个场可以影响其它粒子的运动. 因此在这种相对论经典理论中，使我们不但考虑粒子，而且考虑场. 带电粒子通过电磁场的媒介而相互作用是这种理论的一个好例子：电荷是电磁场的源，反过来电磁场又影响带电粒子的运动.

38 现在我们从另外的角度来看粒子相互作用问题. 在经典的非相对论理论中，我们是通过力的瞬时作用来描述相互作用的，如果在某一瞬时给定所有粒子的位置和速度，就唯一地确定了这些粒子组成的孤立体系将来的行为. 换句话说，如果有 N 个粒子，那么这体系的运动状态就由 $6N$ 个参数确定：体系具有有限个数的自由度. 另一方面，在相互作用用场来描述的相对论性理论中，在给定的时刻只指明所有粒子的位置和速度是不够的. 我们还必须指明场的状态. 经典电磁场理论很清楚地说明了这一点：电磁场决不是仅由所有带电粒子在某一瞬间的位置和速度唯一地确定的. 在初始条件中我们还必须包括给定空间各处的电场和磁场. 然而描述电磁场的状态需要无限多的参数，我们的体系不再是一个有限个数自由度的体系. 这显然是相对论性和非相对论性理论之间的深刻区别.

39 我们应该注意(经典的)相对论性理论还有一个特征：在任何时刻体系的总能量的一部分将存在于场中. 只要在一个理论中，相互作用是通过场作媒介的，就必须是这样. 例如考虑两个粒子 A 和 B 相互作用. 假定 A 粒子与第三个粒子 C 突然碰撞，这个 C 粒子并不直接与 B 粒子相互作用. A 的运

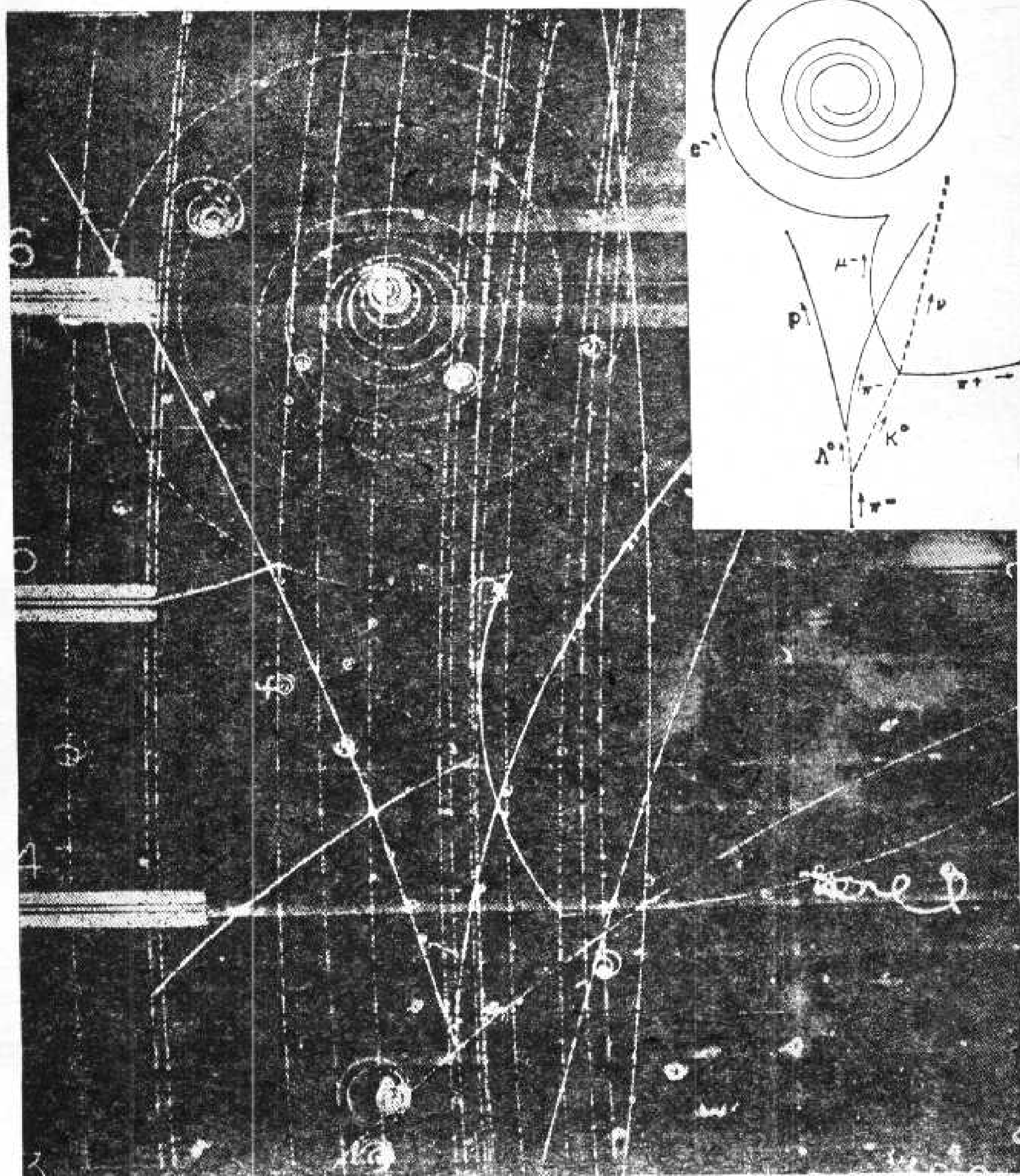


图 38Λ　显示一个(中性)Λ粒子和一个中性 K 介子的产生和衰变的气泡室照片．上面的示意图中标出了各种径迹．只有带电粒子留下可见的径迹,并且是弯曲的,因为气泡室放置在磁场之中．强产生反应是：$p+\pi^-\to\Lambda^0+K^0$．衰变相互作用全是弱的．由 K^0 衰变时放出的负 μ 介子衰变成一个电子、一个中微子和一个反中微子．后面两个粒子是中性的所以看不见．

动状态将改变. 在适当的时候这个改变将显示为 A 粒子在 B 粒子处产生的场的改变. 从而 B 粒子的运动状态将最终改变, 特别是, 粒子的动能将改变. 这样, 两个粒子 A 和 B 之间就有能量交换是通过场作媒介的. 如果我们要一个理论, 其中讨论某一时刻的总能量是有意义的, 并且如果我们要保留一个孤立体系的总能量是运动常数这一原理, 那么我们就可以问, 从 A 与 C 碰撞的瞬时到 A 的运动状态的改变在 B 处首次被感觉到的瞬时之间, 这段时间内将到哪里去找那些最终要传送给 B 的能量呢. 我们将不得不作出结论, 这能量必须存在于场中.

40 这一推理路线可导致一个有效的进一步结论. 假定情况是除了没有 B 粒子外, 其余都相同, 在 A 与 C 碰撞的瞬时, A 产生的场发生一改变: 一定量的能量传递给了场. 这能量的大小必须与 B 存在时相同, 因为粒子 A 不可能很清楚地"知道"粒子 B 根本不在那里准备接受能量. 现在如果 B 不存在, 那么传递给场的能量到哪里去了呢? 它必定跑到某些地方去了, 一个可能性是能量辐射出去了. 事实上在电磁场理论中就是这种情况: 如果一粒子 A 与另一粒子 C(可假定它不带电)碰撞, 粒子 A 将发出电磁波, 这波将把能量带走"到无限远去", 如果没有另外的粒子吸收这个能量的一部分的话.

所以我们得到一个非常普遍地推测, 如果粒子间的相互作用是通过场作媒介的, 那么这个场也能表现为自由传播的携带能量的波的形式.

41 现在我们从量子力学的观点来考察粒子的相互作用问题. 前几章的讨论已经让我们相信每个粒子都有一个与之相联系的波, 以及反过来每个波都具有一些粒子性的方面. 我们可以说量子力学的波与量子力学的粒子实在就是同一回

事：它是单一的客体，既不全象经典粒子又不全象经典波包．这使我们的概念非常显著地得到统一．在经典物理学中，我们引进两种不同类型的客体，即一方面是粒子，另一方面是场，场是传递粒子间相互作用的媒介．在量子力学中，我们可以用对待场一样的观点来处理“粒子”以避免这个不能令人满意的二元论．我们建立一个场论，它描述波场（即粒子的德布罗意波）的传播．同时，这个场论描述波与波之间的相互作用，从而在某种意义上也描述了粒子间的有效力．

显然这是很吸引人的想法，它是量子场论的基本思想．在薛定谔理论中，必须特地引入粒子间的力，给定这些力我们能预言粒子的运动，但是薛定谔理论不能提供为什么力是那样的任何“解释”．另一方面，在量子场论中力的存在和本性是同粒子的存在有着密切的联系：我们有一个粒子、波和力的统一的描述．作为场论的一个例子，量子电动力学提供给我们这些特征的一个说明．它既描述电子（或正电子）间以电磁波为媒介的作用力，也描述相互作用的电子能够发射出来的电磁量子（光子）．

42 我们来评述量子场论的主要特点．我们引进量子场来描述粒子及其相互作用．这些场是位置和时间的函数，可以说它描述真空的局域态[1]．一开始就把物质的波动特性建立在理论之中：量子场论方程的解是波．波也具有粒子的特性．一个位置相当确定的粒子相应于一个集中的波包：最可能在场的振幅大的空-时区域中发现粒子．

场方程是非线性方程，这样它们可以描述波包（粒子）之间的相互作用．只有当场的振幅大时非线性才自然地显示出

1) 这些场实际上不是位置和时间的“寻常”复值函数．它们是数学上称为“算符值分布”的东西．但根据我们的目的可以想象它为通常的函数（代表“非线性以太中的声波”）．

来；如果振幅小，波将近似地象在线性理论中一样传播．如果在某一瞬时相应于两个粒子的波包在空间某一区域中交迭，非线性就显示出来，两个波就相互影响．在经典图象中这相应于两个粒子间的相互作用．另一方面，如果波交迭得不多，它们的相互作用就不强，这相应于经典图象中两个粒子相距较远时它们的相互作用就很弱．

43 量子场论本质上是*多粒子理论*．我们有一个单一的统一形式，通过它能描述具有任何数量的给定种类的粒子存在的世界的状态．粒子的产生和湮灭现象是量子场论的自然特征．它来自场方程的非线性性质．两个波包（相应于两个粒子）可以交迭和相互作用，并产生新的波包（相应于新的粒子）．例如，如果两个电子碰撞（亦即相互接近），就会发射电磁波，我们就说产生了光子．

44 根据这种思想已经建立了很多量子场论，其包含内容有广有狭．量子电动力学理论就是这些理论中的一个，在描述带电粒子的电磁相互作用，特别在原子物理方面，这个理论已经取得了某些惊人的成功．专门用以描述弱相互作用以及强相互作用而提出的其它的场论取得的成功要小得多．这些理论虽然已经使我们对基本粒子的少数几个非常普遍的性质有所了解，但除此而外并没有真正引导我们作出任何有用的实验预言，在强相互作用的情况中，已经证明逐步逼近的方法行不通了；而量子电动力学的一些预言则正是建立在逐步逼近方法上的．电动力学成功的原因无疑是精细结构常数很小，亦即电磁相互作用很弱．本质上强相互作用是较强的，因此对已经提出的一些场方程还不能求解，从而也不知道这些方程是否真的正确．很可能它们是不正确的．实际上对方程式选择的余地是无限的，过去我们唯一的指导原则就是“简单性原则”．在量子电动力学中我们还曾把带电的弹性球与电磁场相互作用

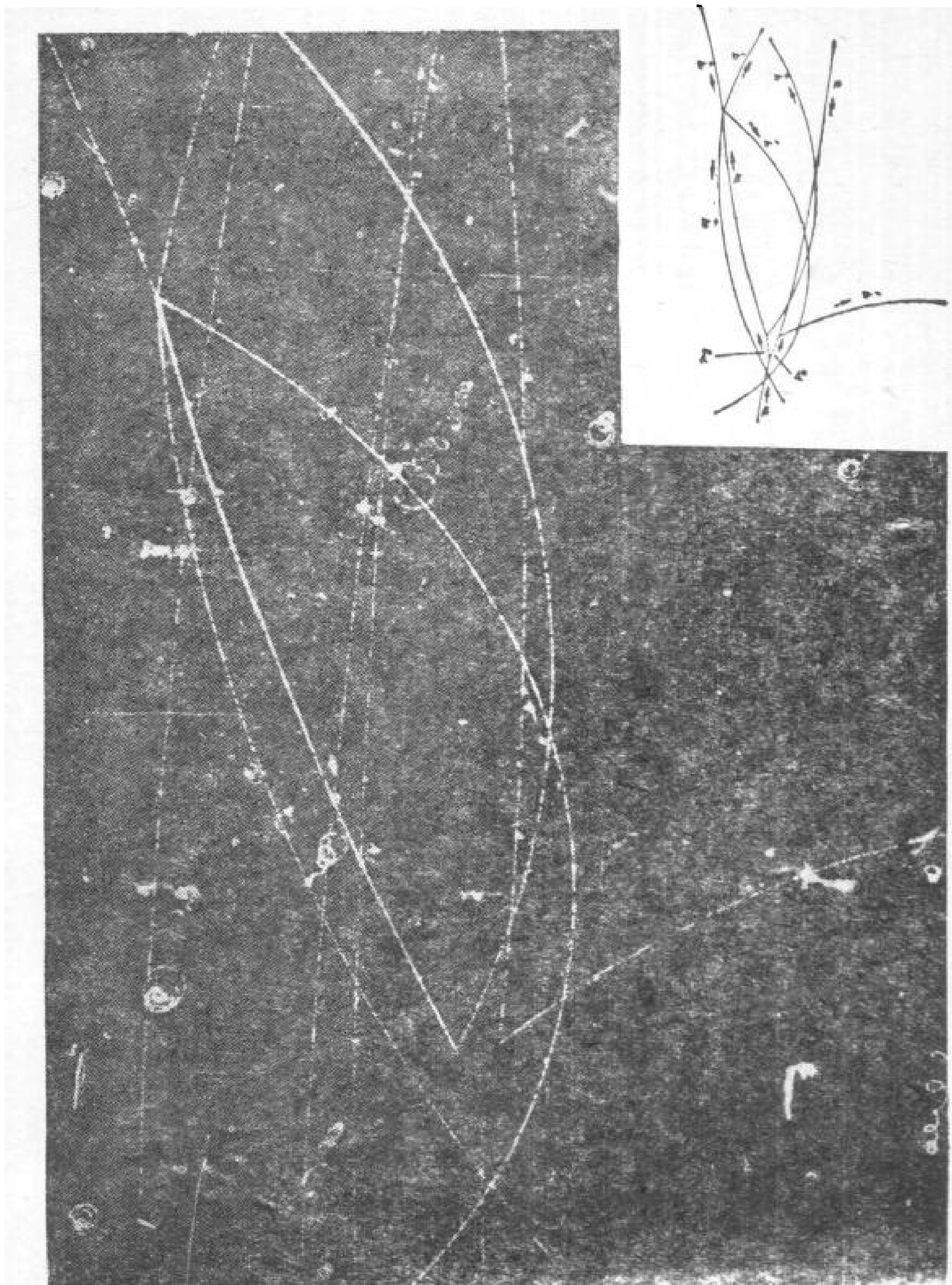


图 44A 显示一个 Λ 粒子与反 Λ 粒子对的产生和紧接着衰变的气泡室照片. 右上角的插图标记了各种粒子的径迹. 一个入射的反质子与一个质子碰撞产生了 Λ 粒子与反 Λ 粒子对,这对粒子并不产生可见的径迹,因为他们是中性的. Λ 衰变成一个负 π 介子和一个质子(通过弱相互作用),而反 Λ 粒子衰变为一个正 π 介子和一个反质子. 反质子紧接着与一个质子碰撞而湮没, 所产生的 π 介子中四个是带电的,留下可见的径迹.

把本照片放在我们量子场的讨论的中间部分是为了提醒读者, 量子场论的目的之一就是要对诸如在照片中所见到的这些事件给我们一个理论上的理解.

这种经典类似作为指导原则，这一方法是有决定性意义.

45 我们不能克服理论中出现的巨大数学困难以及实际上不能求解为描述强相互作用而提出的特殊的场方程，这种事实已经很自然地使人们在一定程度上不对这种场论寄予希望，已经听到主张放弃沿此方向作任何尝试的呼声.

可以对量子场论提出具有认识论性质的更有力的反对意见. 人们可以说这个理论的很多基本概念没有任何直接操作上的意义而加以反对. 并不清楚如何测量场本身：仅在某种特殊情况下，对于这个问题才得到还远不令人满意的解答. 在一个非常小的区域譬如说 10^{-100} 厘米的线度内，场的意义是什么？如何以及用什么仪器去测量在这个区域中的场？谁曾真实地（照这个字的任何意义）测量过比 10^{-13} 厘米还要小的距离呢？

这些的确都是严重的异议. 针对这些异议人们可能会说理论中的每一个概念并不真正需要都具有直接操作上的意义. 即使很难看出如何“测量” 10^{-100} 厘米的距离，仍然可能在描述物理事件发生的“午台”上保留我们的空-时坐标. 另一方面也可能未来的基本粒子相互作用的完美理论必须以抛弃我们的空间和时间的某些概念为根据. 量子场论详尽地描述在每一瞬时空间每一点上所发生的什么，这可能太过份了：在原则上它可能超出了我们的知识范围.

46 上面这种考虑使 W. 海森伯于 1943 年尝试建立所谓粒子相互作用的 S 矩阵理论. 在该理论中（这里将不讨论），海森伯根据他在 1925 年使他建立矩阵力学的同样的原则，尝试只在理论中采纳那些具有清楚的操作上的意义的概念. 可以说这理论只关心碰撞过程的结果，而不涉及在过程中发生的事件的细节. 至今这些企图还未导致一个完美的理论.

现今并不存在强相互作用的任何基本理论. 曾作过很多

努力，但结果均不令人信服．现在臆测未来的最后的理论将是一个场论还是一个S矩阵理论或者是一个由读者之一所创立的一种完全崭新类型的理论是无益的．

四、π介子和核力

47 要在本书中讨论量子场论的任何细节是不可能的：要有效地进行讨论就得需要相当高深的数学工具．另一方面我们刚看到这个理论的基本思想并不复杂．在结束这个主题之前我们将考虑一个在1934年由汤川秀树首次成功地解决的问题．

这个问题是与下述的疑问有关的，是否存在与核力相联系的粒子，亦即核力场的量子？如果存在，那么这个粒子的性质是什么？实验上能发现这个粒子吗？

我们知道存在一种与带电粒子间相互作用的电磁力相联系的粒子，就是光子．我们还知道使核结合在一起的力不可能起源于电磁性质．这些力比电磁力强大得多，而且还有个特点是它的力程很短．例如在超过10^{-12}厘米的距离时这些力很快地趋于零，而且从所有的实际效果看在超过10^{-11}厘米的距离时它已不存在．如果我们现在接受量子场论的思想，就必须期望核力场也能以自由传播的波出现，我们可以寻找相应的粒子．如同两个带电粒子碰撞放出光子一样，我们也可以指望两个核子足够强烈地碰撞中能放出核力场的量子．

48 读者很可能听到过这些粒子的确存在．它们不是别的，就是π介子．在汤川进行这次工作的时候并不知道有任何介子，因此他提出介子存在的建议确实是一种预言．他知道核力的两个显著的性质，即它们的强度大和力程短．他向他自

已提出了我们同样提出过的疑问. 在他的核力性质的知识的基础上, 他能预言这种量子的存在以及其质量应约等于电子质量的 200 倍. 在他的研究中无疑曾以与电磁相互作用类比作为指导.

在实验上发现汤川的介子还有一段有趣的曲折. 在 1937 年前后, 在宇宙射线中发现了质量为电子质量 200 倍的粒子, 自然联想到这些粒子就是汤川的量子. 但进一步的工作指出现在称为 μ 介子的这些粒子与物质(亦即与核)的作用极其微弱. 因此这些粒子不可能恰好就是与强大的核力有关的那种粒子. 通过大部分是由 C. F. 鲍威尔及其合作者在 1947 年的工作在宇宙射线中发现了另一种粒子[1], 而终于解决了这个奥秘. 这种粒子就是 π 介子. 它的质量约为电子质量的 280 倍; 它与核强烈地相互作用, 无疑地应把它确认为就是汤川的量子.

在 1948 年期间粒子加速器的发展已经达到了能够在核子-核子高能碰撞时大量地产生 π 介子的阶段. 曾经广泛地从实验上研究了 π 介子的性质, 现在知道它在所有涉及强相互作用的现象中起着主要的作用.

49 现在我们尝试"重复"汤川的功绩[2]. 我们将认为两个静止核子间的力与两个静止带电粒子间的静电力类似, 我们将在这种类似假定的基础上来求解我们的问题. 必须承认虽然这种类似远非完美的, 但这种论证的方法仍可使我们得到 π

1) C. M. G. Lattes, H. Muirhead, G. P. S. Occhialini, and C. F. Powell, "Processes involving charged mesons," *Nature* **159**, 694 (1947) 以及 C. M. G. Lattes, G. P. S. Occhialini, and C. F. Powell, "Observations on the tracks of slow mesons in photographic emulsions," *Nature* **160**, 453 (1947).

2) 汤川的理论出现在论文: "On the Interactions of Elementary Particles," *Proceedings of the Physico-Mathematical Society of Japan* **17**, 48 (1935). 之中.

介子质量和两个核子间作用力性质之间的正确的基本关系.

我们的论证如下：在没有任何源的情况下麦克斯韦方程组描述自由传播的电磁波．这些同样的方程还描述静止的点电荷的静电场,因此也描述两个静止点电荷的相互作用势能．事实上，一个静止电荷的静电势在电荷之外的各处空间均满足波动方程，波动方程的这种解具有球对称和静态的特殊性质，亦即与时间无关．所以我们来考虑自由传播的介子所满足的波动方程并寻找这个方程的球对称和静态的解．希望这将给出处在原点的单个核子的核力场的势．我们用 $V(r)$ 来表示这个势．于是相距为 r 的两个静止核子的相互作用能量将与 $V(r)$ 成正比,其中比例常数描述核子与 π 介子场的耦合强度.

50 π 介子德布罗意波函数 $\psi(\mathbf{x}, t)$ 满足的波动方程是克莱因-戈登方程,在第五章中早已推导和讨论过这个方程．设 π 介子的质量为 m_π 并使用使 $\hbar=c=1$ 的单位，则可把波动方程写成

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi(\mathbf{x}, t)-\nabla^2\psi(\mathbf{x}, t)=-m_\pi^2\psi(\mathbf{x}, t) \tag{50a}$$

其中 ∇^2 代表拉普拉斯算符

$$\nabla^2\equiv\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \tag{50b}$$

波动方程(50a)描述在无源情况下介子的德布罗意波的行为．按照我们的计划，现在来寻找能描述位于原点的单个核子以外的介子场的方程的静态的和球对称的解．这种情况下源是一个点源,就是原点处的核子,并不要求波动方程(50a)在原点成立，但必须在原点以外各处成立．我们认为解是一个势函数，并用 $V(r)$ 表示．于是这个解与时间无关，从而可略去(50a)中包含时间二次导数的项．方程就成为

$$\nabla^2 V(r) = m_\pi^2 V(r) \tag{50c}$$

51 函数 $V(r)$ 仅是 $r=\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}$ 的函数，下面必须找出拉普拉斯微分算符对这个函数的作用. 首先注意到

$$\frac{\partial r}{\partial x_1} = \frac{x_1}{r} \tag{51a}$$

由微分的链式法则可得

$$\frac{\partial V(r)}{\partial (x_1)} = \frac{dV(r)}{dr} \frac{\partial r}{\partial x_1} = \frac{x_1}{r} \frac{dV(r)}{dr} \tag{51b}$$

对 x_1 再微分一次得

$$\frac{\partial^2 V(r)}{\partial x_1^2} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{x_1}{r} \frac{dV(r)}{dr}\right) = \frac{1}{r} \frac{dV(r)}{dr} + \frac{x_1^2}{r} \frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r} \frac{dV(r)}{dr}\right) \tag{51c}$$

由此可得

$$\nabla^2 V(r) = \frac{3}{r} \frac{dV(r)}{dr} + r\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r} \frac{dV(r)}{dr}\right) \tag{51d}$$

对右边略加整理后可将式(51d)写成如下的形式

$$\nabla^2 V(r) = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{dV(r)}{dr}\right) \tag{51e}$$

这个重要的方程描述拉普拉斯微分算符对仅含 r 的函数 $V(r)$ 的作用.

52 现在我们的微分方程是一个线性二阶常微分方程，具有如下的形式

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{dV(r)}{dr}\right) = m_\pi^2 V(r) \tag{52a}$$

恰巧可以用基本函数求得此方程的闭合形式的解. 读者可以代入微分来验证两个线性独立的解是

$$\frac{1}{r}\exp(-rm_\pi), \qquad \frac{1}{r}\exp(+rm_\pi) \tag{52b}$$

通解是上述两个特解的线性组合. 我们注意到第二个解

相应于势随 r 的增加而无限增加，这样的解将描述随距离而增加的核子间的力．显然，物理上对此不能接受．可以得到结论，势必须与第一个解(52b)成正比，所以我们有

$$V(r)=C'\frac{1}{r}\exp(-rm_\pi) \tag{52c}$$

其中 C' 是常数．

我们抛弃第二个解再次说明一个以前遇到的重要原理：并非量子力学波动方程的每一个解都有物理意义．有物理意义的波函数不仅必须满足波动方程，而且还必须满足一些边界条件，其中之一就是解必须在无限远处是有限的．

53 现在我们的目的已经达到：两个相距为 r 的静止核子的势能 $U(r)$ 由下式给出

$$U(r)=\frac{C}{r}\exp\left(-\frac{r}{\lambda\!\!\!^{-}_\pi}\right) \tag{53a}$$

其中 $\lambda\!\!\!^{-}_\pi=\dfrac{1}{m_\pi}$，$C$ 是描述耦合强度的常数．

势 $U(r)$ 由于指数因子而随 r 迅速衰减．可以很粗略地说势的范围就是 $\lambda\!\!\!^{-}_\pi$：当超过这个距离很多时，势最终可以完全被忽略．在第二章第 38 节中已通过一些数值例子检验了这一点．

今天知道 π 介子的质量是 140 兆电子伏．量 $\lambda\!\!\!^{-}_\pi=\dfrac{1}{m_\pi}$ 不是别的，正是 π 介子的康普顿波长(在厘米·克·秒单位制中将是 $\lambda\!\!\!^{-}_\pi=\dfrac{\hbar}{m_\pi c}$)．数值上我们有 $\lambda\!\!\!^{-}_\pi=1.4\times10^{-13}$ 厘米，这就是核力场的“范围”．在汤川预言的时候，他从种种实验知道核力场的范围约为 10^{-13} 厘米，从而他能预言假想的介子的质量应约为 100 兆电子伏，它约为电子质量的 200 倍．

应当注意，力程与粒子(在这里就是介子)的质量成反比．一个无静止质量的粒子，如光子，所传递的力的力程是“无限

大的"：由方程(53a)给出的势就变成库仑势．当然这个势仍然随距离而减小，但它不是指数式地减小．这样我们有理由说我们已经对π介子与核力场性质间的联系有了一定的了解．

54 我们利用这个机会说明一下一个普通惯用的术语．很多物理学家愿意讲两个核子间的相互作用是通过交换一个π介子而引起的．同样，他们也说两个带电粒子的相互作用是通过交换一个光子而引起的．这些说法实际上只意味着能够发现两个核子间的相互作用，正如我们已发现了它一样：这就是说，描述自由π介子(或光子)传播的同一方程也描述被π介子(或光子)传递的力．当听到这个术语时，读者并不需要想象在两个核子间有任何小弹子在交换：它仅仅是一个修辞的手段．只要了解到这一点，当然无妨可以说"交换粒子"；这是一个常规的作法．按照习惯我们可以描述我们的发现如下．能通过与第三个粒子的相互作用而相互作用的两个粒子间的力可以说成是通过交换第三个粒子而引起的．这样产生的力的力程反比于被交换的粒子的质量．

55 有一点应该澄清，否则会把读者弄糊涂．在本章的前面，曾谈了不少关于量子场论的方程的非线性性质．但是我们是从解线性波动方程而找到由表示式(53a)给出的汤川势．所以读者会怀疑我们是否可以这么做．事实上，这些怀疑在一定程度上是有道理的．应把我们所研究的线性化理论认为是一种近似，只有当介子场或势$V(r)$不太大时才成立．所以汤川势在大距离亦即π介子的康普顿波长之外时应该是正确的，但在很小距离时可能是错误的．真相在于目前我们不知道在很小距离时相互作用是什么样，但我们也无理由怀疑在距离大于例如10^{-13}厘米时有效力具有同汤川势一样的普遍的形式．因此采用线性近似并不使我们的主要结论失效，这个结论就是力程与被交换的粒子的质量成反比．

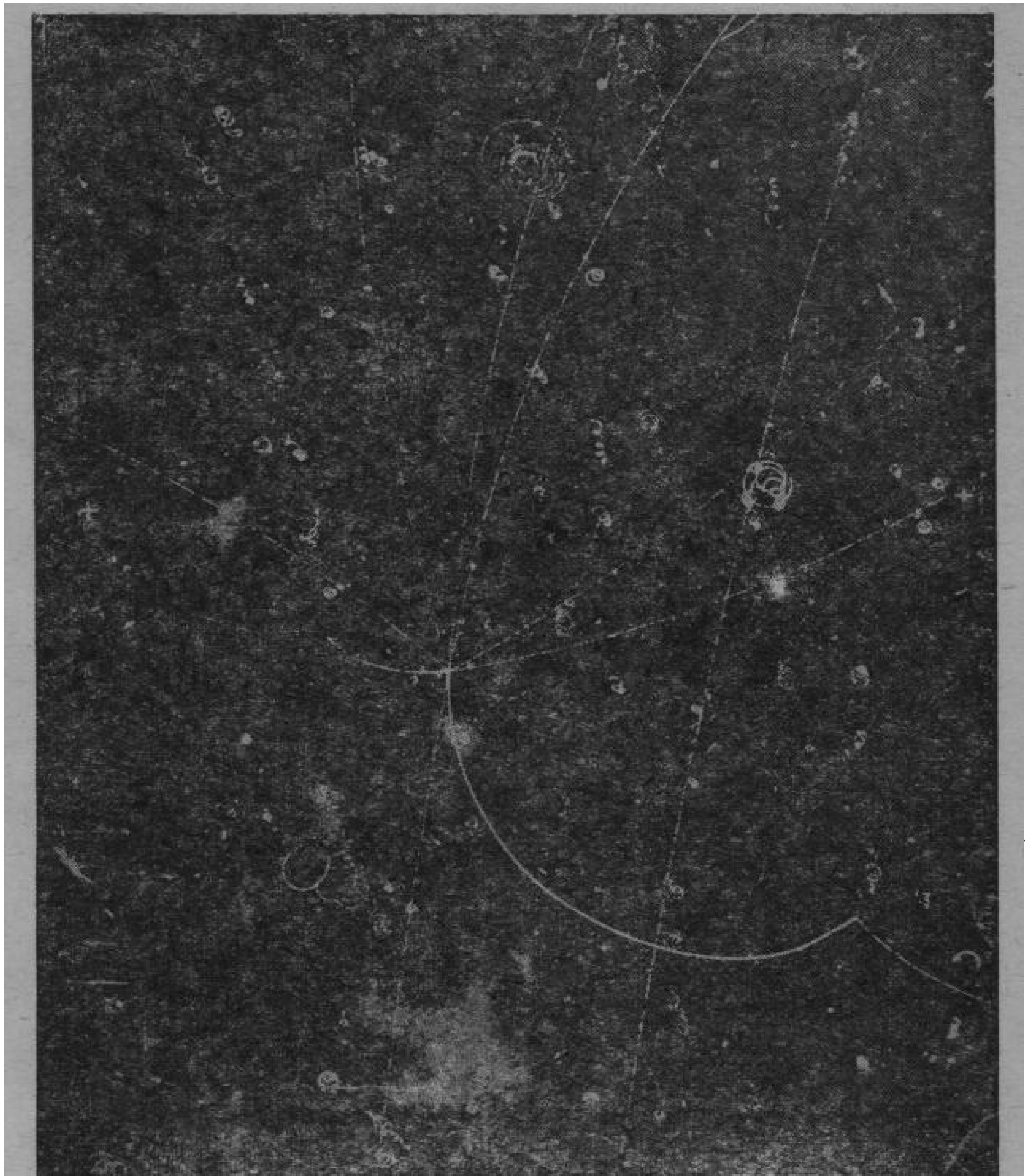


图 55A　显示一个质子和一个反质子湮没为π介子的气泡室照片．主要事件发生在视野的中部．反质子从下面射入，由几乎是直线的“点状”径迹表示其路径．在湮没过程中产生了八个带电π介子．其中的一个，即径迹方向最初是指向射入的反质子者，衰变为一个μ介子和一个中微子．μ介子随后衰变为一个正电子和二个中微子．很难区别出μ介子的径迹与π介子的径迹，但可以清楚地看出正电子的径迹的开端．

气泡室在垂直于照片的磁场之内．负电荷粒子的径迹按顺时针方向弯转，而正电荷粒子的径迹则按反方向弯转．低速粒子留下浓密的径迹，而高速粒子的径迹有表现出“点状”的倾向．

五、结 束 语

56 在前几章中我们已知道如何从量子力学的角度来考虑很多物理现象．我们的讨论肯定很不完全，但这并不奇怪，因为我们的确是打算写成一本导论式的书．有很多重要的普遍原理，我们一点也没讨论．对于所学的原理的系统应用的讨论在广度和深度两方面也都不足．然而我们应记住，量子物理是近 40 到 50 年来深入研究的课题，并且在这个领域中已经积累了大量的知识．这个广阔的领域决不是一本导论性的书所能概括的，所以通过听讲座和阅读等简单的过程还可学到比较多得多的知识．读者不应对这种说法感到沮丧或不愉快：这里所说的纯粹是事实．

然而我们已经有了一个好的开端．我们已学到了关于所有物理粒子的波动性质．我们已看到很多根据经典物理无法理解的物理现象怎样在波动图象的基础上得到理解．我们还对经典物理规律如何可以作为量子力学规律的极限情形而出现有了一定的了解．我们知道了与每个物理体系相联系的能级以及在量子力学范围内如何理解这些能级的产生．在学习过程中我们对(初看起来)奇异的微观物理学已有了一个梗概．我们也知道了一些关于微观物理学中物理量的数量级大小．我们还学会了怎样根据简单模型来作简单的估计．

读完本书直至最后一章结尾的读者已初步看到某些近代物理学中最核心的问题，他知道了物理学还不是成熟的学科：存在很多基本问题，这些问题目前还看不到解决的办法。

在结束本书时预祝读者将来学习量子物理学时愉快．

问　　题

1. (a) 计算能量为 0.1 电子伏垂直入射到厚度为 0.1 毫米的镉箔上的中子的穿透几率. 镉的密度是 8.7 克/厘米^3. 从图 6A 求出中子截面的数值.

(b) 同样计算能量为 1 电子伏垂直入射到厚度为 1 厘米的镉板上的中子的穿透几率.

2. 当 K 介子(入射到一个静止的质子上)的能量为 400 兆电子伏时,一个 K^+ 介子与一个质子相互作用的总截面约为 15 毫靶.问在液态氢(在一气泡室中)中一个这种能量的 K 介子每厘米路程中的平均相互作用数目是多少? 液态氢的密度为 0.071 克/厘米^3.

3. 当一个能量为 10 兆电子伏的 γ 量子与一个铅原子碰撞时,产生一个电子-正电子对的截面是 14 靶. 试问这种能量的 γ 射线垂直入射到厚度为 2.5 毫米的铅板上时,产生一个电子-正电子对的几率是多少? 铅的密度为 11.3 克/厘米^3.

4. 在某一实验中测得一个能量为 100 千电子伏的 γ 射线的康普顿散射的截面是 0.49 靶, 对这种远比一个电子的静止能量为小的能量,简单的非相对论性的经典计算结果与正确值接近. 试完成这种计算来看一下能取得怎样的接近程度. 在康普顿散射中, 一个 γ 射线被一个原来静止的电子所散射. (我们在第四章中讨论过康普顿效应, 但我们并未讨论散射截面.) 假定一个振幅为 A 频率为 ω 的平面波入射到一个原来静止的电子上. 电子将开始在波的电场方向上振动. 令 x 表示这种振动的振幅. 显然, 量 x 正比于波的振幅 A, 另外 x 将依赖于频率 ω 以及电子的质量和电荷. 振动的电子的作用象一个偶极矩为 ex 的电偶极子一样. 这个偶极子以总速率 W 发射电磁辐射 (对于这个速率, 我们引用第三章第 48 节中公式). 这样, 你就可以计算出入射到(包含电子的)单位面积上的能量有多少将被电子所散射. 再将你的结果用散射截面表示出来: 这就是康普顿截面. 一个原子的康普顿截面就是一个电子的截面与该原子中的电子数的乘积.

5. (a) 在第 17 节中我们曾提出了一个球对称散射情况下截面极大值的简单理论. 将这个理论与图 24B 中所示的 π^+-p 截面的实测值

比较是有意义的．为了简化问题可认为质子的重量无限．那么与散射有关的能量就是正 π 介子的能量，在以 $N^*_{3/2}$ 为标记的突出的共振态处，其值约为 195 兆电子伏(实验室参照系)．试进行这一比较．你会发现数量级是对的，但截面的实验值与理论值相差"一个数量级为一的因子"．两者不符合可简单解释为散射不是球对称的．必须修正我们的简单理论使之包含其它可能的角分布．作了这种修正后发现截面在极大处的实验值与理论的预言符合得很好．

(b) 根据图 24B 所示的曲线，估计 N^* "粒子"的平均寿命．

6．利用第 17—18 节的共振散射的简单理论，估计能量为 14.4 千电子伏的 γ 射线被核 Fe^{57} 共振吸收的截面．(这个估计同第四章图 16A 中的实验结果有关)若吸收 γ 射线的铁原子核处于 1 密耳(英制长度单位 mil=0.02540 毫米) 厚的箔叶之中，求 γ 射线穿过此箔叶的几率．

注意，我们的简单理论并不能真正应用到光子上，原因之一是光子的自旋角动量为 1．你因此不能预期得到截面的正确数值．然而我们的理论正确地给出截面极大值对波长的依赖关系，因此你的估计作为数量级的估计是有用的．

7．由于可见光的波长较长，光被原子共振散射的截面极大值可以很大．我们来考虑波长为 5896 埃的黄光被钠原子共振散射的情形．

(a) 根据上题的精神估计共振时的截面极大值．

(b) 在实际的实验中，可将玻璃容器中的钠蒸气作为散射实验的"靶"(例如可考虑第三章问题 3 中所描述的实验安排)．各钠原子的速度不会都一样，结果多普勒位移将使吸收线增宽．钠在 $3P_{1/2}$ 态的平均寿命约为 10^{-8} 秒．由此你可以计算一个静止的孤立钠原子的线宽．假定入射光具有这样的线宽．再假定吸收容器中的原子具有相应于温度 200°C 的平均无规速度．试估计容器中一个原子对入射束中的光子的有效散射截面．

(c) 利用上面(b)中得出的有效截面的估计，求出为了使入射光的强度通过 1 厘米厚的玻璃片后减少一半时，容器中每立方厘米所必须具有的钠原子数目．无须说，除共振波长以外这样的气体对任何其它波长的光是完全透明的．

8．考虑质量谱如图 27B 所示、而八重法对称图如图 29B 所示的重子八重态中的各种粒子．这些粒子中有一个是稳定的．其余的不稳定粒子中有一个通过电磁相互作用而衰变（它具有比其它粒子显著短的寿命），而其它的不稳定粒子则通过弱相互作用而衰变．你能否根据我们曾经提到的重子数、电荷和超荷的守恒定律来说明八重态的这些特性．这样做时你应该研究本教程中已经提到的粒子的所有可能的衰变，并考虑到这些粒子的质量的实测值．例如：你开始可以想一想 Σ^+ 粒子是否能够衰变为一个 K^+ 介子和某一别的粒子．你会立即发现，可能性非常有限，要加以考虑的情况并不太多．

这样，本问题就详细指出了，我们讨论过的守恒定律可以推断没有一个粒子能通过强相互作用而衰变，仅只有一个粒子可以通过电磁相互作用而衰变．

9．图 29A—D 的对称图解给出各种粒子的一个量的数值．这个量称为同位旋的第三分量（用 I_3 表示）．我们已经说过这个量在所有强相互作用和电磁相互作用中也守恒．

研究一下这个守恒定律是否有超出我们提到过的关于电荷、超荷和重子数守恒等其它定律的意义．

10．在基本粒子的文献中常用一个称为“奇异性”的性质来表征强相互作用粒子．对每一个这种粒子可以指定一个奇异性量子数 S，可以定义为 $S=Y-B$，其中 Y 是超荷数，B 是重子数．根据这个规则 π 介子和核子的奇异性为零：它们并不奇异而是“平常的”．

(a) 在何种相互作用中总奇异性守恒？

(b) 在奇异性 S、电荷 Q、重子数 B、和同位旋第三分量 I_3 之间有一个简单的线性关系．试找出这个关系（正如图 29A—D 的对称图解中这个关系所显示的那样）．

11．我们想在质子-质子碰撞中产生 Λ 粒子．试求为了产生这种可能性一个质子入射到一个静止质子上的最小动能是多少？

12．(a) 在第 11 节中我们曾猜测一个远离散射中心的散射波必须取如下的形式

$$\psi_s(\mathbf{x},\ t)=Cf(\theta)\frac{1}{x}\exp(ixp-i\omega t) \qquad \text{(a)}$$

试证明在$f(\theta)=f$不依赖于散射角θ的球对称散射的特殊情形下，由(a)给出的波函数实际上是克莱因-戈登方程(除$\mathbf{x}=0$点之外)在真空中的一个解．考虑一下第51，52节的讨论对此将有所帮助．

(b) 试证明对任意的$f(\theta)$，表示式(a)是克莱因-戈登方程的一个近似解．你应该证明如果将这个波函数代入克莱因-戈登方程，那么除了当x趋向无限大而以$1/x^2$方式趋向于零的误差项以外，方程是被满足的．

附　　录

表 A.　一般物理常数[1)]

普朗克常数:	$h=2\pi\hbar=(6.62559\pm0.00015)\times10^{-27}$ 尔格·秒
	$\hbar=\dfrac{h}{2\pi}=(1.05449\pm0.00003)\times10^{-27}$ 尔格·秒
光速:	$c=(2.997925\pm0.000001)\times10^{10}$ 厘米·秒$^{-1}$
电荷:	$e=(4.80298\pm0.00006)\times10^{10}$ 静电单位
	$=(1.60210\pm0.00002)\times10^{-19}$ 库仑
引力常数:	$G=(6.670\pm0.005)\times10^{-8}$ 达因·厘米^2·克$^{-2}$
精细结构常数:	$\alpha=\dfrac{e^2}{\hbar c}=(7.29720\pm0.00003)\times10^{-3}$
	$\dfrac{1}{\alpha}=137.0388\pm0.0006$
阿佛伽德罗常数:	$N_0=(6.02252\pm0.00009)\times10^{23}$ 摩尔$^{-1}$
玻耳兹曼常数:	$k=(1.38054\pm0.00006)\times10^{-16}$ 尔格$(^\circ\mathrm{K})^{-1}$
法拉第常数:	$N_0e=(96487.0\pm0.5)$ 库仑·摩尔$^{-1}$
普适气体常数:	$R=N_0k=8.314\times10^7$ 尔格$(^\circ\mathrm{K})^{-1}$摩尔$^{-1}$
	$=1.986$ 卡$(^\circ\mathrm{K})^{-1}$摩尔$^{-1}$
电子质量:	$m=(9.10908\pm0.00013)\times10^{-28}$ 克
	$=(5.48597\pm0.00003)\times10^{-4}$ 原子质量单位
	$=(0.51006\pm0.000002)$ 兆电子伏$/c^2$
原子质量单位:	$(\mathrm{amu})=(1.66043\pm0.00002)\times10^{-24}$ 克
	$=(931.478\pm0.005)$ 兆电子伏$/c^2$
质子质量:	$M_p=(1.67252\pm0.00003)\times10^{-24}$ 克
	$=(1.00727663\pm0.00000008)$ 原子质量单位
	$=(938.256\pm0.005)$ 兆电子伏$/c^2$
中子质量:	$M_n=(1.0086654\pm0.0000004)$ 原子质量单位
	$=(939.550\pm0.005)$ 兆电子伏$/c^2$

电子的康普顿波长:

$$\lambda_e=\frac{h}{mc}=(2.42621\pm0.00002)\times10^{-10}\text{ 厘米}$$

$$\lambda\!\!\!^{-}_e=\frac{\hbar}{mc}=(3.86144\pm0.00003)\times10^{-11}\text{ 厘米}$$

第一玻尔半径:

$$a_0=\frac{\hbar^2}{me^2}=\alpha^{-1}\lambda\!\!\!^{-}_e$$

$$=(5.29167\pm0.00002)\times10^{-9}\text{ 厘米}$$

电子的"经典半径":

$$\frac{e^2}{mc^2}=\alpha\lambda\!\!\!^{-}_e=(2.81777\pm0.00004)\times10^{-13}\text{ 厘米}$$

具有无限大质子质量的氢的非相对论电离势:

$$R_\infty=\frac{1}{2}\alpha^2mc^2=(13.60535\pm0.00013)\text{ 电子伏}$$

无限大质子质量的里德伯常数:

$$\tilde{R}_\infty=\frac{\alpha}{4\pi a_0}=\frac{R_\infty}{hc}=(109737.31\pm0.01)\text{ 厘米}^{-1}$$

氢的里德伯常数:

$$\tilde{R}_H=(109677.576\pm0.012)\text{ 厘米}^{-1}$$

玻尔磁子:

$$\mu_B=\frac{e\hbar}{2mc}=(9.27314\pm0.00021)\times10^{-21}\text{ 尔格·高斯}^{-1}$$

与 1 电子伏相联系的频率:

$$(2.41804\pm0.00002)\times10^{14}\text{ 周/秒}$$

与 1 电子伏相联系的波数:

$$(8065.73\pm0.08)\text{ 厘米}^{-1}$$

与 1 电子伏相联系的温度:

$$(11604.9\pm0.5)\,^\circ\mathrm{K}$$

1) 本表中的大多数数据取自文章 E. R. Cohen and J. W. M. Dumond, "Our Knowledge of the Fundamental Constant of Physics and Chemistry in 1965," *Reviews of Modern Physics* **37**, 537 (1965).

表 B. 最稳定的基本粒子[1]

粒子	自旋	质量 兆电子伏	平均寿命 秒	重要的衰变[2] 部分方式	分支比	Q兆电子伏
γ 光子	1	0	稳定	稳定		
轻子						
ν_e e-中微子	1/2	0(<0.2 千电子伏)	稳定	稳定		
ν_μ μ-中微子	1/2	0(<2 兆电子伏)	稳定	稳定		
$e^\mp$ 电子-正电子	1/2	0.511006	稳定	稳定		
$\mu^\mp$ μ 介子	1/2	105.659	2.20×10^{-6}	$e\nu\nu$	100%	105
重子[3]						
p 质子	1/2	938.256	稳定	稳定		
n 中子	1/2	939.550	1.01×10^{3}	$pe^-\nu$	100%	0.78
Λ 超子	1/2	1115.58	2.51×10^{-10}	$p\pi^-$	66%	30
				$n\pi^0$	34%	41
				$p\mu\nu$	1.4×10^{-4}	72
				$pe\nu$	0.88×10^{-3}	177
Σ^+	1/2	1189.47	0.81×10^{-10}	$p\pi^0$	53%	116
				$n\pi^+$	47%	110
				$p\gamma$	1.9×10^{-3}	251
Σ^0 Σ 超子	1/2	1192.56	$<1.0\times10^{-14}$	$\Lambda\gamma$	100%	77
Σ^-	1/2	1197.44	1.65×10^{-10}	$n\pi^-$	100%	118
				$ne^-\nu$	1.3×10^{-3}	257
				$n\mu^-\nu$	0.6×10^{-3}	152
				$\Lambda e^-\nu$	0.6×10^{-4}	81
Ξ^0 级联粒子	1/2	1314.7	3.0×10^{-10}	$\Lambda\pi^0$	100%	7
Ξ^-	1/2	1321.2	1.74×10^{-10}	$\Lambda\pi^-$	100%	5
				$\Lambda e^-\nu$	3.0×10^{-3}	205
Ω^- 负 Ω 粒子	3/2	1674	1.5×10^{-10}	$\Xi\pi$	~50%	221
				$\Lambda\overline{K}$	~50%	66

续(表 B)

粒子	自旋	质量 兆电子伏	平均寿命 秒	重要的衰变[2] 部分方式	分支比	Q 兆电子伏
介子						
$\pi^{\pm}$ 带电 π 介子	0	139.58	2.608×10^{-8}	$\mu\nu$	100%	34
				$e\nu$	1.24×10^{-4}	139
				$\mu\nu\gamma$	1.24×10^{-4}	34
				$\pi^0 e\nu$	1.0×10^{-8}	4.08
π^0 中性 π 介子	0	134.98	0.89×10^{-16}	$\gamma\gamma$	98.8%	135
				γe^+e^-	1.2%	134
$K^{\pm}$ 带电 K 介子	0	493.8	1.235×10^{-8}	$\mu\nu$	63.4%	388
				$\pi^{\pm}\pi^0$	21.0%	219
				$\pi^{\pm}\pi^-\pi^+$	5.6%	75
				$\pi^{\pm}\pi^0\pi^0$	1.7%	84
				$\mu^{\pm}\pi^0\nu$	3.4%	253
				$e^{\pm}\pi^0\nu$	4.8%	358
K^0 中性 K 介子	0	497.9				
K_1			0.87×10^{-10}	$\pi^+\pi^-$	69.3%	219
				$\pi^0\pi^0$	30.7%	228
K_2			5.68×10^{-8}	$\pi^0\pi^0\pi^0$	23.5%	93
				$\pi^+\pi^-\pi^0$	11.5%	84
				$\pi\mu\nu$	27.5%	253
				$\pi e\nu$	37.4%	358
				$\pi^+\pi^-$	0.15%	219
				$\pi^0\pi^0$	0.36%	228
η 介子	0	548.6	$<7\times10^{-20}$ $>0.7\times10^{-20}$	$\gamma\gamma$	31.4%	549
				$\pi^0\pi^0\pi^0$	21.0%	144
				$\pi^0\gamma\gamma$	20.5%	414
				$\pi^+\pi^-\pi^0$	22.4%	135
				$\pi^+\pi^-\gamma$	4.6%	269

1) 本表中的数据取自 A. H. Rosenfeld 等的评论性文章"Data on Particles and Resonant States," *Reviews of Modern Physics* **39**, 1(1967). 这篇文章中提供了更多粒子的数据. 也给出了特别稳定的粒子的另外的资料. 对于某些人们较少知道的衰变方式本表从略.

2) Q 代表衰变中释放的动能.

3) 每一个重子相应有一个反重子,未分别列出.

表C. 化 学 元 素

元素	符号	原子序数	原 子 量 原子质量单位	元素	符号	原子序数	原 子 量 原子质量单位
锕	Ac	89	(227)	锗	Ge	32	72.59
铝	Al	13	26.9815	金	Au	79	196.967
镅	Am	95	(243)	铪	Hf	72	178.49
锑	Sb	51	121.75	氦	He	2	4.0026
氩	Ar	18	39.948	钬	Ho	67	164.930
砷	As	33	74.9216	氢	H	1	1.00797
砹	At	85	(210)	铟	In	49	114.82
钡	Ba	56	137.34	碘	I	53	126.9044
锫	Bk	97	(247)	铱	Ir	77	192.2
铍	Be	4	9.0122	铁	Fe	26	55.847
铋	Bi	83	208.980	氪	Kr	36	83.80
硼	B	5	10.811	镧	La	57	138.91
溴	Br	35	79.909	铹	Lw	103	(257)
镉	Cd	48	112.40	铅	Pb	82	207.19
钙	Ca	20	40.08	锂	Li	3	6.939
锎	Cf	98	(215)	镥	Lu	71	174.97
碳	C	6	12.01115	镁	Mg	12	24.312
铈	Ce	58	140.12	锰	Mn	25	54.9380
铯	Cs	55	132.905	钔	Md	101	(256)
氯	Cl	17	35.453	汞	Hg	80	200.59
铬	Cr	24	51.996	钼	Mo	42	95.94
钴	Co	27	58.9332	钕	Nd	60	144.24
铜	Cu	29	63.54	氖	Ne	10	20.183
锔	Cm	96	(247)	镎	Np	93	(237)
镝	Dy	66	162.50	镍	Ni	28	58.71
锿	Es	99	(254)	铌	Nb	41	92.906
铒	Er	68	167.26	氮	N	7	14.0067
铕	Eu	63	151.96	锘	No	102	(255)
镄	Fm	100	(253)	锇	Os	76	190.2
氟	F	9	18.9984	氧	O	8	15.9994
钫	Fr	87	(223)	钯	Pd	46	106.4
钆	Gd	64	157.25	磷	P	15	30.9738
镓	Ga	31	69.72	铂	Pt	78	195.09

续(表 C)

元素	符号	原子序数	原子量 原子质量单位	元素	符号	原子序数	原子量 原子质量单位
钚	Pu	94	(244)	硫	S	16	32.064
钋	Po	84	(209)	钽	Ta	73	180.948
钾	K	19	39.102	锝	Tc	43	(98)
镨	Pr	59	140.907	碲	Te	52	127.60
钷	Pm	61	(145)	铽	Tb	65	158.924
镤	Pa	91	(231)	铊	Tl	81	204.37
镭	Ra	88	226.0254	钍	Th	90	232.038
氡	Rn	86	(222)	铥	Tm	69	168.934
铼	Re	75	186.2	锡	Sn	50	118.69
铑	Rh	45	102.905	钛	Ti	22	47.90
铷	Rb	37	85.47	钨	W	74	183.85
钌	Ru	44	101.07	铀	U	92	238.03
钐	Sm	62	150.35	钒	V	23	50.942
钪	Sc	21	44.956	氙	Xe	54	131.30
硒	Se	34	78.96	镱	Yb	70	173.04
硅	Si	14	28.086	钇	Y	39	88.905
银	Ag	47	107.870	锌	Zn	30	65.37
钠	Na	11	22.9898	锆	Zr	40	91.22
锶	Sr	38	87.62				

注：原子量加括号的是放射性同位素，括号中的数字是最稳定同位素的质量数

表 D. 单位和转换因子

长度：1 微米 $=10^{-6}$ 米　1 毫微米 $=10^{-9}$ 米 $=10^{-7}$ 厘米

　　　1 埃 $=10^{-8}$ 厘米　1 费米 $=10^{-13}$ 厘米

面积：1 靶 $=10^{-24}$ 厘米^2　1 毫靶 $=10^{-27}$ 厘米^2

时间：1 年 $=3.156\times10^{7}$ 秒

力：1 牛顿 $=10^{5}$ 达因

能量：1 焦耳 $=10^{7}$ 尔格 $\cong(0.2389=1/4.186)$ 卡

　　　1 电子伏 $=(1.60210\pm0.00002)\times10^{-19}$ 焦尔

质量：1 原子质量单位 $=(1.66043\pm0.00002)\times10^{-24}$ 克

电量：1 库仑 $=(2.997925\pm0.00001)\times10^{9}$ 静电单位 $=0.1$ 电磁单位

电势：1 静电单位 $=(299.7925\pm0.0001)$ 伏特(伏)

磁感：1 伏·秒/米^2 $=10^{4}$ 高斯

原子质量对应的能量：

$$(1\text{ 原子质量单位})\times c^2=(9.31478\pm0.00005)\times10^{8}\text{ 电子伏}$$

放射性样品的活性：1 居里 $=3.7\times10^{10}$ 每秒衰变量

与 1 电子伏联系的频率：$(2.41804\pm0.00002)\times10^{14}$ 秒$^{-1}$

与 1 电子伏联系的波长：$(1.239810\pm0.000013)\times10^{-4}$ 厘米

与 1 电子伏联系的波数：$(8.06573\pm0.00008)\times10^{3}$ 厘米$^{-1}$

表 E. 表示能量的各种单位的转换因子

	能量		整体能量		温度	质量	频率	波数	波长
	E		N_0E		E/k	E/c^2	E/h	$E/(hc)$	$(hc)/E$
	电子伏	尔格	尔格/摩尔	卡/摩尔	°K	原子质量单位	周/秒	厘米$^{-1}$	埃
1 电子伏	1	1.6021×10^{-12}	9.6487×10^{11}	23050	11605	1.0736×10^{-9}	2.4181×10^{14}	8065.8	12398
1 尔格	6.2418×10^{11}	1	6.0226×10^{23}	1.439×10^{16}	7.244×10^{15}	6.7010×10^{2}	1.5093×10^{26}	5.0345×10^{15}	1.9863×10^{-8}
1 尔格/摩尔	1.0364×10^{-12}	1.6604×10^{-24}	1	2.389×10^{-8}	1.203×10^{-8}	1.1126×10^{-21}	250.61	8.3594×10^{-9}	1.1963×10^{16}
1 卡/摩尔	4.338×10^{-5}	6.951×10^{-17}	4.186×10^{7}	1	0.503	4.658×10^{-14}	1.049×10^{10}	0.3499	2.858×10^{8}
1° K	8.617×10^{-5}	1.381×10^{-16}	8.314×10^{7}	1.986	1	9.251×10^{-14}	2.084×10^{10}	0.6950	1.439×10^{8}
1 原子质量单位	931.48×10^{6}	1.4923×10^{-3}	8.9876×10^{20}	2.147×10^{13}	1.081×10^{13}	1	2.2524×10^{23}	7.5131×10^{12}	1.3310×10^{-5}
1 周/秒	4.1355×10^{-15}	6.6255×10^{-27}	3.9903×10^{-3}	9.532×10^{-11}	4.799×10^{-11}	4.4398×10^{-24}	1	3.3356×10^{-11}	2.9979×10^{18}
1 厘米$^{-1}$	1.2398×10^{-4}	1.9863×10^{-16}	1.1963×10^{8}	2.858	1.439	1.3310×10^{-13}	2.9979×10^{10}	1	10^{8}
1 埃	1.2398×10^{4}	1.9863×10^{-8}	1.1963×10^{16}	2.858×10^{8}	1.439×10^{8}	1.3310×10^{-5}	2.9979×10^{18}	10^{8}	1
电子质量 mc^2	511006	8.1868×10^{-7}	4.9306×10^{17}	1.178×10^{10}	5.930×10^{9}	5.4859×10^{-4}	1.2356×10^{20}	4.1217×10^{9}	2.4262×10^{-2}
里德伯常数 R_∞	13.605	2.1797×10^{-11}	1.3127×10^{13}	3.136×10^{5}	1.579×10^{5}	1.4606×10^{-8}	3.2898×10^{15}	109737	911.27

表 F. 重要物理常数的非精确值

这里列出 A 中一部分重要常数的非精确值，以供一般简单的计算使用．希望读者熟记．

阿佛伽德罗常数:	$N_0 \approx 6 \times 10^{23}$(摩尔)$^{-1}$
光速:	$c \approx 3 \times 10^{10}$ 厘米/秒
电子电荷:	$e \approx 1.6 \times 10^{-19}$ 库仑
精细结构常数:	$\alpha \approx 1/137$
电子静止能量:	$mc^2 \approx 0.5$ 兆电子伏
质子静止能量:	$M_p c^2 \approx 940$ 兆电子伏
质子与电子的质量比:	$M_p/m \approx 1800$
氢的电离能:	$R_\infty = \frac{1}{2}\alpha^2 mc^2 \approx 13.6$ 电子伏
氢的玻尔半径:	$a_0 = \lambda\!\!\!^{-}/\alpha \approx 0.5$ 埃 $= 0.5 \times 10^{-8}$ 厘米
玻尔磁子:	$(e\hbar)/(2mc) \approx 5.8 \times 10^{-9}$ 电子伏/高斯
核半径(质量数 A):	$r \approx A^{1/3} \times (1.2 \times 10^{-13}$ 厘米)
核结合能/核子数:	≈ 8 兆电子伏
“室温”:	$k \times (293°\text{K}) \approx (1/40)$ 电子伏
“光学区域”:	4000 埃—7000 埃 3.0 电子伏—1.8 电子伏

1 电子伏相当于:

- 温度 $\approx 12,000°\text{K}$
- 频率 $\approx 2.4 \times 10^{14}$ 周/秒
- 整体能 $\approx 23,000$ 卡/摩尔
- 波数 ≈ 8000 厘米$^{-1}$
- 波长 $\approx 12,000$ 埃